УДК 513.25/26

# ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА И НЕКОТОРЫЕ ИХ СВОЙСТВА

Б.И.Коробочкин

Пусть $\bar{R}^{k}$ есть $k$-мерное евклидово пространство, $\bar{R}^{k}_{+}$ - его неотрицательный ортант, $c(\bar{x})$ и $-Y_i(\bar{x})$ ( $i=1,\ldots,m$ ) - выпуклые вниз замкнутые на $\bar{R}^{n}$ функции.

Положим $\bar{E}(\eta)=\{\bar{x}\in\bar{R}\,|\,\forall_i\,(1\le i\le m)\ Y_i(\bar{x})+\eta\ge 0\}$, где $\bar{R}\subset\bar{R}^{n}$ есть выпуклое замкнутое множество.

Будем говорить, что задача совместна, если $\bar{E}(\eta)$ не пусто при любых $\eta>0$. Положим $N(\eta)=\inf\{c(\bar{x})\,|\,\bar{x}\in\bar{E}(\eta)\}$.

Следуя Е.Г.Гольштейну, обобщенной задачей выпуклого программирования назовем отыскание $N=\sup\limits_{\eta>0}N(\eta)$. Будем говорить, что задача имеет решение (конечное или $\infty$ ), если она совместна и хотя бы для одного $\eta>0$ $N(\eta)>-\infty$. Последовательность $\{\bar{x}^{(k)}\}$ назовем минимизирующей (или обобщенным решением) если для любого $\eta>0$ найдется $k(\eta)$, что для всех $k\ge k(\eta)$ $\bar{x}^{(k)}\in\{\bar{x}\in\bar{E}\,|\,c(\bar{x})\le N(\eta)+\eta\}$.

Как известно*), между обобщенной и обычной задачами выпуклого программирования $Z=\inf\{c(\bar{x})\,|\,\bar{x}\in E(0)\}$ имеет место соотношение

$$N=\sup_{\bar{u}\in\bar{R}^{m}_{+}}\inf_{\bar{x}\in\bar{R}}\varphi(\bar{x},\bar{u})\le\inf_{\bar{x}\in\bar{R}}\sup_{\bar{u}\in\bar{R}^{m}_{+}}\varphi(\bar{x},\bar{u})=Z,$$

где $\varphi(\bar{x},\bar{u})=c(\bar{x})-\sum\limits_{i=1}^{m}u_i Y_i(\bar{x})$ - функция Лагранжа рас-

---

*) См. напр. [1].

сматриваемой задачи. Положим $f(\bar{u}) = \inf\limits_{x \in \bar{R}} \varphi(\bar{x}, \bar{u})$ . Последовательность $\{\bar{u}^{(k)}\}$ точек $\bar{u}^{(k)} \in \bar{R}_+^m$ назовем максимизирующей (или обобщенным решением двойственной задачи), если $\lim\limits_{k \to \infty} f(\bar{u}^{(k)}) = N$. Положим $\bar{H} = \{\bar{u} \in \bar{R}_+^m \mid f(\bar{u}) > -\infty\}$, и для $\bar{u} \in \bar{H}$ и $\delta > 0$ –

$$\bar{\mathcal{D}}(\bar{u}, \delta) = \{\bar{x} \in \bar{R} \mid \varphi(\bar{x}, \bar{u}) \leq f(\bar{u}) + \delta\}.$$

Пусть $\{\bar{u}^{(m)}\}$ – какая-либо максимизирующая последовательность, а положительная последовательность $\{\delta_k\} \to 0$ . Тогда для некоторых частных случаев, как например в алгоритме Эрроу-Гурвица, где считается, что $\varphi(\bar{x}, \bar{u})$ обладает седловой точкой $(\bar{x}^*, \bar{u}^*)$ и строго выпукла по $\bar{x}$ в ее окрестности[ж)], из $\bar{x}^{(k)} \in \mathcal{D}(\bar{u}^{(k)}, \delta_k)$ следует, что $\{\bar{x}^{(k)}\}$ – минимизирующая последовательность[жж)].
Однако, очевидно, в общем случае, из того, что $\bar{x}^{(k)} \in \mathcal{D}(\bar{u}^k, \delta_k)$, подобного вывода о последовательности $\{\bar{x}^{(k)}\}$ сделать нельзя. В предлагаемой статье приводятся некоторые способы построения классов обобщенных функций Лагранжа, для которых указанное свойство всегда имеет место.

Сформулированную задачу разобьем на три случая. К первому случаю отнесем те классы задач, в которых из того, что

$$\bar{x}^{(k)} \in \bar{B}(\mathcal{J}, \bar{u}^{(k)}, \delta_k) = \{\bar{x} \in \bar{R} \mid \forall_i (i \in \mathcal{J})\, Y_i(\bar{x}) + \delta_k \geq 0, c(x) \leq N + \delta_k\},$$

где $\{\bar{u}^{(k)}\}$, $\{\delta_k\}$ – указанные ранее последовательности и $\mathcal{J} = \{i = 1, \ldots \mid \lim\limits_{k \to \infty} u_i^{(k)} > 0\}$, следует, что $\{\bar{x}^{(k)}\}$ – минимизирующая последовательность.

Ко второму случаю отнесем те классы задач, для которых существуют положительные максимизирующие последовательности и, к третьему – общий класс рассматриваемых задач.

Обозначим через $M$ класс вещественнозначных функций $\mu(t)$, определенных на всей числовой оси, неотрицательных при $t \geq 0$, положительных и монотонно убывающих при $t > 0$ .[жжж)]

---

ж) Кроме того, от $\varphi(\bar{x}, \bar{u})$ там требуется двойная дифференцируемость по $\bar{x}$ и аналитичность в окрестности $\varphi(\bar{x}^*, \bar{u}^*)$ для гарантии локальной сходимости процесса.

жж) В случае, рассмотренном Эрроу-Гурвицем, $\{\bar{x}^{(k)}\} \to \bar{x}^*$.

жжж) Т.е. $\mu(t)$ – монотонно возрастающие (не убывающие) с ростом $|t|$ при $t > 0$ функции.

Отметим, что из определения $\mu(t)$ следует, что для любого $\delta > 0$ может быть указано такое $\varepsilon_\mu > 0$, что, как только

$$\mu(t) \leqslant \varepsilon, \quad t \geqslant -\delta.$$

Отнесем к классу $\Psi$ все такие вещественнозначные функции $\psi(t)$, определенные на всей числовой оси и при некоторых $t<0$ принимающие, быть может, значение $-\infty$, неотрицательные при $t \geqslant 0$, непрерывные слева в нуле и нормированные условием $\psi(0)=0$, для каждой из которых найдется такая функция $\mu(t) \in M$, что $t-\mu(t) \geqslant \psi(t)$ для всех $t$. Отметим, что множество таких функций выпукло. Положим при $\bar{x} \in \bar{R}$, $\bar{u} \in \bar{R}^m_+$

$$\Phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) = c(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} u_i \psi_i (Y_i(\bar{x})),$$

где для всех $i = 1, \ldots, m$ $\psi_i(t) \in \Psi$ и $F(\bar{u}, \bar{\psi}) = \inf_{\bar{x} \in \bar{R}} \Phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$.

ЛЕММА I. $f(\bar{u}) \leqslant F(\bar{u}, \bar{\psi}) \leqslant N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\Phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) - \varphi(\bar{x}, \bar{u}) = \sum u_i [Y_i(\bar{x}) - \psi_i(Y_i(\bar{x}))] \geqslant \sum u_i \mu_i(Y_i(\bar{x})) \geqslant 0$, откуда $f(\bar{u}) \leqslant F(\bar{u}, \bar{\psi})$. Из непрерывности слева в нуле $\psi_i(t)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что из $t \geqslant -\delta(\varepsilon)$ следует $\psi_i(t) \geqslant -\varepsilon$. Тогда $F(\bar{u}, \bar{\psi}) \leqslant \inf \{\Phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) \mid \bar{x} \in \bar{E}(\delta(\varepsilon))\} \leqslant N + |\bar{u}|\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $F(\bar{u}, \bar{\psi}) \leqslant N$.

СЛЕДСТВИЕ I.I. $\sup_{\bar{u}} F(\bar{u}, \bar{\psi}) = N$, и если $\{\bar{u}^{(k)}\}$ – максимизирующая последовательность для $f(\bar{u})$, то она является таковой и для $F(\bar{u}, \bar{\psi})$.

СЛЕДСТВИЕ 2.I. Для любого $\bar{u} > 0$, $\sup F(\bar{u}, \bar{\psi}) = N$.

Справедливость следствия следует из известных теорем о "штрафных" функциях, которые для сформулированной исходной задачи в форме неравенств принадлежат классу $\Psi$.

Пусть $\mathcal{D}_\Phi(\bar{u}, \varepsilon) = \{\bar{x} \in \bar{R} \mid \Phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) \leqslant F(\bar{u}, \bar{\psi}) + \varepsilon\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.I. Если $N < \infty$ и $\{\bar{u}^{(k)}\}$ – какая-либо максимизирующая последовательность для $f(\bar{u})$, то

$$\sup_{\bar\psi} \lim_{k\to\infty} [F(\bar u^{(k)}, \bar\psi) - f(\bar u^{(k)})] = 0.$$

Очевидно, что если $N = \infty$, то даже ни для какого $\bar\psi$ нельзя гарантировать, что $\lim_{k\to\infty} [F(\bar u^{(k)}, \bar\psi) - f(\bar u^{(k)})] = 0$, в чем легко убедиться хотя бы на следующем примере.

Пусть $\bar x \in \bar R^2$, $c(\bar x) = \sum_{i=1}^{2} x_i$, $Y_1(\bar x) = -e^{-x_1}$, $Y_2 = -e^{-x_2}$. Тогда $\varphi(\bar x, \bar u) = \sum_{i=1}^{2} x_i + \sum_{i=1}^{2} u_i e^{-x_i}$, $f(\bar u) = \sum_{i=1}^{2} \ln u_i + 2$, $\sup f(\bar u) = \infty$, а максимизирующими последовательностями будут, например, $\{\bar u^{(k)}\} = \{(\substack{k\\1})\}$. Но $F(\bar u^{(k)}, \bar\psi) = \inf_{x_1} [x_1 - k\psi_1(-e^{-x_1})] + \inf_{x_2} [x_2 - \psi_2(-e^{-x_2})]$, и, следовательно, существует такое $h < \infty$, что $F(\bar u^{(k)}, \bar\psi) = \inf_{x_1} [x_1 - k\psi_1(-e^{-x_1})] + \inf_{x_2 < h} [x_2 - \psi_2(-e^{-x_2})]$.

Положим $\varepsilon(\psi_2) = \frac{1}{2}[-e^{-h} - \psi_2(-e^{-h})]$, и пусть $\bar x^{(k)} \in \bar{\mathcal D}_\varphi(\bar u^{(k)}, \varepsilon(\psi_2))$. Тогда $F(\bar u^{(k)}, \bar\psi) - f(\bar u^{(k)}) \geq k[-e^{-x_1^{(k)}} - \psi_1(-e^{-x_1^{(k)}})] +$
$+ [-e^{-h} - \psi_2(-e^{-h})] - \varepsilon(\psi_2) = \varepsilon(\psi_2) > 0$ для всех $k$.

ТЕОРЕМА I. Если $\{\bar u^{(k)}\}$ — максимизирующая для $f(\bar u)$ последовательность и $\lim [F(\bar u^{(k)}, \bar\psi) - f(\bar u^{(k)})] = 0$, то какова бы ни была положительная последовательность $\{\delta_\nu\} \to \infty$ из $\bar x^{(k)} \in \bar{\mathcal D}_\varphi(\bar u^{(k)}, \delta_\nu)$ следует, что для первого класса задач $\{\bar x^{(k)}\}$ — минимизирующая последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любого $\delta_\nu > 0$ можно указать такое $k(\delta_k)$, что для всех $k \geq k(\delta_\nu)$ $F(\bar u^{(k)}, \bar\psi) - f(\bar u^{(k)}) \leq \delta_\nu$. Пусть $\bar x^{(k)} \in \bar{\mathcal D}_\varphi(\bar u^{(k)}, \delta_\nu)$.
Тогда

$$\sum \bar u_i^{(k)} \mu_i (Y_i(\bar x^{(k)})) \leq \sum u_i^{(k)} [Y_i(\bar x^{(k)}) - \psi_i(Y_i(\bar x^{(k)}))] =$$

$$= \Phi(\bar x^{(k)}, \bar u^{(k)}, \bar\psi) - \varphi(\bar x^{(k)}, \bar u^{(k)}) \leq F(\bar u^{(k)}, \bar\psi) - f(\bar u^{(k)}) + \delta_\nu \leq 2\delta_\nu.$$

По определению, для всех $i \in \mathcal J_*$ начиная с некоторого $k'$, $u_i^{(k)} \geq q > 0$. Поэтому для $k \geq \max[k'; k(\delta_\nu)]$

$$\sum_{\mathcal J} \mu_i (Y_i(\bar x^{(k)})) \leq \frac{2\delta_\nu}{q}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ , начиная с некоторого $k$ , и для всех $i \in \mathcal{J}$ , $Y_i(\bar{x}^{(k)}) \geq -\varepsilon$ , что и завершает доказательство теоремы.

Пусть теперь $\bar{H}$ имеет внутреннюю точку и $\{\bar{u}^{(k)}\}$ - положительная максимизирующая последовательность для $f(\bar{u})$ .

ТЕОРЕМА 2. Для любой положительной последовательности $\{\delta_k\} \to 0$

$$\bar{x}^{(k)} \in \{\bar{x} \in \bar{R}^n(n_1) \mid \Phi(\bar{x}, \bar{u}^{(k)}, \bar{\psi}^{(k)}) \leq F(\bar{u}^{(k)}, \bar{\psi}^{(k)}) + \delta_k\}$$

есть элементы минимизирующей последовательности, если $\psi_i^{(k)}(t)$ таковы, что для всех $i = 1, \ldots, m$ $\lim t_i^{(k)} = 0$, где $t_i^{(k)} = \inf\{t \mid t - \psi_i^{(k)}(t) \leq \frac{F(\bar{u}^{(k)}, \bar{\psi}^{(k)}) - f(\bar{u}^{(k)})}{u_i^{(k)}}\}$.

Справедливость теоремы очевидна, т.к. $\sup\limits_{\psi_i \in \Psi} \inf\{t \mid t - \psi_i(t) \leq a\} = 0$ для любого $a > 0$ . Дальнейшее обоснование аналогично обоснованию теоремы I. Перейдем теперь к рассмотрению наиболее интересного общего случая. Для любого $a > 0$ положим

$$g(a, \psi) = \sup\{\tau \mid \forall_t (0 \leq t \leq \tau)\, t - (1+a)\psi(t) \leq 0\}.$$

Положим для $\bar{\alpha} = (\alpha_i) > 0$

$$\tilde{Y}_i(\bar{x}) = \min[Y_i(\bar{x}); w_i g(\tfrac{u_i}{\alpha_i}, \psi_i)]$$

и

$$\Phi_{\bar{\alpha}}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Psi}, \bar{w}) = c(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \tilde{Y}_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + u_i)\psi_i(Y_i(\bar{x})),$$

где $\bar{w} = (w_i)$ и $0 \leq w_i < 1$ для всех $i = 1, \ldots, m$ . При любых указанных $\bar{\Psi} = (\psi_i)$ , $\bar{w} = (w_i)$ и $\bar{\alpha} = (\alpha_i)$ справедлива

ЛЕММА 2. $f(\bar{u}) \leq F_\alpha(\bar{u}, \bar{\Psi}, \bar{w}) \leq N$, $F_\alpha(\bar{u}, \bar{\Psi}, \bar{w}) = \inf\limits_{\bar{x}} \Phi_{\bar{\alpha}}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Psi}, \bar{w})$.

СЛЕДСТВИЕ I.2. $\sup\limits_{\bar{u}} F_\alpha(\bar{u}, \bar{\Psi}, \bar{w}) = N$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для любого $\bar{u} \geq 0$,

$$\sup_{\Psi} F_\alpha(\bar{u}, \bar{\Psi}, \bar{w}) = N.$$

Обоснование леммы 2 и следствия I.2 аналогичны обоснованию леммы I и следствия I.I.

Для обоснования следствия 2.2 рассмотрим однопараметрическое семейство функций $\lambda \ln(1+\frac{t}{\lambda})$ при $\lambda > 0$. Это семейство принадлежит классу $\Psi$ и полунепрерывно сверху при $t>0$.

Если $\psi_i^{(k)}(t) = \lambda_i^{(k)} \ln(1+\frac{t}{\lambda_i^{(k)}})$, то при любом $\alpha > 0$ $\bar{u} \geq 0$ и любых указанных $\bar{w}$ $\lim\limits_{|\lambda_i^{(k)}| \to 0} F_\alpha(\bar{u}, \bar{\psi}^{(k)}, \bar{w})$, т.к. из $\bar{x}^{(k)} \in \{\bar{x} \in \bar{R} \mid \varPhi_\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}^{(k)}, \bar{w}) \leq F_\alpha(\bar{u}, \bar{\psi}^{(k)}, \bar{w}) + \delta_k\}$, $\delta_k > 0$ и $\{\delta_k\} \to 0$ следует, что

I. $Y_i(\bar{x}^{(k)}) > -\lambda_i^{(k)}$ для всех $i = 1, \ldots, m$ и

$$\lim_{k \to \infty} c(\bar{x}^{(k)}) \geq N.$$

2. $$\sum \alpha_i \tilde{Y}_i^{(k)}(\bar{x}^{(k)}) - \sum (\alpha_i + u_i)\psi_i^{(k)} \tilde{Y}_i(\bar{x}^{(k)}) \geq$$
$$\geq \sum \lambda_i^{(k)} \left[\frac{u_i}{\alpha_i} - (1+\frac{u_i}{\alpha_i}) \ln(1+\frac{u_i}{\lambda_i})\right].$$

ТЕОРЕМА 3. Если $\psi_i^{(k)}(t)$ таковы, что для всех $i = 1, \ldots, m$

$$\lim_{k \to \infty} \inf\{t \mid t - \psi_i^{(k)}(t) \leq \frac{F(\bar{u}^{(k)}, \bar{\psi}^{(k)}) - f(\bar{u}^{(k)})}{\alpha_i^{(k)} + u_i^{(k)}}\} = 0,$$

где $\{\bar{u}^{(k)}\}$ – максимизирующая последовательность для $f(\bar{u})$, то при любом из указанных способов выбора $\bar{w}^{(k)}$ и при любых $\alpha^{(k)} > 0$,

$$\bar{x}^{(k)} \in \{\bar{x} \in \bar{R} \mid \varPhi_{\alpha^{(k)}}(\bar{x}, \bar{u}^{(k)}, \bar{\psi}^{(k)}, \bar{w}^{(k)}) \leq F_{\alpha^{(k)}}(\bar{u}^{(k)}, \bar{\psi}^{(k)}, \bar{w}^{(k)}) + \delta_k\}$$

есть элементы минимизирующей последовательности, независимо от способа выбора положительной последовательности $\{\delta_k\} \to 0$.

Обоснование аналогично обоснованию теоремы I. Рассмотрим теперь особо случай, когда для некоторых или для каждого $Y_i(\bar{x})$ найдется такое $Y_y(\bar{x})$, что $Y_i(\bar{x}) \equiv -Y_y(x)$. Будем для определенности считать, что для всех $1+m_1 \leq i \leq m_2$ $Y_i \equiv -Y_{m_2-m_1+i}$, где $0 \leq m_1 \leq m_2 = \frac{m + m_1}{2}$.

На множестве $\bar{R} \times \bar{R}^{m_2}(m_1)$ введем в рассмотрение функцию Лагранжа для этой задачи

$$\varphi(\bar{x}, \bar{u}) = c(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m_2} u_i Y_i(\bar{x}).$$

Положим

$$P(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Psi}) = c(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m_1} u_i \psi_i (Y_i(\bar{x}) - \sum_{i=m_1+1}^{m_2} |u_i| \psi_i(-|Y_i(\bar{x})|)$$

и

$$P_\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Psi}, \bar{w}) = c(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \tilde{Y}_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m_1} u_i \psi_i(\tilde{Y}_i(\bar{x})) -$$

$$- \sum_{i=m_1+1}^{m_2} (\alpha_i + |u_i|) \psi_i(-|Y_i(\bar{x})|) - \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_i |Y_i(\bar{x})| .$$

Тогда, очевидно, для $P(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Psi})$ и $P_\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Psi}, \bar{w})$ сохраняют силу все выводы, ранее сделанные для $\varPhi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Psi})$ и $\varPhi_\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Psi}, \bar{w})$. Однако для дальнейшего подобное распространение предыдущих рассуждений представляется малоинтересным, прежде всего из-за наличия зависимости от $|Y_i(\bar{x})|$. Если предыдущий подход непосредственно применить к рассматриваемому случаю, то

$$\varPhi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Psi}) = c(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m_1} u_i \psi_i(Y_i(\bar{x})) - \sum_{i=m_1+1}^{m_2} |u_i| \psi_i(Y_i(\bar{x}) \operatorname{sign} u_i)$$

$$\varPhi_\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Psi}, \bar{w}) = c(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \tilde{Y}_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m_1} u_i \psi_i(\tilde{Y}_i(\bar{x})) +$$

$$+ \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_i \tilde{Y}_i^+(\bar{x}) - \sum_{i=m_1+1}^{m_2} (\alpha_i + |u_i|) \psi_i(\tilde{Y}_i^+(\bar{x})) + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_{m_2-m_1+i} \tilde{Y}_i^-(\bar{x}) -$$

$$- \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_{m_2-m_1+i} \psi_{m_2-m_1+i}(\tilde{Y}_i^-(\bar{x})), \quad \text{где}$$

$$\tilde{Y}_i^+(\bar{x}) = \min\left[Y_i(\bar{x}) \operatorname{sign} u_i ; w_i g\left(\frac{|u_i|}{\alpha_i}; \psi_i\right)\right]$$

$$\tilde{Y}_i^+(\bar{x}) = \min[-Y_i(\bar{x}) \operatorname{sign} u_i ; 0].$$

Однако для более эффективного учета специфики рассматриваемого случая, во-первых, можно положить $0 \le w_i \le \infty$ для всех $i \ge m_1+1$, во-вторых, отказаться, как обязательного, от условия неотрицательности $\psi_i(t)$ при $t \ge 0$ для $i \ge m_1+1$, оставив лишь условие непрерывности этих функций при $t = 0$. Обозначим множество таких функций через $\Psi^*$.

Если, в частности, для $m_1+1 \le i \le m_2$ положить $w_i = 8$ и $\alpha_i = \alpha_{m_2-m_1+i}$, то

$$\Phi_\alpha(\bar{x},\bar{u},\varphi,\bar{w}) = c(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i \tilde{Y}_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m_1} u_i \psi_i(\tilde{Y}_i(\bar{x})) -$$

$$- \sum_{i=m_1+1}^{m_2} (\alpha_i + |u_i|)\psi_i(Y_i(\bar{x})\,\mathrm{sign}\,u_i) -$$

$$- \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_i \psi_{m_2-m_1+i}(-Y_i(\bar{x})\,\mathrm{sign}\,u_i).$$

Кроме того, если для $m_1+1 \le i \le m_2$ $\psi_i(t) \equiv \psi_{m_2-m_1+i}(t)$, то

$$\Phi_\alpha(\bar{x},\bar{u},\varphi,\bar{w}) = c(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i \tilde{Y}_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m_1} u_i \psi_i(\tilde{Y}_i(\bar{x})) -$$

$$-\sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_i[\psi_i(Y_i(\bar{x})) + \psi_i(-Y_i(\bar{x})] - \sum_{i=m+1}^{m_2} |u_i|\psi_i(Y_i(\bar{x})\,\mathrm{sign}\,u_i).$$

В заключение отметим, что если отказаться от всяких условий, наложенных ранее на $c(\bar{x})$ и $Y_i(\bar{x})$, потребовав взамен наличие седловых точек у $\varphi(\bar{x},\bar{u}) = c(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m_2} u_i Y_i(\bar{x})$ на $\bar{R}\times\bar{R}^{m_2}(m_1)$, то опять-таки все ранее сделанные выводы о свойствах функций $\Phi(\bar{x},\bar{u},\varphi)$, $\Phi_\alpha(\bar{x},\bar{u},\varphi,\bar{w})$ и минимизирующих последовательностях остаются в силе.

Действительно, если $\mathcal{D}\times\mathcal{D}'$ есть указанное множество седловых точек и $\bar{u}^*\in\mathcal{D}'$, то $F_\alpha(\bar{u}^*,\varphi,\bar{w}) = \{c(\bar{x}) \mid x\in\mathcal{D}\}$ и

$$\{\bar{x}\in\bar{R} \mid \Phi_\alpha(\bar{x},\bar{u}^*,\varphi,\bar{w}) = F_\alpha(\bar{u}^*,\varphi,\bar{w})\} = \mathcal{D}.$$

## Литература


1. ГОЛЬШТЕЙН Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М., "Наука", 1971.
2. ЭРРОУ К.Дж., ГУРВИЦ Л., УДЗАВА Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. И.Л. 1962.
3. КОРОБОЧКИН Б.И. Игровой метод решения обобщенной задачи выпуклого программирования. Тезисы докладов первой конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. М., 1971.
4. ПОЛЯК Б.Т., ТРЕТЬЯКОВ Н.В. Об одном итерационном методе решения задач математического программирования и его экономической интерпретации. Тезисы докладов первой конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. М., 1971.



Поступила в ред.-изд. отд.
XII. 1972 г.