1973 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск IO(27)

УДК 519.8

К НАХОЖДЕНИЮ ТОЧКИ МНОГОГРАННИКА, БЛИЖАЙШЕЙ К НАЧАЛУ КООРДИНАТ

А.Б.Певный

При разыскании направления спуска в минимаксных задачах [I] требуется найти

$$\min_{\|g\|=1} \max_{i\in[1:q]} (g_i, g), \tag{I}$$

где g_i – некоторые фиксированные векторы из E_n. Пусть – многогранник, натянутый на векторы g_i, $i\in[1:q]$, а z^* – точка из M, ближайшая к началу координат. Тогда (см. [I]), если $z^*\neq 0$, то вектор $g^*=-z^*/\|z^*\|$ является решением задачи (I). Поэтому для нахождения направления спуска g^* достаточно найти точку многогранника M, ближайшую к началу координат.

Последняя задача эквивалентна следующей: минимизировать

$$\Big\|\sum_{i=1}^{q} x_i g_i\Big\|^2=(\mathcal{D}x, x) \tag{2}$$

при ограничениях

$$x_i\geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{q} x_i = 1. \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{D}$ – матрица размера $q\times q$ с элементами $d_{ij}=(g_i, g_j)$. В силу условий Куна-Таккера (см. [2]) вектор x является решением задачи (2)-(3) тогда и только тогда, когда найдутся вектор v и число λ такие, что

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}x - v + J\lambda = 0, \\ J'x = 1, \\ x \geq 0,\ v \geq 0,\ x'v = 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Здесь J - вектор размерности q, все компоненты которого равны единице, а штрих обозначает транспонирование. Поэтому для решения задачи (2)-(3) достаточно найти хотя бы одно решение системы (4).

Для нахождения x, v, λ, удовлетворяющих (4), в [2-4] предложено минимизировать

$$\sum_{i=1}^{q} u_i \qquad (5)$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}x - v + J\lambda + Eu = 0, \\ J'x = 1, \\ x \geq 0,\ v \geq 0,\ x'v = 0,\ u \geq 0, \end{array}\right\} \qquad (6)$$

где $E = \| \Delta_i \delta_{ij} \|$ - диагональная матрица с диагональными элементами

$$\Delta_i = \begin{cases} -\mathrm{I}, & \text{если } d_{i1} \geq 0 \ , \\ +\mathrm{I}, & \text{если } d_{i1} < 0 \ . \end{cases}$$

В [2-4] показано, как для решения задачи (5)-(6) применить симплекс-метод с учетом ограничения $x'v = 0$, причем исходным базисным решением системы (6) является

$$x_1 = 1,\ u_i = |d_{i1}|,\ i \in [1:q]$$

(остальные переменные равны нулю).

Вместо системы (6) можно построить систему, в которой будет только одна искусственная переменная.

Рассмотрим задачу:

$$u \to min \qquad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}x - v + J\lambda - e_1 u = 0, \\ J'x = 1, \\ x \geq 0,\ v \geq 0,\ x'v = 0,\ u \geq 0, \end{array}\right\} \qquad (8)$$

где q - мерный вектор $e_1 = (\mathrm{I}, 0, 0, \ldots, 0)$, а u - скаляр.

Покажем, как решать эту задачу. Пусть $d_{i_0 1}$ – наименьший элемент в первом столбце матрицы $\mathcal{D}$:

$$d_{i_0 1} \leqslant d_{i1}\ , \quad i \in [1:q].$$

Если $i_0 = 1$, то нетрудно проверить, что g_1 – ближайшая точка многогранника M и тем самым исходная задача решена. Если $i_0 > 1$, то для системы (8) можно указать следующее базисное решение:

$$u = d_{11}\,,\ v_i = d_{i1} - d_{i_0 1}\,,\ i \in [2:q],\ i \neq i_0\,,$$

$$\lambda = -d_{i_0 1}\,,\ x_1 = 1$$

(остальные переменные равны нулю).

Как обычно, представляем λ в виде $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$. Если $d_{i_0 1} \geqslant 0$, то в базис вводим $\lambda_2 = d_{i_0 1}$, если же $d_{i_0 1} < 0$, то в базис вводим $\lambda_1 = -d_{i_0 1}$

На примере покажем, как построить матрицу, обратную к базисной матрице.

Пусть $q = 6$, $i_0 = 4$, $d_{i_0 1} \geqslant 0$. Базисная матрица Q составляется из столбцов матрицы системы (8), соответствующих базисным переменным:

u	v_2	v_3	λ_2	v_5	v_6	x_1
-I	0	0	-I	0	0	d_{11}
0	-I	0	-I	0	0	d_{21}
0	0	-I	-I	0	0	d_{31}
0	0	0	-I	0	0	d_{41}
0	0	0	-I	-I	0	d_{51}
0	0	0	-I	0	-I	d_{61}
0	0	0	0	0	0	I

Матрица $B = Q^{-1}$ имеет вид

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d_{11}-d_{41} \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & d_{21}-d_{41} \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & d_{31}-d_{41} \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d_{41} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & d_{51}-d_{41} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & d_{61}-d_{41} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad (9)$$

Если $d_{i_0 1} < 0$, то матрица B та же самая; только у элементов $B_{i_0 i_0}$ и $B_{i_0, q+1}$ меняется знак.

Имея исходное базисное решение и обратную матрицу, можно применить модифицированный симплекс-метод для решения задачи (7)-(8). При этом если на некоторой итерации x_i принадлежит базису, то v_i нельзя вводить в базис, и наоборот. Это условие накладывается для того, чтобы не нарушилось ограничение $x'v = 0$. В [2,4] показано, что на последней итерации симплекс-метода получается $u = 0$. Тем самым получаем решение системы (4) и решение исходной задачи (2)-(3).

Преимущество задачи (7)-(8) перед задачей (5)-(6) состоит в том, что в (7)-(8) только одна искусственная переменная, в (5)-(6) - q искусственных переменных u_i . При решении задачи (7)-(8) достаточно исключить искусственную переменную u из базиса, и задача будет решена. Поэтому при решении задачи (7)-(8) требуется, как правило, меньше симплексных итераций, чем при решении (5)-(6).

Так, в примере, приведенном в [3] ($g_1=(0,2)$, $g_2=(2,2)$, $g_3=(2,0)$), для решения задачи (5)-(6) требуется три итерации, а для решения (7)-(8) - одна итерация.

В задаче (7)-(8) после того, как искусственная переменная введена в исходный базис, не нужно предусматривать возможность ее вторичного введения в базис, что упрощает программирование алгоритма.

Обычно в симплекс-методе к матрице B приписывается нулевая строка, которая используется для вычисления симплексных оценок. Нетрудно видеть, что в задаче (7)-(8) эта строка совпадает с первой строкой матрицы B , поэтому нулевую строку

приписывать не нужно.

Кроме того, обычно приписывается столбец в котором хранятся значения базисных переменных. В задаче (7)-(8) этот столбец будет совпадать с последним столбцом матрицы B, поэтому дополнительный столбец приписывать также не нужно.

На всех итерациях первый столбец B будет таким же, как в матрице (9), поэтому хранить его нет необходимости.

Теперь можно оценить объем памяти, необходимый для решения задачи (I). В основном память тратится на хранение векторов g_i (qn ячеек), матрицы $\mathcal{D}$ (q^2 ячеек и можно учесть симметричность $\mathcal{D}$) и матрицы B ($q(q+1)$ ячеек, так как первый столбец хранить не надо).

Литература

I. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., МАЛОЗЕМОВ В.Н. К теории нелинейных минимаксных задач.- УМН, 1971, т.26, № 3, с. 53-104.

2. ХЕДЛИ Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., "Мир", 1967.

3. ВОЙТОН Е.Ф., ШУШКОВ В.И. О поиске направления наискорейшего спуска в некоторых минимаксных задачах.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, № 4, с. 1013-1021.

4. КЮНЦИ Г.П., КРЕЛЛЕ В. Нелинейное программирование. М., "Сов. радио", 1965.

Поступила в ред.-изд. отд.
6. XII. 1972 г.