УДК 519.8

ОДИН КОНЕЧНЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА В МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧАХ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ.

Л.В. Васильев, Б.Ф. Митчелл

Ниже будут использоваться следующие обозначения:

E_n – n -мерное евклидово пространство;

$[1:m]$ – множество целых чисел от 1 до m ;

$a \cdot b$ – скалярное произведение векторов a и b ;

$\| P \| = \sqrt{P \cdot P}$;

$\bar{H} = \{ \bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_m \}$, $\bar{a}_i \in E_{n-1}$, $i \in [1:m]$, $m \le n$;

$H = \{ a_1, a_2, \cdots, a_m \}$, $a_i = (1; \bar{a}_i)$, $i \in [1:m]$;

$I_S = \{ i \mid a_i \in S \}$, где $S \subseteq H$ не пустое;

$$L(S) = \{ P \mid P = \sum_{i \in I_S} t_i a_i , \sum_{i \in I_S} t_i = 1 \} ;$$

$$co(S) = \{ P \mid P \in L(S), t_i \geq 0, i \in I_S \} .$$

$$\overset{\circ}{co}(S) = \{ P \mid P \in co(S), t_i > 0, i \in I_S \} .$$

Будем писать:

$P \perp L(S)$, если $P \in L(S)$, и для всех $P' \in L(S)$ выполняется $P \cdot P' = P \cdot P$;

$P \perp co(S)$, если $P \in co(S)$, и $P \perp L(S)$;

$P \perp \mathring{co}(S)$, если $P \in \mathring{co}(S)$, и $P \perp co(S)$.

I. Постановка задачи

При численном решении минимаксных задач часто используется направление наискорейшего спуска и близкие к нему направления [I], Для определения этих направлений необходимо уметь находить точки некоторых выпуклых оболочек, ближайшие к началу координат. В настоящей работе предлагается конечный метод решения поставленной задачи, который в ряде случаев оказывается более эффективным, чем рассмотренные в [2,3] методы.

Задача I. Найти вектор $\bar{P}^* \in E_{n-1}$, такой что

$$\|\bar{P}^*\| = \min_{\bar{P} \in co(\bar{H})} \|\bar{P}\| .$$

Задача 2. Найти вектор $P^* \in E_n$, такой что

$$\|P^*\| = \min_{P \in co(H)} \|P\| .$$

Задача 3. Найти вектор $Z^* \in E_n$, такой что

$$\|Z^*\| = \min \|Z\| ,$$

при ограничениях $Z \cdot a_i \geq 1$, $i \in [1:m]$.

Пусть задача 2 решена и $P^* \in E_n$ есть её решение. Очевидно, P^* имеет вид $(1;\bar{P}^*)$, где $\bar{P}^* \in E_{n-1}$. Покажем, что $\bar{P}^*$ есть решение задачи I.

Так как P^* есть решение задачи 2, то $P^* \cdot P^* \leq P \cdot P$ для $P \in co(H)$ или $(1;\bar{P}^*) \cdot (1;\bar{P}^*) \leq (1;\bar{P}) \cdot (1;\bar{P})$

для $\bar{P} \in co(\bar{H})$.

Отсюда следует, что $\bar{P}^* \cdot \bar{P}^* \leq \bar{P} \cdot \bar{P}$, $\bar{P} \in co(\bar{H})$.

Значит, $\bar{P}^*$ есть решение задачи I.

Ниже будет показано, что решив задачу 2, мы фактически решим и задачу 3. В силу указанного, всюду в дальнейшем будем иметь дело только с задачей 2.

2. Вспомогательные леммы и теоремы.

ТЕОРЕМА I. Векторы $a_i, i \in I_H$, линейно-независимы в том и только том случае, если

$$\bar{a}_i \notin L(\bar{H} \setminus \bar{a}_i), \quad i \in I_H .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ.

Пусть $\bar{a}_{i_0} = \sum\limits_{i \in I_S} t_i \bar{a}_i$, $\sum\limits_{i \in I_S} t_i = 1$, где $S = \{H \setminus a_{i_0}\}$.

Следовательно, $a_{i_0} = \sum\limits_{i \in I_S} t_i a_i$, то есть векторы $a_i, i \in I_H$ линейно-зависимы.

ДОСТАТОЧНОСТЬ.

Пусть $0 = \sum\limits_{i \in I_H} t'_i a_i$ и $i_0 \in I_H$, $t'_{i_0} \neq 0$.

Так как первые координаты векторов $a_i, i \in I_H$ равны 1, то $\sum\limits_{i \in I_H} t'_i = 0$. Отсюда $t'_{i_0} = -\sum\limits_{i \in I_S} t'_i$.

Тогда $a_{i_0} = \sum\limits_{i \in I_S} t_i a_i$, $\sum\limits_{i \in I_S} t_i = 1$, где $t_i = \dfrac{t'_i}{-t'_{i_0}}$,

а значит, и $\bar{a}_{i_0} = \sum\limits_{i \in I_S} t_i \bar{a}_i$, $\sum\limits_{i \in I_S} t_i = 1$,

т. е. $\bar{a}_{i_0} \in L(\bar{H} \setminus \bar{a}_{i_0})$. Теорема доказана.

ЛЕММА 1. П у с т ь $P, P' \in E_n$, $P' \cdot P \geqslant P' \cdot P'$, и $P \neq P'$. Т о г д а $P \cdot P > P' \cdot P'$.

ЛЕММА 2. П у с т ь $P \in L(S)$, $P' \perp L(S)$, $P \neq P'$, и $P'' = \alpha P' + (1-\alpha) P$, $\alpha \in (0,1]$. Т о г д а $P \cdot P > P'' \cdot P''$.

ЛЕММА 3. П у с т ь $S \subset H$, $a_{i_0} \in H \setminus S$, $S' = \{S, a_{i_0}\}$,

$$P = \sum_{i \in I_S} t_i a_i, \; P \perp L(S), \; P' = \sum_{i \in I_{S'}} t'_i a_i, \; P' \perp L(S'),$$

$$P \cdot P > P \cdot a_{i_0}. \tag{1}$$

Т о г д а $t'_{i_0} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $P \neq P'$, так как в противном случае будет $P \cdot P = P \cdot a_{i_0}$, что противоречит (1). Так как $P' \perp L(S')$, а $P \in L(S')$, то

$$P \cdot P > P' \cdot P' \tag{2}$$

Пусть $t'_{i_0} \leqslant 0$. Используя (1) и то, что $P \perp L(S)$, можно показать, что $P \cdot P' \geqslant P \cdot P$.
Тогда в силу леммы 1 будет $P \cdot P < P' \cdot P'$, что противоречит (2). Следовательно, $t'_{i_0} > 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. П у с т ь в ы п о л н е н ы у с л о в и я л е м м ы 3, $P \in \mathring{co}(S)$, и

$P'' = \alpha_0 P' + (1-\alpha_0) P$, г д е

$$\alpha_0 = \begin{cases} 1 & , \text{ если } P' \in co(S'), \\ \min\limits_{\{i \mid t'_i < 0\}} \dfrac{t_i}{t_i - t'_i} & , \text{ если } P' \notin co(S'). \end{cases}$$

Тогда

$$P''\cdot P'' < P\cdot P, \tag{3}$$

$$P'' \in co(S'). \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\alpha_0 > 0$, значит, $P'' \neq P$, и (3) по лемме 2 будет выполнено.

Если $P' \in co(S')$, то (4) уже выполнено.

Пусть $P' \notin co(S')$. Имеем

$$P'' = \alpha_0 P' + (1-\alpha_0)P = \sum_{i\in I_{S'}} t''_i a_i \text{ , где}$$

$$t''_i = \alpha_0 t'_i + (1-\alpha_0)t_i \ , \ i \in I_S \, ,$$

$$t''_{i_0} = \alpha_0 t'_{i_0} \, .$$

Для $i \in I_{S'}$, таких что $t'_i \geqslant 0$, очевидно, будет $t''_i > 0$.

Из леммы 3 следует, что $t'_{i_0} > 0$, а значит, $t''_{i_0} > 0$.

Для $i \in I_{S'}$, таких что $t'_i < 0$, будет

$$t''_i = t_i \left(1 - \alpha_0 \frac{t_i - t'_i}{t_i}\right) \geqslant 0 \, ,$$

так как $\alpha_0 \dfrac{t_i - t'_i}{t_i} \leqslant 1$, в силу определения α_0.

Таким образом, $t''_i \geqslant 0$ для всех $i \in I_{S'}$, следовательно, $P'' \in co(S')$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $S \subseteq H$, $P \in \mathring{co}(S)$, $P' \perp L(S)$, $P' \notin co(S)$, $P'' = \alpha_0 P' + (1-\alpha_0)P$, где

$$\alpha_0 = \min_{\{i \mid t'_i < 0\}} \frac{t_i}{t_i - t'_i} \, .$$

Тогда $P''\cdot P'' < P\cdot P$, и $P'' \in co(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 5 почти аналогично доказательству леммы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, существует $S'' \subset S$, $S'' \neq S$, такое что $P'' \in \mathring{co}(S'')$.

ЛЕММА 6. Пусть $P^* \in E_n$, и

$$P^* \cdot a_i \geq P^* \cdot P^*, \quad i \in [1:m]. \qquad (5)$$

Тогда для $P \in co(H)$, $P \neq P^*$ будет

$$P \cdot P > P^* \cdot P^*.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если найден вектор P^*, $P^* \in co(H)$, и выполнены неравенства (5), то P^* есть решение задачи 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть вектор P^* есть решение задачи 2, тогда вектор Z^*,

$$Z^* = \frac{P^*}{\| P^* \|^2}$$ есть решение задачи 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор P^*,

$$P^* = \sum_{i=1}^{m} t_i a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} t_i = 1, \quad t_i \geq 0, \; i \in [1:m] \qquad (6)$$

есть решение задачи 2. Очевидно, $\| P^* \| \geq 1$, тогда

$$P^* \cdot a_i \geq P^* \cdot P^*, \quad i \in [1:m],$$

или $$\frac{P^*}{\| P^* \|^2} \cdot a_i \geq 1, \quad i \in [1:m].$$

А значит, $a_i \cdot Z^* \geq 1$, $i \in [1:m]$.

Пусть вектор Z такой, что $a_i \cdot Z \geq 1$, $i \in [1:m]$.

Покажем, что $\| Z \| \geq \| Z^* \|$. Действительно,

$$\| Z \|^2 = \| Z - Z^* \|^2 + 2(Z - Z^*) \cdot Z^* + \| Z^* \|^2 \geq$$
$$\geq 2(Z - Z^*) \cdot Z^* + \| Z^* \|^2.$$

Используя (6), можно показать, что $(Z - Z^*) \cdot Z^* \geq 0$. Откуда следует, что $\| Z \| \geq \| Z^* \|$. Теорема доказана.

ЛЕММА 7. Если векторы $a_i, i \in I_s$, линейно-независимы, то квадратичная форма $\left(\sum_{i \in I_s} t_i a_i\right) \cdot \left(\sum_{j \in I_s} t_j a_j\right)$ положительно определена.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для матрицы $\{(a_i \cdot a_j)\}$ существует обратная.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $t_i, i \in I_s$, удовлетворяют системе уравнений:

$$\sum_{i \in I_s} t_i a_i \cdot a_j = 1, \quad j \in I_s,$$

то $\sum_{i \in I_s} t_i > 0$

3. Метод решения задачи 2

За начальное приближение принимаем вектор

$$Q_0 = \sum_{i \in I_H} \frac{1}{m} a_i .$$

Пусть вектор $Q_K = \sum_{i \in I_H} q_{iK} a_i$ - приближение, полученное на K - м шаге.

Опишем нахождение $(K+1)$ -го приближения.

Пусть $S_K = \{ a_i \mid i \in I_H,\ q_{iK} > 0 \}$

и $P_K = \sum_{i \in I_{S_K}} t_{iK} a_i$, $P_K \perp L(S_K)$.

Если $P_K \notin co(S_K)$, то положим $Q_{K+1} = \alpha_K P_K + (1 - \alpha_K) Q_K$,

где $\alpha_K = \min\limits_{\{i|t_{iK}<0\}} \dfrac{q_{iK}}{q_{iK}-t_{iK}}$. (7)

По лемме 5 $Q_{K+1} \in co(S_K)$, и

$$\| Q_{K+1} \| < \| Q_K \| . \qquad (8)$$

Если $P_K \in co(S_K)$ и для него выполняются неравенства

$$P_K \cdot P_K \leq P_K \cdot a_i , \; i \in I_H \setminus I_{S_K}, \qquad (9)$$

то вектор $Q_{K+1}=P_K$, в силу замечания к лемме 6, есть решение задачи 2, если же существуют $i \in I_H \setminus I_{S_K}$, для которых (9) не выполняются, то поступаем следующим образом. Введем множество $S'_K=\{S_K, a_{i_0}\}$, где i_0 – любой из $i \in I_H \setminus I_{S_K}$, для которых (9) не выполняются, найдем вектор P'_K , $P'_K \perp L(S'_K)$,

$P'_K = \sum\limits_{i \in I_{S'_K}} t'_{iK} a_i$, и положим $Q_{K+1} = \beta_K P'_K + (1-\beta_K) P_K$,

где

$$\beta_K = \begin{cases} 1 , & P'_K \in co(S'_K), \\ \min\limits_{\{i|t'_{iK}<0\}} \dfrac{t_{iK}}{t_{iK}-t'_{iK}} , & P'_K \notin co(S'_K). \end{cases} \qquad (10)$$

По лемме 4 $Q_{K+1} \in co(S'_K)$, и

$$\| Q_{K+1} \| < \| P_K \| \leq \| Q_K \| . \qquad (11)$$

Таким образом, $(K+1)$-ое приближение построено. Аналогично продолжая процесс, построим последовательность $\{Q_K\}$ векторов, строго убывающих по норме (См. (8) , (11)).

ТЕОРЕМА 3. Последовательность $\{Q_k\}$ конечна, и последний её член есть решение задачи 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим все множества

$$S_1, S_2, \cdots, S_N \tag{12}$$

такие, что $P_\ell \perp \overset{\circ}{co}(S_\ell)$, $\ell \in [1:N]$,
и $\|P_i\| \geq \|P_j\|$ для $i, j \in [1:N]$, $i < j$.
Очевидно, $N \leq 2^m - 1$, и P_N есть решение задачи 2.

Пусть на K_1 - м шаге в первый раз попали на одно из множеств (12), допустим S_i. Так как число векторов a_i равно m, то $K_1 \leq m-1$ (См. замечание к лемме 5).
На K_2 - м шаге $(K_2 < K_1 + m - 1)$ снова попадем на множество из (12), допустим S_j. Тогда, как следует из (8), (11), $\|Q_{K_2}\| \geq \|P_j\|$, и $\|P_i\| > \|Q_K\|$ при $K > K_1$.
Отсюда $\|P_i\| > \|P_j\|$, то есть $i < j$.
Таким образом, не более чем через $(m-1)N$ шагов будут найдены S_N и P_N. Теорема доказана.

Пусть векторы a_i, $i \in I_H$, линейно-независимы и $S \subseteq H$.
Покажем, как строить вектор P, $P \perp L(S)$.
Решается система линейных уравнений

$$\sum_{i \in I_S} t_i' a_i \cdot a_j = 1, \quad j \in I_S. \tag{13}$$

В силу следствий леммы 7 решение системы (13) существует, и если t_i', $i \in I_S$, есть её решение, то $\sum_{i \in I_S} t_i' > 0$.

Обозначим $\sum_{i \in I_S} t_i'$ через t Тогда $P = \sum_{i \in I_S} t_i a_i$,
где $t_i = \dfrac{t_i'}{t}$, есть искомый вектор. Покажем это.

Возьмем произвольный вектор P'', $P'' \in L(S)$.
$P'' = \sum_{j \in I_s} t''_j a_j$.

Легко проверить, что $P \cdot P'' = \frac{1}{t}$, а так как это равенство справедливо для любого $P'' \in L(S)$, то $P \cdot P = \frac{1}{t}$.

Таким образом, $P \cdot P = P \cdot P''$, то есть $P \perp L(S)$.

4. Алгол-процедура, реализующая описанный алгоритм решения задачи I

Предполагается, что векторы $a_i = (1; \bar{a}_i)$, $i \in I_H$, линейно-независимы.

Смысл обозначений параметров алгол-процедуры:
m – число векторов в H; n – размерность этих векторов; $a[1:m,1:n]$ – матрица, строками которой являются векторы $\bar{a}_i$, $i \in I_H$; $mz[1:n]$ – искомый вектор; z – его длинна; q – количество положительных коэффициентов в представлении искомого вектора через векторы $\bar{a}_i$, $i \in I_H$; $mt[1:m]$ – коэффициенты представления; pI052$(u+1, u, aa)$– стандартная программа для решения системы линейных уравнений с расширенной матрицей $aa[1:u, 1:u+1]$. Вектор решения получается на месте столбца свободных членов после обращения к pI052.

Процедурой в том виде, в котором она приводится ниже, можно пользоваться только на ЭВМ с транслятором "Сигнал".

ЗАМЕЧАНИЕ. Минимумы в (8) и (II) могут достигаться на нескольких индексах, в процедуре же считается, что соответствующие минимумы достигаются только на одном индексе, так как достижение их на нескольких индексах редко встречается.

Благодарим Г. С. Цейтина за обсуждение и замечания.

```
BEGIN
      PROCEDURE DOWN(M,N,A,MP,MT,U,R) ; VALUE M,N,A ;
        INTEGER M,N,U ; REAL R ; ARRAY A,MP,MT ;
        BEGIN INTEGER I,J,K ; REAL S,T ; ARRAY MPT[1:M] ;
          BOOLEAN B ; BOOLEAN ARRAY IS[1:M] ;
          U:=M ;
          FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
            BEGIN MT[I]:=1/M ; IS[I]:=TRUE
            END ;
L1:
          BEGIN INTEGER I1,K1 ; ARRAY AA[1:U+1,1:U+1] ;
            I1:=0 ;
            FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
              IF IS[I] THEN
                BEGIN K1:=I1 ; I1:=I1+1 ;
                  FOR K:=I STEP 1 UNTIL M DO
                    IF IS(K) THEN
                      BEGIN K1:=K1+1 ; S:=0 ;
                        FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO
                          S:=S+A[I,J]*A[K,J] ;
                        AA[K1,I1]:=AA[I1,K1]:=S+1
                      END
                END
            FOR I:=1 STEP 1 UNTIL U DO AA[I,U+1]:=1 ;
            P1052(U+1,U,AA) ;
            S:=0 ;
```

```
        FOR I:=1 STEP 1 UNTIL U DO S:=S+AA[I,U+1] ;
        K:=0 ; R:=SQRT(1/S-1) ;
        FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
          IF IS[I] THEN
            BEGIN K:=K+1 ; MPT[I]:=AA[K,U+1]/S
            END ELSE MPT[I]:=0
      END ;
      B:=TRUE ; T:=1 ;
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
        IF IS[I] THEN
          BEGIN IF MPT[I]<0 THEN
              BEGIN B:=FALSE ; S:=MT[I]/(MT[I]-MPT[I]);
                IF S<T THEN
                  BEGIN T:=S ; J:=I
                  END
              END
          END ;
      IF B THEN GO TO L2 ;
      IS[J]:=FALSE ; U:=U-1 ;
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
        IF IS[I] THEN MT[I]:=T*(MPT[I]-MT[I])+MT[I] ;
      GO TO L1 ;
L2:   J:=M ;
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
        BEGIN MT[I]:=MPT[I] ;
          IF MT[I]=0 THEN
```

```
        BEGIN U:=U-1 ; IS[I]:=FALSE
        END
      END ;
    FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO
      BEGIN S:=0 ;
        FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
          IF IS[I] THEN S:=S+MT[I]×A[I,J] ;
        MP[J]:=S
      END ;
    S:=0 ;
    FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO S:=S+MP[J]×MP[J] ;
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
      IFNOTIS[I] THEN
        BEGIN T:=0 ;
          FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N DO
            T:=T+MP[J]×A[I,J] ;
          IF S>T THEN
            BEGIN IS[I]:=TRUE ; J:=U+1 ;
              GO TO L1
            END
        END
  END ;
 STOP
END
```

Литература

I. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс, М.,"Наука," 1972.

2. Митчелл В.Ф., Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Нахождение ближайшей к началу координат точки многогранника, Вестник ЛГУ, № 13 1971 , 38 - 45.

3. Поляк Р.А. Алгоритм для одновременного решения прямой и двойственной задач выпуклого программирования, Труды семинара „Экономическая кибернетика и исследование операций", Киев, № 3 1966 , 53 - 66.

Поступила в ред.-изд. отд.
6. XII. 1972 г.