УДК 518.734.3

О НЕКОТОРЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДА ОТСЕЧЕНИЯ

Д.Г.Терэи

Одним из самых распространенных методов в дискретном программировании является метод отсечения. Известные алгоритмы отсечения Гомори [1], [2] и различные их модификации, например ускоренный алгоритм Мартина [3], построение отсечений по Червак [4], нахождение покрывающих отсечений Пилера [5], используются для решения задач дискретного программирования вида:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=1,\dots,m, \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,\dots,n, \qquad (3)$$

$$x_j \text{ - целый}, \quad j=1,\dots,n. \qquad (4)$$

В статье описываются некоторые вычислительные схемы метода отсечения, которые представляют интерес для экспериментального исследования возможности решения задачи (1)-(4).

§ 1. Предварительные замечания

Пусть надо решить задачу (1)-(4). Если мы будем искать её решение по первому алгоритму Гомори, например, то надо

а) решить задачу (1)-(3), получить представление задачи

(I)-(4) в виде

$$\max f + \sum_{j\in N} z_j(-x_j) \qquad (5)$$

при ограничениях

$$x\rho_i = \sum_{j\in N} x_{ij}(-x_j), \qquad (6)$$

$$x\rho_i \geq 0,\ x_j \geq 0\ (i\in M,\ j\in N), \qquad (7)$$

$$x\rho_i,\ x_j (i\in M,\ j\in N) \text{ - целые}, \qquad (8)$$

где M - множество индексов i базисных переменных $x\rho_i$, N - множество индексов j небазисных переменных x_j, f - значение целевой функции (I), соответствующее оптимальному решению $x\rho$ задачи (I)-(3),

б) проверить все ли $x\rho_i (i\in M)$ - целые. Если да, то решение задачи (I)-(4) найдено, если нет, то

в) к ограничениям (2) добавить ограничение

$$S \geq 0 \text{ и целое}, \qquad (9)$$

где

$$S = \begin{cases} -\{f\} - \sum\limits_{j\in N} \{z_j\}(-x_j), & \text{если } \{f\} > 0, \\ -\{x\rho_i\} - \sum \{x_{ij}\}(-x_j), & \text{если } \{f\} = 0, \text{ но } \{x\rho_i\} > 0. \end{cases}$$

$\{\alpha\}$ означает дробную часть числа α, и идти на а).

В каких случаях процесс а)-в) может быть эффективным ? Процесс эффективен в случаях:

I) Если каждый раз отсечение (9) проходит через целочисленную точку многогранника задачи (I)-(3) или максимальное значение S при условиях (2)-(4) меньше I. Однако это не так. В упомянутой работе Пилера приведен пример, показывающий, что через целочисленную точку многогранника допустимых решений может не проходить ни одно из возможных отсечений вида (9).

2) Определим класс задач вида (I)-(4) фиксацией m и n. Если можно статистически определить максимальное число итераций, после которого обязательно надо ожидать уменьшение целевой функции на единицу, то возможен следующий эффективный алгоритм. Решаем исходную задачу алгоритмом Гомори. Если мы проделали ($\rho \approx 100$) итераций и целевая функция не уменьшилась не менее,

чем на единицу, то мы уменьшаем её на единицу и продолжаем счет. Если задача получилась противоречивой, то фиксируем предыдущее значение целевой функции, которое будет оптимальным. Далее целочисленное решение ищем на уровне целевой функции с найденным оптимальным значением. Размерность задачи, таким образом, уменьшилась на единицу, и с новой задачей продолжаем аналогичный процесс. Но и в этом случае возникают трудности: поведение ρ непредсказуемо (даже при прохождении целевой функции через целочисленную точку с известным оптимальным значением cx). Такой подход ещё и потому не применим, что существуют такие задачи, для которых имеет место монотонное убывание целевой функции от итерации к итерации, и за небольшое число итераций приходим (вследствие ошибок округления) к пустому многограннику, хотя на самом деле исходная задача имела целочисленное решение. Действительно, рассмотрим такую задачу:

$$2x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 1x_6 + 0x_7$$

$$\begin{aligned}
8x_1 + 0x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 9x_5 + 1x_6 + 4x_7 &= 179 \\
2x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 1x_5 + 3x_6 + 10x_7 &= 116 \\
1x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 7x_6 + 3x_7 &= 153 \\
7x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 8x_4 + 0x_5 + 3x_6 + 4x_7 &= 166 \\
5x_1 § 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 5x_7 &= 175
\end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad \text{целые}, \quad j = 1,\ldots,7.$$

После небольшого числа преобразований симплексной таблицы по первому алгоритму Гомори мы придем к несовместной задаче, хотя исходная задача имеет целочисленное решение

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 7, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 4, \quad x_6 = 2, \quad x_7 = 1.$$

На примере первого алгоритма Гомори четко выделяются две основные проблемы, возникающие при разработке алгоритмов отсечения: 1) устранение ошибок, накапливающихся в процессе счета, 2) ускорение сходимости. Об устранении ошибок, появляющихся в процессе счета на ЭВМ, см. в [7, стр. 73].

§ 2. Об устранении ошибок округления в первом алгоритме Гомори

Вопрос об устранении ошибок округления в первом алгоритме Гомори рассматривался ранее, например, в работах [3], [9], [10]. В этом параграфе приведена одна вычислительная схема решения задачи (1)-(4) первым алгоритмом Гомори, устраняющая ошибки округления, со всеми основными расчетными формулами. В первом алгоритме Гомори, как и в любой другой схеме, реализованной на ЭВМ, ошибки округления возникают после выполнения арифметических операций.

Будем предполагать, что числа a_{ij}, b_i и c_j - целые ($i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$), тогда причиной возникновения ошибок округления является операция деления. Для того, чтобы в первом алгоритме Гомори не возникали ошибки округления, необходимо модифицировать операцию деления.

Остановимся на основных вычислительных моментах, нуждающихся в такой модификации.

Пусть T^s - симплексная таблица, соответствующая задаче (5)-(8), после s-го элементарного преобразования. Обозначим

$$T^s = \left.\begin{array}{c|c} \bar f^s & \bar z^s \\ \hline \bar x^s & \bar t^s \end{array}\right.$$

и B^s - базис, соответствующий оптимальному решению $\bar x^s$, с определителем q^s, $\bar f^s$ - значение целевой функции (1), $\bar z^s$ - двойственные оценки и $\bar t^s=\{\bar t^s_{ij}\}$ - матрица из коэффициентов разложения небазисных векторов по базисным.

По матрице T^s образуем матрицу

$$U^s = q^s T^s = \left.\begin{array}{c|c} f^s & z^s \\ \hline x^s & t^s \end{array}\right. .$$

U^s будет целочисленной (по правилу Крамера).

Отсюда следует, что если после каждого элементарного преобразования s мы будем запоминать матрицу U^s и число q^s и модифицируем по указанному ниже способу процесс получения таблицы T^{s+1}, то ошибок округления не будет.

Процесс получения T^{s+1} состоит в следующей модификации

операции деления двух чисел, то есть в определении делимости числа на число без фактического деления на основных (I - IУ) этапах вычислений по первому алгоритму Гомори.

I этап. Образование отсечения. На этом этапе надо дважды решить задачу: задан вектор $u=(u_1,\dots,u_m)$, найти вектор $v=(v_1,\dots,v_m)$ такой, что

$$u_j \equiv v_j \,(mod\, q^s). \tag{10}$$

Роль u в одном случае играет x^s, в другом - строка с номером z матрицы t^s, для которой $x^s_z \not\equiv 0 (mod\, q^s)$.

П этап. Определение номера z выводимой из базиса переменной:

$$\begin{gathered} \min x_i^z = x^s_z, \\ x_i \cdot sign\, q^s < 0, \\ i \in M. \end{gathered} \tag{11}$$

Ш этап. Определение номера k вводимой в базис переменной. Сравниваются две дроби p_1/q_1 и p_2/q_2 с $q_1 \cdot q_2 \neq 0$:

а) $sign\, q_1 = sign\, q_2$. Если $p_1 q_2 - p_2 q_1 \geq 0$, то $p_1/q_1 \geq p_2/q_2$.

б) $sign\, q_1 = -sign\, q_2$. Если $p_1 q_2 - p_2 q_1 \leq 0$, то $p_1/q_1 \geq p_2/q_2$.

Тогда k определяется из соотношения

$$\begin{gathered} \max z^s_j / t^s_{ij} = z^s_k / t^s_{zk}, \\ t^s_{zj}\, sign\, q^s < 0, \\ j \in N. \end{gathered} \tag{12}$$

IУ этап. Преобразование таблицы T^s в таблицу T^{s+1}.

Так как вместо T^s рассматривается U^s и q^s, то находятся U^{s+1} и q^{s+1}.

Соответствующие элементы таблицы U^{s+1} получаются из формул:

а) $t^{s+1}_{ij} = t^s_{ij} t^s_{zk} - t^s_{zj} \cdot t^s_{ik}$, $i \neq z$, $j \neq k$,

б) $t^{s+1}_{zj} = t^s_{zj} q^s$, $j \neq k$,

в) $t^{s+1}_{ik} = -t^s_{ik} q^s$, $i \neq z$,

г) $t^{s+1}_{zk} = q^s q^s$,

д) $f^{s+1} = f^s t^s_{zk} - x^s_z z^s_k$,

е) $z^{s+1}_j = z^s_j t^s_{zk} - t^s_{zj} z^s_k$, $j \neq k$,

ж) $z^{s+1}_k = -z^s_k q^s$, (13)

з) $x^{s+1}_i = x^s_i t^s_{zk} - x^s_z t^s_{ik}$, $i \neq z$,

и) $x^{s+1}_z = x^s_z q^s$.

q^{s+1} получается по формуле

$$q^{s+1} = t^s_{zk} q^s. \qquad (14)$$

Описанный выше вариант первого алгоритма Гомори работает только с целыми числами и потому исключает ошибки округления. Эта схема не единственна. Улучшение её возможно, если учитывать 1) возможность сокращения дроби, представляющей элемент симплексной таблицы, на наибольший общий делитель числителя и знаменателя, 2) специальную запись больших чисел в памяти машины (например, отведение для одного числа нескольких ячеек, которое будет записано в них по произвольному, но фиксированному основанию M).

§ 3. Об одном отсечении и его применении

При решении задач вида (1)-(4) первым алгоритмом Гомори на каждой итерации алгоритма отсекается решение соответствующей задачи линейного программирования. Но при этом изменение значения целевой функции не обязательно. На таких неэффективных (определение см. в [8]) итерациях не используется возможность формирования отсечения с помощью представления (5) целевой функции, так как значение целевой функции является целым числом (в противном случае целевая функция изменила бы свое значение). Для ускорения сходимости метода отсечения мы хотим и в случае, когда значением целевой функции является целое число, использовать представление (5) для образования более сильного (в указываемом далее смысле) отсечения в сравнении с отсечением (9).

Итак, пусть на некоторой итерации метода отсечения значение целевой функции равно f , значения двойственных оценок равны $\bar{x}_j$, j =1,..., n , и в базисном решении i -ая компонента $x p_i$ - нецелая. Могут иметь место два случая в зависимости от значения f^1 целевой функции после введения отсечения (9) на очередной итерации:

а) $f' < f$,

б) $f' = f$.

Случай а), очевидно, нас устраивает, так как проведенная итерация привела к уменьшению значения целевой функции. Одна-

ко довольно часто, особенно после проведения некоторого числа итераций, наступает случай б), и он на последующих итерациях повторяется, то есть значение целевой функции на последующих итерациях не уменьшается.

В случаях б) предлагается применять отсечение, отличное от (9). Это отсечение имеет вид:

$$\sum_{j \in Z} \{x_{ij}\} x_j \geqslant \{xp_i\}, \tag{15}$$

где $Z = \{j \mid j \in N, z_j \neq 0\}$ и i такое, что $\{xp_i\} > 0$.

Отсечение (15) полезно вводить с той целью, чтобы быстрее (в этом смысле выше шла речь об ускорении сходимости) ответить на вопрос о возможности изменения целевой функцией своего значения f.

Отсюда основной результат § 3 можно сформулировать так: если получаемая новая задача из задачи (5)-(8), (15) после приравнивания нулю переменных x_j с номерами $j \in Z$ окажется неразрешимой, то целочисленное неотрицательное решение задачи (5)-(8) следует искать на уровне целевой функции, меньшем в сравнении с полученным ранее значением f.

Используя этот результат, можем описать новый алгоритм для решения полностью целочисленной задачи (1)-(4) с целыми коэффициентами a_{ij}, b_i и c_j ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$), являющийся вариантом первого алгоритма Гомори:

1шаг. Решается симплекс-методом задача (1)-(3) и получается представление задачи (1)-(4) в виде (5)-(8). Если xp - целочисленное решение, то счет прекращается.

2 шаг. Если f (значение целевой функции) - нецелое число, то счет продолжается по первому алгоритму Гомори.

3 шаг. Если f - целое, то составляется новая задача из задачи, полученной на последнем шаге без учета столбцов с номерами j и с $z_j \neq 0$.

4 шаг. Решается первым алгоритмом Гомори новая задача.

5 шаг. Если получается целочисленное решение новой задачи, то оно является оптимальным целочисленным решением и для исходной задачи (1)-(4) и счет заканчивается.

6 шаг. Если новая задача окажется противоречивой, то в задаче (1)-(3) вводится ограничение

$$\sum_{j\in N} z_j x_j \geq 1$$

и начинаются вычисления с первого шага. Для этого необходимо восстановить задачу, из которой составляли новую.

Можно отметить следующее свойство отсечения (15).

ЛЕММА. Отсечение (15) отсекает нецелочисленную оптимальную точку задачи (5)-(7), но не отсекает ни одной неотрицательной целочисленной точки на уровне целевой функции (5) со значением f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уровень целевой функции со значением f. Все допустимые решения (в том числе и неотрицательные целочисленные), лежащие на нём, удовлетворяют соотношению $\sum_{j\in N} z_j x_j = 0$. Так как $z_j \geq 0$, то для тех j, что $z_j > 0$ имеем $x_j = 0$. Таким образом, для того, чтобы задача (5)-(7) обладала неотрицательным целочисленным решением со значением f целевой функции, необходимо, чтобы таким решением обладала задача, получаемая вычеркиванием столбцов с номерами j, для которых $z_j > 0$. Отсечение (15) является отсечением Гомори, но для этой новой задачи, поэтому оно не отсекает целочисленных неотрицательных точек. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Конечность описанного алгоритма следует из конечности первого алгоритма Гомори, условия для сходимости которого предполагаются выполненными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Этот алгоритм можно включать в работу после проведения нескольких итераций по первому алгоритму Гомори.

Относительно третьего алгоритма Гомори можно привести аналогичные рассуждения.

§ 4. Сочетание отсечений с перебором

В этом параграфе описан алгоритм, состоящий в сочетании отсечений с перебором. На наш взгляд, необходимость рассмотрения такого алгоритма объясняется следующими обстоятельства-

ми: 1) алгоритмы отсечения являются одними из лучших в сравнении с другими точными алгоритмами, алгоритмы перебора исключают ошибки округления, 2) алгоритмы отсечения, являясь алгоритмами монотонного убывания целевой функции до некоторого значения, затем становятся неэффективными, т.е. целевая функция на протяжении большого числа последующих итераций не изменяется. В таких ситуациях естественно рассмотреть уровень целевой функции с последним полученным значением и на нем перебором искать целочисленное решение. В случае отсутствия целочисленного решения на этом уровне уменьшаем на некоторое положительное число (на единицу, например, если оптимальное значение есть целое число) значение целевой функции и далее ищем неотрицательное целочисленное решение на новом уровне. Этот алгоритм основан на той же идее, что и алгоритм, изложенный в § 3.

Пусть a_{ij}, b_i, c_j - целые числа и область допустимых решений задачи (1)-(4) ограничена. Обозначим эту задачу через T.

<u>1 шаг.</u> Решается непрерывная задача T_0, соответствующая целочисленной задаче T. Если T_0 противоречива, то расчет закончен. В противном случае получаем симплексную таблицу

$$CT_0 = \left[\begin{array}{c:cccc} f^0 & z_1^0 & z_2^0 & \ldots & z_{n^0}^0 \\ \hdashline x_{p_1^0} & x_{11}^0 & x_{12}^0 & \ldots & x_{1n^0}^0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{p_{m^0}^0} & x_{m^0 1}^0 & x_{m^0 2}^0 & \ldots & x_{m^0 n^0}^0 \end{array}\right].$$

<u>2 шаг.</u> Если значение f^0 целевой функции нецелое, то счет продолжается по первому алгоритму Гомори.

<u>3 шаг.</u> Если значение f^0 целевой функции целое число и соответствующее ему решение целочисленное, то расчеты заканчиваются, то есть найдено оптимальное целочисленное решение.

<u>4 шаг.</u> Если значение f^0 целевой функции целое, а соответствующее ему решение нецелочисленное, то составляется задача T_1: для всех тех j, для которых $z_j^0 \neq 0$, в задаче T_0 небазисная переменная $x_j = 0$. Относительно всех оставшихся небазисных переменных (если такие есть), множество индексов которых обозначим через N_1, сохраняется условие целочисленности. При этих ограничениях задача T_1 состоит в

максимизации $\bar{x}_1 = xp_1^\circ + \sum_{j\in N_1} x_{1j}^\circ(-x_j)$.

<u>5 шаг.</u> Решается непрерывная задача T_1^H, соответствующая задаче T_1. Если условия непрерывной задачи противоречивы, то далее вычисления производятся с 13 шага.

Получается симплексная таблица CT_1:

$$CT_1 = \left[\begin{array}{c|cccc} f^1 & z_1' & z_2' & \ldots & z_{n'}' \\ \hline xp_1' & x_{11}' & x_{12}' & \ldots & x_{1n'}' \\ \vdots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ xp_{m'}' & x_{m'1}' & x_{m'2}' & \ldots & x_{m'n'}' \end{array}\right].$$

<u>6 шаг.</u> Если xp_1' - нецелое, то продолжается процесс решения задачи T_1 по первому алгоритму Гомори.

<u>7 шаг.</u> Если xp_1' - целое и xp_i'; $i = 2,\ldots,m'$, - целые, то найдено оптимальное решение задачи T_1, а значит, и задачи T; конец счета.

<u>8 шаг.</u> Составляется задача T_{i+1}, $i = 1,2,\ldots$, по задаче T_i. Если непрерывная задача, соответствующая задаче T_i, решена и её оптимальная симплексная таблица CT_i имеет вид

$$CT_i = \left[\begin{array}{c|cccc} f^i & z_1^i & z_2^i & \ldots & z_{n^i}^i \\ \hline xp_1^\circ & x_{11}^i & x_{12}^i & \ldots & x_{1n^i}^i \\ \vdots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ xp_{m^i}^i & x_{m^i1}^i & x_{m^i2}^i & \ldots & x_{m^in^i}^i \end{array}\right],$$

то задача T_{i+1}, $i = 1,2,\ldots$, строится так: рассматривается множество Z^i индексов j

$$Z^i = \{ j \mid j \in \{1,\ldots,n^i\} \wedge x_{ij}^i \neq 0 \},$$

и в задаче T_i небазисная переменная x_j полагается равной нулю, если $j \in Z^i$. На оставшиеся небазисные переменные (множество их индексов обозначается через N_{i+1}) сохраняется условие целочисленности. При этих ограничениях задача состоит в максимизации

$$\bar{x}_{i+1} = xp_{i+1}^i + \sum_{j\in N_{i+1}} x_{i+1,j}^i(-x_j).$$

9 шаг. Решается задача $T_{i+1}^{н}$ (непрерывная задача, соответствующая задаче T_{i+1}). Если $T_{i+1}^{н}$ противоречива, то производятся вычисления, начиная с 14 шага.

10 шаг. Если xp_i^i - нецелое, то продолжается процесс решения задачи T_{i+1} по первому алгоритму Гомори.

11 шаг. Если xp_i^i - целое и xp_s^i ($s = i+2,\ldots, m^i$) - целые, то оптимальное решение задачи T найдено; счет закончен.

12 шаг. Если xp_i^i - целое и среди xp_s^i ($s = i+2,\ldots, m^i$) имеется нецелое, то увеличивается i на единицу и производятся вычисления с 8 шага.

13 шаг. В последней задаче с номером T_0 вводится дополнительное ограничение

$$\sum_{j\in N} z_j^0 x_j \geq 1 .$$

Получается новая задача T_0, и производятся расчеты, начиная с 1 шага.

14 шаг. Возвращаемся к задаче $T_i^{н}$, вводится в неё дополнительное ограничение

$$\sum_{j\in N_i} x_{ij}^i x_j \geq 1 ,$$

получается новая задача T_i, и вычисления начинаются с 5 шага, если $i = 1$, или с 9 шага, если $i > 1$.

Алгоритм полностью описан. Перебор получается на 13 и 14 шагах. Его объем зависит от размерностей задач T_i .

ТЕОРЕМА 1. Всегда можем считать, что $n^1 < n^0$, т.е. что размерность задачи T_1 меньше размерности задачи T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в множестве $Z^0 = \{j \mid z_j^0 \neq 0\}$ p элементов. Если $p = 0$, то мы знаем точное значение задачи T . Тогда можем в последнюю внести ограничение $cx = f^0$ и исключить, таким образом, в задаче T одну переменную. Если $p > 0$, то, так как $n^1 = n^0 - p$ и в этом случае $n^1 < n^0$.
Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема, аналогичная теореме 1, справедлива для каждой пары задач T_i и T_{i+1} , т.е. можем считать, что $n^{i+1} < n^i$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Таблица CT_i выглядит следующим образом:

$$
CT_i = \left[\begin{array}{c|cccc}
f^i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
xp_1^i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
xp_{i-1}^i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
xp_i^i & x^i_{i1} & x^i_{i2} & \cdots & x^i_{in^i} \\
\vdots & & & & \\
xp_{m^i}^i & x^i_{m^i 1} & x^i_{m^i 1} & \cdots & x^i_{m^i n^i}
\end{array}\right],
$$

где f^i - целое и xp_k^i, $k=1,\ldots,i-1$ - целые неотрицательные числа.

ТЕОРЕМА 2. Описанный в 1 - 14 шагах алгоритм находит оптимальное целочисленное решение задачи (1)-(4) или устанавливает отсутствие такого за конечное число операций.

Доказательство теоремы 2 следует из построения алгоритма и из конечности первого алгоритма Гомори, которая при указанных предположениях и с применением двойственного лексикографического симплекс-метода имеет место.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Без существенного изменения схемы алгоритм отсечения с перебором может быть распространен на задачи частично целочисленного программирования.

Действительно, рассмотрим задачу (1)-(4), в которой условие (4) заменено на условие

$$x_j \text{ - целое}, \quad j \in K \subset \{1,\ldots,n\}, \tag{16}$$

и предположим, что оптимальное значение целевой функции (1) при ограничениях (2)-(3), (16) есть целое число.

Тогда для применимости указанного алгоритма необходимо 1) решить соответствующую непрерывную задачу, 2) расположить в последней симплексной таблице базисные переменные так, чтобы любая базисная переменная, которая должна быть целой, имела номер меньший, чем любая базисная переменная без требования целочисленности.

Литература

I. GOMORY R.E., Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs, Bull.Amer.Math.Soc., 1958, 64, N 5, pp. 275-278.

2. ГОМОРИ Р.Е., Полностью целочисленный алгорифм целочисленного программирования.- В сб.: "Календарное планирование", М., "Прогресс", 1966, с. 227-240.

3. MARTIN G.T. An Accelerated Euclidian Algorithm for Integer Programming, in R.L.Graves and P.Wolfe(Ed.), Recent Advances in Mathematical Programming, McGraw-Hill, N.-Y., 1963, pp.311-317.

4. ЧЕРВАК Ю.Ю., К вопросу о построении дополнительных ограничений в методе Гомори целочисленного линейного программирования.- Экономика и мат. методы, 1972, т.8, № 3, с. 430-431.

5. PIEHLER J. Über die Verscharfung von Schnitten in der Methode von Gomory bei der rein-ganzzahligen linearen Optimierung, Math.Oper.Forsch.and Statist., 1970, I, N 3, pp. 207-216.

6. КОРБУТ А.А., ФИНКЕЛЬШТЕЙН Ю.Ю., Дискретное программирование. М., "Наука", 1969.

7. КАНТОРОВИЧ Л.В., ГОЛЬШТЕЙН Е.Г., МАКАРОВ В.Л., РОМАНОВСКИЙ И.В., Современный математический аппарат управления экономикой, Вестник АН СССР, 1972, № 10, с. 70-79.

8. ФИНКЕЛЬШТЕЙН Ю.Ю., Метод отсечения и ветвления для решения задач целочисленного линейного программирования. Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 1971, № 4, с.34-38.

9. LAMBERT F., Programmes linéares mixtes, Cahiers du centre d etudes de rech.oper., 1960, V. 2, N I, pp. 47-74.

10. HALDI J., ISAACSON L.M., A computer code for integer solutions to linear programs, Oper.Res., 1965, 13, N 6, pp.946-958.

11. BALINSKI M.L., SPIELBERG K., Methods for integer programming: algebraic, combinatorial and enumerative. in J.F.Aronofsky (Ed.), Progress in oper.res. III, N.-Y., 1969, pp.195-292.

12. РОМАНОВСКИЙ И.В., СОРОКИНА М.Г., Односторонний обход дерева вариантов в методе Лэнд и Дойг. Журнал вычисл. мат. и мат. физ., 1973, т. 13, № 1, с. 221-227.

Поступила в ред.-изд. отд.
4. У. 1973 г.