УДК 513.25/26

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ АЛГОРИТМАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.И.Шмырев

Предлагаемая работа непосредственно примыкает к статье [1] настоящего сборника, в которой рассматриваются методы минимизации квазивыпуклой функции при линейных ограничениях, являющиеся обобщением широко известных методов симплексного типа для задач линейного и квадратичного программирования. В этих методах на каждом шаге процесса требуется минимизировать исходную функцию на некотором аффинном многообразии. В настоящей работе рассматриваются вопросы построения вычислительных алгоритмов указанных методов и показывается, что в случае, когда минимизируемая функция зависит не более чем от четырех переменных, на каждом шаге процесса можно обойтись оптимизацией функции лишь одной переменной.

Изложение ведется применительно к конкретному виду функции, однако с несущественными изменениями описываемые приемы применимы и для многих других функций. Примеры таких функций приведены в [I].

I^0. В качестве иллюстративного примера будем рассматривать следующую задачу.

Определить вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, доставляющий минимум выпуклой функции

$$f(x) = -\sum_{j=1}^{4} \ln x_j , \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j\in N} x_j A^j = B, \qquad (2)$$

$$x_j > 0, \quad 1 \le j \le 4, \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0, \quad 4 < j \le n, \qquad (4)$$

где $N = \{1, 2, \dots, n\}$, а $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ и $A^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ – заданные m-мерные векторы.

Для этой задачи мы ограничимся рассмотрением алгоритма прямого метода последовательного улучшения. Алгоритмы двойственного и комбинированных методов из [1] строятся аналогично.

Прежде всего несколько уточним общую схему метода. Для полноты изложения опишем полностью k-ый шаг процесса.

Пусть к началу k-го шага нам известен некоторый вектор $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, удовлетворяющий условиям (2)-(4). Через $J(x^k)$ будем обозначать множество

$$J(x^k) = \{ j \in N \mid x_j^k > 0 \}.$$

Пусть также известно некоторое множество $J_k \subset N$ такое, что $J_k \supset J(x^k)$ и среди векторов A^j, $j \in J_k$, имеется m линейно независимых.

Рассматривается задача минимизации функции f на пересечении аффинного многообразия

$$L(J_k) = \{ x \in R^n \mid \sum_{j\in J_k} x_j A^j = B, \; x_j = 0, j \bar{\in} J_k \}, \qquad (5)$$

содержащего точку x^k, с областью

$$G = \{ x \in R^n \mid x_j > 0, \; 1 \le j \le 4 \}.$$

Если функция f на $L(J_k) \cap G$ не достигает минимума, то в общей схеме метода при этом требуется, чтобы существовал такой вектор $g \in R^n$, что функция f строго убывает на любом луче с направляющим вектором g и вершиной в произвольной точке из G, в частности, на луче

$$\Lambda = \{ x \in R^n \mid x = x^k + tg, \; t \ge 0 \}. \qquad (6)$$

В рассматриваемом случае это условие, как легко видеть, выполняется, причем функция f строго убывает на любом луче $\Lambda \subset G$ и

$$\inf_{x\in\Lambda} f(x) = -\infty.$$

Вопросы нахождения точки минимума функции f на $L(J_k) \cap G$ или

луча (6) мы рассмотрим ниже.

Будем различать три случая:

а) минимум функции f на $L(J_k)\cap G$ реализуется в исходной точке x^k ;

в) определена точка $\bar{x}^k$, доставляющая минимум функции f на $L(J_k)\cap G$, причем $f(\bar{x}^k)< f(x^k)$;

с) определен вектор $g\in R^n$ такой, что на соответствующем луче (6) функция f строго убывает.

Если имеет место первый из указанных случаев, то находим решение $y=(y_1, y_2,\dots, y_m)$ системы линейных уравнений

$$(A^j, y)=\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_j}, \quad j\in J_k, \tag{7}$$

и проверяем выполнение условий

$$(A^j, y)\le\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_j}, \quad j\in N\setminus J_k. \tag{8}$$

Если эти условия выполняются, то точка x^k по признаку оптимальности является решением исходной задачи (процесс окончен). В противном случае находим $j_0\in N\setminus J_k$ такое, что

$$(A^{j_0}, y)>\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_{j_0}}, \tag{9}$$

и переходим к следующему шагу, полагая $x^{k+1}=x^k$, $J_{k+1}=J_k\cup\{j_0\}$.

Заметим, что система (7) имеет единственное решение, так как среди векторов A^j , $j\in J_k$, имеется m линейно независимых.

Если имеет место случай в), то проверяем выполнение неравенств (4) для $x=\bar{x}^k$, т.е. неравенств

$$\bar{x}_j^k\ge 0, \quad 4<j\le n. \tag{10}$$

При выполнении этих неравенств принимаем $x^{k+1}=\bar{x}^k$, $J_{k+1}=J_k$ и переходим к следующему шагу, на котором, как легко видеть, будет иметь место случай а). Если же неравенства (10) не выполняются, то полагаем $g=\bar{x}^k-x^k$ и находим величину

$$\tau=\min_{g_j<0}\left\{-\frac{x_j^k}{g_j}\right\}=-\frac{x_{j_1}^k}{g_{j_1}}, \tag{11}$$

после чего переходим к следующему шагу, принимая $x^{k+1}=x^k+\tau g$, $J_{k+1}=J_k\setminus\{j_1\}$.

Пусть теперь реализуется случай с). Если при этом справедливы неравенства

$$g_j \geq 0, \quad 4 < j \leq n,$$

то в исходной задаче не существует оптимального вектора. Если же какое-либо из указанных неравенств не выполняется, то, как и в предшествующем случае, находим величину τ согласно (II) и переходим к следующему шагу, принимая, как и в случае в),

$$J_{k+1} = J_k \setminus \{j_1\}, \; x^{k+1} = x^k + \tau g.$$

Как легко показать, получаемое на k-ом шаге процесса множество J_{k+1} так же, как и множество J_k, обладает тем свойством, что среди векторов A^j, $j \in J_{k+1}$, имеется m линейно независимых. Действительно, при реализации случая а) это очевидно. Если бы указанное свойство нарушалось при реализации случая в) или случая с), то векторы A^j, $j \in J_{k+1} = J_k \setminus \{j_1\}$, выражались бы через какие-то $\ell < m$ векторов. А так как для определяемого в этих случаях вектора g

$$\sum_{j \in J_k} g_j A^j = 0$$

и при этом $g_{j_1} \neq 0$, то вектор A^{j_1} также выражался бы через упомянутые ℓ векторов. Таким образом, оказалось бы, что все векторы A^j, $j \in J_k$, выражались бы через ℓ векторов, что противоречит предположению о наличии среди них m линейно независимых.

Отличие приведенной схемы метода от описанной в [I] состоит в том, что здесь при реализации на k-ом шаге процесса случая в) или случая с) из множества J_k исключаются не все элементы j, для которых $x_j^{k+1} = 0$, а лишь один из них.

Необходимость указанной модификации вызвана следующим обстоятельством. В [I] метод описывается в предположении, которое гарантирует отсутствие ситуаций вырождения процесса: предполагается, что для любого вектора x, удовлетворяющего ограничениям задачи, в множестве векторов A^j, $j \in J(x)$, имеется m линейно независимых. При нарушении этого предположения исключение нескольких элементов из множества J_k может привести к такому множеству J_{k+1}, что среди векторов A^j, $j \in J_{k+1}$, не окажется m линейно независимых.

Приведенная схема метода не исключает возможности зацикливания процесса в ситуациях вырождения. Однако в практических расчетах зацикливание процесса здесь столь же маловероятно, как и в задачах линейного программирования. Для построения

теоретически безупречного процесса в описанную схему достаточно внести изменения, аналогичные разработанным для задач линейного программирования.

2°. С целью дальнейшей конкретизации алгоритма рассмотрим теперь детально задачу минимизации функции f на пересечении аффинного многообразия $L(J_\kappa)$ с областью G.

Ввиду того, что для рассматриваемой функции f выполняются условия

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \equiv 0, \quad 4 < j \leq n,$$

то, как отмечается в [I] (см. § 7), векторы

$$A^j, \ j \in P_\kappa = \{ j \in J_\kappa \mid j > 4 \}, \tag{13}$$

линейно независимы в течение всего процесса, если только это справедливо для начального множества J_1, т.е. если линейно независимы векторы (13) при $\kappa = 1$. Вопрос о нахождении начального множества J_1 с указанным свойством будет рассмотрен ниже. А сейчас будем считать, что процесс начинается именно с такого множества J_1.

Ввиду линейной независимости векторов (13), их число $|P_\kappa|$ не превосходит m и, следовательно, $|J_\kappa| \leq m+4$. С другой стороны, среди векторов A^j, $j \in J_\kappa$, имеется m линейно независимых и потому

$$m \leq |J_\kappa| \leq m+4.$$

В случае $|J_\kappa| = m$ аффинное многообразие $L(J_\kappa)$ состоит из единственной точки x^κ и задача минимизации функции f на $L(J_\kappa) \cap G$ тривиальна.

Далее, при $|J_\kappa| = m+1$ аффинное многообразие $L(J_\kappa)$ одномерно и задача минимизации функции f на $L(J_\kappa) \cap G$ сводится к минимизации функции одной переменной.

Не сложнее решается вопрос и при $|J_\kappa| = m+4$. В этом случае векторы (13) образуют базис в R^m, и, следовательно, система линейных уравнений

$$\sum_{j \in P_\kappa} x_j A^j = B - \sum_{j=1}^{4} \bar{x}_j A^j$$

разрешима при любых значениях $\bar{x}_j$, $1 \leq j \leq 4$. Это означает, что множество $L(J_\kappa) \cap G$ содержит точки x с произвольно большими координатами x_j, $1 \leq j \leq 4$. Для этих точек $f(x)$

будет принимать сколь угодно большие отрицательные значения. Таким образом, в этом случае функция f на $L(\mathcal{J}_\kappa)\cap G$ не ограничена снизу. Вектор g, определяющий направление луча (6), на котором функция f строго убывает, получаем, фиксируя некоторые положительные значения g_j, $1\le j\le 4$, и определяя остальные компоненты из условий:

$$\sum_{j\in} g_j A^j = -\sum_{j=1}^{4} g_j A^j, \tag{14}$$

$$g_j = 0 \ , \ j \in \mathcal{J}_\kappa .$$

Остается рассмотреть случаи $|\mathcal{J}_\kappa| = m+2$ и $|\mathcal{J}_\kappa| = m+3$. Покажем, как в этих случаях для минимизации функции f на $L(\mathcal{J}_\kappa)\cap G$ может быть использована техника двойственных задач (см. [1], § 4).

Так как для точек x из аффинного многообразия $L(\mathcal{J}_\kappa)$ выполняется

$$x_j = \overset{\circ}{0}, \ j \bar{\in} \mathcal{J}_\kappa ,$$

то задачу минимизации функций f на $L(\mathcal{J}_\kappa)\cap G$ можно рассматривать в подпространстве $\bar{R}$ переменных x_j, $j \in \mathcal{J}_\kappa$. Обозначим через $\bar{f}$ сужение функции f на $\bar{R}$, а через $\bar{L}$ и $\bar{G}$ соответственно $L(\mathcal{J}_\kappa)\cap\bar{R}$ и $G\cap\bar{R}$. Легко видеть, что аффинное многообразие $\bar{L}$ определяется системой уравнений

$$\sum_{j\in\mathcal{J}_\kappa} x_j A^j = B. \tag{15}$$

Для задачи минимизации функции $\bar{f}$ на $\bar{L}\cap\bar{G}$ рассмотрим двойственную задачу, которая в данном случае может быть сформулирована следующим образом:

Определить вектор $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, для которого минимум функции $\bar{f}$ на гиперплоскости

$$H(y) = \{x \in \bar{R} \mid \sum_{j\in\mathcal{J}_\kappa} (y, A^j)\, x_j = (y, B)\}$$

имеет максимальное значение.

Эта задача в рассматриваемом случае допускает явную формулировку через переменные y_i $(i=1,2,\ldots,m)$. Действительно, задача минимизации функции $\bar{f}$ на гиперплоскости $H(y)$ эквивалентна минимизации функции Лагранжа

$$F(x,\lambda) = \bar{f}(x) + \lambda\left((y,B) - \sum_{j\in \mathcal{J}_K}(y,A^j)x_j\right),$$

и в точке минимума имеем

$$\lambda(y,A^j) = \frac{\partial \bar{f}(x)}{\partial x_j}\,. \tag{16}$$

Но так как

$$\frac{\partial \bar{f}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \equiv 0,\ j\in P_K,$$

$$\frac{\partial \bar{f}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = -\frac{1}{x_j},\ 1\le j\le 4,$$

то из (16) получаем

$$\lambda(y,A^j) = 0\ ,\ \ j\in P_K,$$

$$\lambda(y,A^j) = -\frac{1}{x_j},\ \ 1\le j\le 4.$$

Отсюда следует, что $\lambda \neq 0$ и

$$x_j(y,A^j) = -\frac{1}{\lambda}\ ,\ 1\le j\le 4 \tag{17}$$

$$(y,A^j) = 0\ ,\ \ j\in P_K. \tag{18}$$

Теперь из уравнения гиперплоскости $H(y)$ легко определяется величина λ :

$$\lambda = -\frac{4}{(y,B)}\ , \tag{19}$$

а из (17) находим

$$x_j = \frac{(y,B)}{4(y,A^j)}\ ,\ 1\le j\le 4. \tag{20}$$

Если обозначить через $\varphi(y)$ значение минимума функции $\bar{f}$ на гиперплоскости $H(y)$, то для $\varphi(y)$ получаем выражение:

$$\varphi(y) = -\sum_{j=1}^{4} \ln\frac{(y,B)}{4(y,A^j)}\ .$$

Далее, на нормаль гиперплоскости $H(y)$ можно наложить дополнительное условие нормировк., без которого вектор y и величина λ определяются лишь с точностью до ненулевого сомножителя. Будем считать для определенности $\lambda > 0$. Тогда из

(17) и (19) получаем необходимые и достаточные условия достижимости минимума функции $\bar{f}$ на гиперплоскости $H(y)$:

$$(y, B) < 0, \tag{21}$$

$$(y, A^j) < 0, \quad 1 \leq j \leq 4. \tag{22}$$

Однако условие (21) ввиду того, что $L(\mathcal{J}_\kappa) \cap G \neq \varnothing$, следует из (22) и (18). Действительно, возьмем некоторую точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $L(\mathcal{J}_\kappa) \cap G$. Умножая равенства (18) и неравенства (22) на соответствующие x_j и складывая, получаем

$$0 > \sum_{j \in \mathcal{J}_\kappa} (y, A^j) x_j = (y, \sum_{j \in \mathcal{J}_\kappa} \overset{\circ}{x}_j A^j) = (y, B).$$

Любым из неравенств (22) можно воспользоваться для нормировки вектора y . Например, можно для некоторого j_1 , $1 \leq j_1 \leq 4$, положить

$$(y, A^{j_1}) = -1. \tag{23}$$

Таким образом, двойственная задача состоит в определении вектора $y \in R^m$, доставляющего максимум функции $\mathcal{Y}$ при условиях (18), (22), (23).

Несложно показать, что функция $\mathcal{Y}$ в области, определяемой условиями (21) и (22), квазивогнута.

Связь задачи минимизации функции $\bar{f}$ на $\bar{L} \cap \bar{G}$ с двойственной к ней задачей устанавливает следующее утверждение, вытекающее из результатов § 4 [1] (см. теорему 5):

если разрешима одна из этих задач, то разрешима и другая, при этом для решений выполняется соотношение (20);

если условия (18), (22), (23) двойственной задачи несовместимы, то существует луч $\Lambda \subset \bar{L} \cap G$.

Заметим, что условия (18) и (23) определяют в R^m аффинное многообразие размерности $m-(|\mathcal{J}_\kappa|-3)$. Следовательно, в случае $|\mathcal{J}_\kappa| = m+3$ вектор y в двойственной задаче определяется условиями (18), (23) однозначно, а в случае $|\mathcal{J}_\kappa| = m+2$ двойственная задача сводится к максимизации функции $\mathcal{Y}$ на некотором интервале.

Из сказанного следует, что для минимизации функции f на $L(\mathcal{J}_\kappa) \cap G$ в случае $|\mathcal{J}_\kappa| = m+2$ или $|\mathcal{J}_\kappa| = m+3$ целесообразно сначала решить сформулированную выше двойственную задачу,

после чего для определения точки минимума воспользоваться соотношениями (20) и (15). Если же оказалось, что условия двойственной задачи несовместны, то определяется луч $\Lambda \subset L(\mathcal{J}_\kappa) \cap G$. Как находить направляющий вектор такого луча, будет показано ниже.

3^0. Рассмотрим теперь вопросы построения вычислительной процедуры изложенного метода.

Наиболее трудоемкой частью одного шага процесса является анализ функции f на пересечении аффинного многообразия $L(\mathcal{J}_\kappa)$ с областью G . Для удобства описания аффинных многообразий $L(\mathcal{J}_\kappa)$ целесообразно иметь некоторое подмножество Q_κ множества $\mathcal{J}_\kappa$ такое, что $Q_\kappa \supset P_\kappa$ и векторы A^j , $j \in Q_\kappa$, образуют базис в R^m . Выделение такого множества Q_κ возможно, так как векторы A^j , $j \in P_\kappa$, линейно независимы и эту совокупность векторов можно дополнить до базиса, существование которого среди векторов A^j , $j \in \mathcal{J}_\kappa$, отмечалось в п. I^0.

Множество Q_κ будем считать некоторым образом упорядоченным: $Q_\kappa = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$.

Если не предполагать какой-либо специальной структуры векторов A^j , $j \in N$, то помимо множества Q_κ целесообразно также иметь матрицу B_κ^{-1} , обратную к матрице $B_\kappa = (A^{\alpha_1}, A^{\alpha_2}, \ldots, A^{\alpha_m})$. Через β_ℓ в дальнейшем будем обозначать ℓ-ю строку матрицы B_κ^{-1} .

Покажем, каким образом множество Q_κ и матрица B_κ^{-1} преобразуются при переходе от шага к шагу. Пусть на κ-ом шаге процесса реализуется случай а) схемы метода и в множество $\mathcal{J}_\kappa$ добавляется некоторый элемент j_0 . Используя B_κ^{-1} , получим решение системы

$$\sum_{j \in Q_\kappa} g_j A^j = A^{j_0}.$$

При этом по крайней мере один из коэффициентов g_j , $1 \le j \le 4$, отличен от нуля, так как в противном случае векторы A^j , $j \in P_{\kappa+1} = P_\kappa \cup \{j_0\}$, оказались бы линейно зависимыми. Заменяя соответствующий этому коэффициенту индекс j в множестве Q_κ элементом j_0 , получим множество $Q_{\kappa+1}$. Векторы A^j , $j \in Q_{\kappa+1}$, очевидно, при такой замене будут линейно независимыми. Матрица $B_{\kappa+1}^{-1}$ может быть получена из B_κ^{-1} посредством преобразований метода пополнения, так как матрицы B_κ и $B_{\kappa+1}$ отличаются лишь одним столбцом.

Пусть теперь на κ-ом шаге процесса реализуется один из случаев в) или с) и из множества $\mathcal{J}_\kappa$ исключается некоторый элемент $j_1 \in P_\kappa$. Так как среди векторов A^j, $j \in \mathcal{J}_{\kappa+1} = \mathcal{J}_\kappa \setminus \{j_1\}$, при этом должно остаться m линейно независимых, то должен существовать вектор A^{j_2}, $j_2 \in \mathcal{J}_\kappa \setminus Q_\kappa$, которым можно было бы заменить вектор A^{j_1} в базисе A^j, $j \in Q_\kappa$. Если j_1 находился в множестве Q_κ на ℓ-ом месте, то необходимым и достаточным условием возможности указанной замены является $(\beta_\ell, A^{j_2}) \neq 0$, где β_ℓ - ℓ-ая строка матрицы B_κ^{-1}. Таким образом, принимая в качестве j_2 какой-либо из $j \in \mathcal{J}_\kappa \setminus Q_\kappa$, для которого $(\beta_\ell, A^j) \neq 0$, мы можем положить $Q_{\kappa+1} = (Q_\kappa \setminus \{j_1\}) \cup \{j_2\}$. Матрицу $B_{\kappa+1}^{-1}$ получаем, как в первом случае, из B_κ^{-1} посредством преобразований метода пополнения.

Как определяется начальное множество Q_1 и матрица B_1^{-1}, будет показано ниже.

Предполагая известными на κ-ом шаге процесса указанное множество $Q_\kappa \subset \mathcal{J}_\kappa$ и матрицу B_κ^{-1}, рассмотрим теперь вопрос об определении точки минимума $\bar{x}^\kappa$ функции f на $L(\mathcal{J}_\kappa) \cap G$, если минимум достигается, и луча $\Lambda \subset L(\mathcal{J}_\kappa) \cap G$ - в противном случае. Вычислительная процедура этой части алгоритма строится различно в зависимости от числа элементов в множестве $\mathcal{J}_\kappa$.

Как уже отмечалось, вопрос решается просто при $|\mathcal{J}_\kappa| = m$ и $|\mathcal{J}_\kappa| = m+4$. В первом случае $L(\mathcal{J}_\kappa)$ состоит из единственной точки x^κ, а во втором - функция f не ограничена снизу на $L(\mathcal{J}_\kappa) \cap G$ и направляющий вектор g луча $\Lambda \subset L(\mathcal{J}_\kappa) \cap G$ определяется из условий (I4) при некоторых фиксированных $g_j > 0$, $1 \leq j \leq 4$. Заметим, что в последнем случае $P_\kappa = Q_\kappa'$ и для получения решения системы (I4) можно воспользоваться матрицей B_κ^{-1}.

Рассмотрим теперь остальные случаи.

I) $|\mathcal{J}_\kappa| = m+1$. В этом случае $\mathcal{J}_\kappa = Q_\kappa \cup \{j_0\}$, $1 \leq j_0 \leq 4$. Используя матрицу B_κ^{-1}, определим решение системы

$$\sum_{j \in Q_\kappa} h_j A^j = -A^{j_0}$$

и положим $h_{j_0} = 1$ и $h_j = 0$, $j \bar{\in} \mathcal{J}_\kappa$. Ясно, что в рассматриваемом случае аффинное многообразие $L(\mathcal{J}_\kappa)$ является множеством векторов вида $x(t) = x^\kappa + th$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

Если $h_j \geq 0$, $j \in \mathcal{J}_\kappa \setminus Q_\kappa$, то $x(t) \in G$ при $t \geq 0$ и вектор h является направляющим вектором луча $\Lambda \subset L(\mathcal{J}_\kappa) \cap G$.

Если же среди $h_j, j\in \mathcal{J}_\kappa \setminus P_\kappa$, имеются отрицательные, то для точек $t\in(t_1,t_2)$, где

$$t_1=\max_{\substack{h_j>0,\\ j\in \mathcal{J}_\kappa \setminus P_\kappa}} -\frac{x_j^\kappa}{h_j}\ , \qquad t_2=\min_{\substack{h_j<0,\\ j\in \mathcal{J}_\kappa \setminus P_\kappa}} -\frac{x_j^\kappa}{h_j}\ ,$$

будет $x(t)\in G$, причем

$$\lim_{t\to t_1+0} f(x(t))=\lim_{t\to t_2-0} f(x(t))=+\infty .$$

Определяя точку минимума t_0 функции $f(x(t))$ на интервале (t_1, t_2), получаем $\bar{x}^\kappa = x^\kappa + t_0 h$.

2) $|\mathcal{J}_\kappa|=m+2$. В этом случае $Q=P_\kappa \cup \{j_1,j_2\}, j_1,j_2\leq 4$. Пусть для определенности $j_1=3$, $j_2=4$ и они находятся в множестве Q_κ на первом и втором месте соответственно.

Перейдем к двойственной задаче, как это описано в п.2[0], и рассмотрим систему линейных уравнений, определяемую условиями (18), (23). Общим решением этой системы является

$$y(t)=-\beta_1-t\beta_2,\ t\in(-\infty,+\infty),$$

где $\beta_i\ (i=1,2)$– i -я строка матрицы B_κ^{-1} . Поэтому условия (22) можно переписать в виде

$$-(\beta_1,A^j)-t(\beta_2,A^j)<0,\ 1\leq j\leq 4. \qquad (24)$$

Далее, так как

$$(\beta_1,A^3)=1,\quad (\beta_2,A^3)=0,$$

$$(\beta_1,A^4)=0,\quad (\beta_2,A^4)=1,$$

то из (24) при $j=4$ следует $t>0$, а при $j=3$ условие (24) выполняется при любом вещественном t .

Таким образом, двойственная задача в данном случае состоит в максимизации функции $\mathcal{Y}(y(t))$ на множестве положительных t , удовлетворяющих условиям

$$(\beta_1,A^j)+t(\beta_2,A)>0\ ,\ j=1,2. \qquad (25)$$

Заметим, что для каждого из этих неравенств множество положительных значений t , при которых это неравенство выполняется, либо пусто, либо образует некоторый открытый интервал вида $(0,t_j)$

или $(t_2, +\infty)$. Поэтому возможны три случая:

i) какое-либо из неравенств (25) выполняется ни при каком $t > 0$;

ii) одно из неравенств (25) выполняется для $t \in (0, t_1)$, а другое – для $t \in (t_2, +\infty)$ и $t_2 \geq t_1$;

iii) оба неравенства (25) выполняются для $t \in (t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$.

В случае (iii), как нетрудно проверить, будет

$$\lim_{t \to t_1 + 0} \varphi(y(t)) = \lim_{t \to t_2 - 0} \varphi(y(t)) = -\infty .$$

Определив точку максимума t_* функции $\varphi(y(t))$ на интервале (t_1, t_2), используем для нахождения точки $\bar{x}^{\kappa}$ соотношения (20) и (15):

$$\bar{x}_j^{\kappa} = \frac{(y(t_*), B)}{\psi(y(t_*), A^j)} \quad , \; j \in \mathcal{J}_{\kappa} \setminus Q_{\kappa},$$

$$\sum_{j \in Q_{\kappa}} \bar{x}_j^{\kappa} A^j = B - \sum_{j \in \mathcal{J}_{\kappa} \setminus Q_{\kappa}} \bar{x}_j^{\kappa} A^j . \tag{26}$$

При этом решение последней системы определяется с помощью матрицы B_{κ}^{-1}.

Если имеет место один из случаев (i) или (ii), то определяется луч $\Lambda \subset L(\mathcal{J}_{\kappa}) \cap G$. Направляющий вектор $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ такого луча должен удовлетворять условиям:

$$g_j = 0 \, , \; j \notin \mathcal{J}_{\kappa} , \quad \sum_{j \in \mathcal{J}_{\kappa}} g_j A^j = 0, \tag{27}$$

$$g_j \geq 0 \, , \; 1 \leq j \leq 4 , \quad \sum_{j=1}^{4} g_j > 0. \tag{28}$$

Для нахождения требуемого вектора g достаточно указать такие $g_j \geq 0, j \in \mathcal{J}_{\kappa} \setminus Q_{\kappa}$, что $\sum_{j \in \mathcal{J}_{\kappa} \setminus Q_{\kappa}} g_j > 0$ и для любого решения $y \in R^m$ системы уравнений и неравенств

$$\begin{aligned} (y, A^j) &= 0 \quad , \; j \in P_{\kappa} , \\ (y, A^j) &\leq 0 \quad , \; j \in Q_{\kappa} \setminus P_{\kappa} \end{aligned} \tag{29}$$

выполняется

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_{\kappa} \setminus Q_{\kappa}} (y, A^j)\, g_j \geq 0. \tag{30}$$

Действительно, выполнение условия (30) для любого решения системы (29) обеспечивает неотрицательность компонент $g_j, j \in Q_{\kappa} \setminus P_{\kappa}$, в решении системы уравнений

$$\sum_{j\in Q_\kappa} g_j A^j = -\sum_{j\in \mathcal{J}_\kappa \setminus Q_\kappa} g_j A^j. \qquad (31)$$

Таким образом, если зафиксировать такие, как указано выше, $g_j,\ j\in \mathcal{J}_\kappa \setminus Q_\kappa$, и, используя матрицу B_κ^{-1}, решить систему (31), то получаемый вектор g будет удовлетворять всем условиям (27), (28).

Легко видеть, что общим решением системы (28) является

$$y = -\delta_1\beta_1 - \delta_2\beta_2,\quad \delta_1,\delta_2 \geq 0.$$

Поэтому условие (30) принимает вид:

$$\delta_1 \sum_{j\in \mathcal{J}_\kappa \setminus Q_\kappa} (\beta_1, A^j) g_j + \delta_2 \sum_{j\in \mathcal{J}_\kappa \setminus Q} (\beta_2, A^j) g_j \leq 0,\ \delta_1,\delta_2 \geq 0,$$

что эквивалентно

$$\sum_{j\in \mathcal{J}_\kappa \setminus Q_\kappa} (\beta_i, A^j) g_j \leq 0,\quad i = 1,2. \qquad (32)$$

Предположим теперь, что реализуется случай (i), т.е. какое-либо из неравенств (25) не выполняется ни при каком $t > 0$. Пусть для определенности это имеет место для $j = 1$. Тогда

$$(\beta_i, A^1) \leq 0,\quad i = 1,2,$$

и условию (32) удовлетворяют, например, $g_1 = 1$, $g_2 = 0$.

Предположим теперь, что реализуется случай (ii), т.е. одно из неравенств (25), для определенности при $j = 1$, выполняется для $t\in(0,t_1)$, а другое, – для $t\in(t_2,+\infty)$ и $t_2 > t_1$. Ясно, что при этом

$$(\beta_1, A^1) > 0,\ (\beta_2, A^1) < 0,\ t_1 = -\frac{(\beta_1, A^1)}{(\beta_2, A^1)},$$

$$(\beta_1, A^2) < 0,\ (\beta_2, A^2) > 0,\ t_2 = -\frac{(\beta_1, A^1)}{(\beta_2, A^2)}.$$

Следовательно,

$$-\frac{(\beta_1, A^1)}{(\beta_2, A^1)} < -\frac{(\beta_1, A^2)}{(\beta_2, A^2)},$$

или

$$(\beta_1, A^1)(\beta_2, A^2) - (\beta_1, A^2)(\beta_2, A^1) < 0. \qquad (33)$$

Отсюда следует, что неравенства (32) удовлетворяются при $g_1 = (\beta_2, A^2)$, $g_2 = -(\beta_2, A^1)$. Действительно, при $i = 1$ неравенство (32) выполняется, как строгое, ввиду (33), а при $i = 2$ имеем

$$(\beta_2, A^1) g_1 + (\beta_2, A^2) g_2 = (\beta_2, A^1)(\beta_2, A^2) - (\beta_2, A^2)(\beta_2, A^1) = 0.$$

3) $|J_K| = m + 3$. В этом случае $Q_K = P_K \cup \{j_1\}, j_1 \leq 4$. Для определенности будем считать, что j_1 находится в Q_K на первом месте и $j_1 = 1$.

Перейдем к двойственной задаче и рассмотрим систему уравнений, определяемую условиями (18), (23). В отличие от предшествующего случая, эта система теперь имеет единственное решение, и таковым является $y = -\beta_1$. Поэтому условия (22) имеют вид

$$-(\beta_1, A^j) < 0, \quad 1 \leq j \leq 4. \tag{34}$$

Так как $(\beta_1, A^1) = 1$, то для $j = 1$ это условие выполнено. Если оно выполняется и для $j = 2, 3, 4$, т.е. для $j \in J_K \setminus Q_K$, то координаты точки $\bar{x}_K$, доставляющей минимум функции f на $L(J_K) \cap G$, определяются из соотношений (21)

$$\bar{x}_j^K = \frac{(\beta_1, B)}{4(\beta_1, A^j)}, \quad j \in J_K \setminus Q_K,$$

и системы уравнений (26). Решение последней получаем, используя матрицу B_K^{-1}.

Если какое-либо из неравенств (34) не выполняется, то для определения направляющего вектора g луча $\Lambda \subset L(J_K) \cap G$ используются те же соображения, что и в предшествующем случае. При этом общим решением системы (29) является $y = -\delta_1 \beta_1$, $\delta_1 \geq 0$, и условие (30) эквивалентно неравенству

$$\sum_{j \in J_K \setminus Q_K} (\beta_1, A^j) g_j \leq 0. \tag{35}$$

Поэтому если для некоторого $j_0 \in J_K \setminus Q_K$ условие (34) не выполняется, то неравенству (35) удовлетворяют

$$g_{j_0} = 1, \; g_j = 0, \; j \in J_K \setminus Q_K, j \neq j_0.$$

Компоненты $g_j, j \in Q_K$, определяем, используя матрицу B_K^{-1} из системы (31).

4°. В заключение рассмотрим вопрос об определении начального вектора x^1, множеств J_1, Q_1 и матрицы B_1^{-1}. Для этой цели рассмотрим следующую вспомогательную задачу линейного программиро-

вания:

максимизировать величину x_0 при условиях

$$\sum_{j=0}^{n} x_j A^j = B, \qquad (36)$$

$$x_j \geq 0, \; j = 0, 1, \ldots, n, \qquad (37)$$

где $A^0 = \sum_{j=1}^{4} A^j$. [9]

При решении этой задачи методом последовательного улучшения [2] (модифицированным симплекс-методом [3]) может реализоваться один из следующих трех случаев:

I) ограничения (36), (37) сформулированной задачи несовместны;

2) ограничения (36), (37) совместны при всех достаточно больших значениях x_0 ;

3) сформулированная вспомогательная задача разрешима.

Легко видеть, что в первом случае ограничения (2) - (4) исходной задачи также несовместны, а во втором случае функция (I) на множестве векторов $x \in R^m$, удовлетворяющих условиям (2) - (4), не ограничена снизу.

Предположим, что имеет место третий случай. При этом наряду с величинами $\bar{x}_j \; (j = 0, 1, \ldots, n)$, представляющими решение вспомогательной задачи, будут получены множество Q_0 такое, что векторы $A^j, j \in Q_0$, линейно независимы и $Q_0 \supset \{j \,|\, \bar{x}_j > 0\}$, а также матрица B_0^{-1} , обратная к матрице B_0 векторов A^j , $j \in Q_0$.

Если $\bar{x}_0 = 0$, то это означает, что ограничения (2)-(4) исходной задачи несовместны.

Пусть $\bar{x}_0 = 0$. Тогда в качестве x^1 можно принять вектор с компонентами

$$x_j^1 = \bar{x}_j \quad , \quad 4 < j \leq n,$$

$$x_j^1 = \bar{x}_j + \bar{x}_0, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

Что касается множества Q_1 и матрицы B_1^{-1} , то они легко получаются из Q_0 и B_0^{-1} следующим образом.

В рассматриваемом случае $0 \in Q$, т.е. вектор A^0 является одним из столбцов - для определенности первым столбцом - матрицы B_0 . Найдется такой вектор A^{j_1} , $1 \leq j_1 \leq 4$, $j_1 \bar{\in} Q_0$, для которого $(\beta_1, A^{j_1}) \neq 0$, где β_1 - первая строка матрицы B_0^{-1}, ибо в противном случае векторы A^j , $j \in Q_0$, были бы линейно зависимыми. Заменяя в множестве Q_0 элемент 0 элементом

j_1, получаем множество Q_1. Ясно, что при этом векторы A^j, $j \in Q_1$, будут линейно независимыми. Матрица B_1^{-1} получается из B_0^{-1} путем соответствующих преобразований метода пополнения.

Наконец, в качестве множества J_1 принимаем $Q_1 \cup \{1,2,3,4\}$.

Литература

1. Г.Ш.Рубинштейн, В.И.Шмырёв. Методы минимизации квазивыпуклой функции на выпуклом многограннике. Настоящий сборник. стр. 82-117.
2. Л.В.Канторович. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов, Изд. АН СССР, М., 1960.
3. Дж. Данциг. Линейное программирование, его применения и обобщения, "Прогресс", М., 1966.

Поступила в редакцию
12.IV. 1971 г.