УДК 517.948:513.8+519.4

ОБ ИЗУЧЕНИИ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОМОЩЬЮ ТРАНСФИНИТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Ю.А.Абрамович, А.И.Векслер

1. В современном функциональном анализе для изучения многих классов пространств недостаточно ограничиваться последовательностями элементов пространства, а надо рассматривать произвольные направления, т.е. совокупности элементов вида $\{x_\alpha\}$, где $\{\alpha\}=A$ – направленное по возрастанию множество без последнего элемента. В этом отношении не представляет исключения теория полуупорядоченных пространств [1] – [5]. Однако в первые годы развития этой теории, т.е. тогда, когда внимание исследователей было приковано, в основном, к изучению K-пространств, часто рассматривались не произвольные направления, а лишь трансфинитные последовательности, т.е. совокупности элементов вида $\{x_\gamma\}$, где $\{\gamma\}=\Gamma$ – множество порядковых чисел (ординалов), меньших некоторого предельного порядкового числа [1] [*]. При этом, как оказалось, для решения ряда вопросов теории K-пространств рассмотрения лишь трансфинитных последовательностей (а не произвольных направлений) вполне хватает. Это относится, например, к теории вполне линейных функционалов. В частности, выяснилось, что понятия вполне линейных функционалов, определяемые в K-пространствах с помощью направлений и с помощью трансфинитных

---

[*] В принципе можно ограничиваться лишь такими $\{x_\gamma\}(\gamma\in\Gamma)$, для которых $\Gamma=W'=\{\gamma:\gamma<\omega'\}$, где ω' – какое-нибудь начальное порядковое число (начальный ординал).

последовательностей, равносильны [4].

Основное достоинство использования трансфинитных последовательностей заключается в том, что они устроены много проще, чем произвольные направления. Однако хорошо известно, что при переходе от K-пространств к K-линеалам рассмотрения лишь трансфинитных последовательностей явно недостаточно. В связи с этим в работах последнего времени, посвященным теории полуупорядоченных пространств, трансфинитные последовательности использовались довольно редко [6].

В настоящей заметке, в п. 2, рассматривается вопрос об условиях равносильности двух определений вполне линейных функционалов в K-пространствах (предл. 4 и прим. 5). Этот вопрос тесно связан с порядковыми топологиями в этих пространствах. В теореме 2 показывается, что, как правило, два различных определения порядковых топологий дают существенно различные топологии даже в случае K-пространств. Однако классы монотонно замкнутых подструктур (или монотонно замкнутых порядково выпуклых подмножеств) в K-пространствах совпадают; это обстоятельство, в частности, гарантирует совпадение двух понятий вполне линейного функционала в K-пространстве.

В п. 3 показывается, что и в "обычных" вопросах функционального анализа в теории K-пространств не всегда можно обходиться трансфинитными последовательностями. Речь идет о проверке условия универсальной монотонной полноты нормы [2] в KN-пространстве (см. прим. 7). Насколько известно авторам, ранее примеров, показывающих недостаточность рассмотрения трансфинитных последовательностей для изучения нормированных свойств в K-пространствах, не приводилось. В этом же п. 3 показывается, что для проверки условия универсальной полунепрерывности нормы [2] в KN-пространстве достаточно соответствующей проверки по трансфинитным последовательностям.

2. Мы в основном будем пользоваться терминологией [4].

Будем различать определения, даваемые с помощью всех направлений и с помощью лишь трансфинитных последовательностей, прибавляя во втором случае к соответствующему термину или символу букву T. Так, под *вполне линейным* (T-*вполне линейным*) *функционалом* в K-линеале X будем понимать такой регулярный функционал f, для которого $f(x_\alpha)\to 0$ для любого направ-

ления $x_\alpha \downarrow 0$ (соответственно $f(x_\gamma) \to 0$ для всякой трансфинитной последовательности $x_\gamma \downarrow 0$). Множества таких функционалов в X будем обозначать соответственно через $\bar{X}$ и $\bar{X}_T$. Под (o) -топологией ((o_T)-топологией) в X будем понимать топологию, замкнутыми множествами в которой являются множества, содержащие все (o) -пределы любых направлений (трансфинитных последовательностей) своих элементов. Под типом $t(X)$ K -линеала X будем понимать супремум мощностей всех порядково ограниченных множеств попарно-дизъюнктных ненулевых элементов из X .

Поскольку непрерывность функционала f в произвольной топологии означает, что для любого $E \subset X$ $f(dE)=df(E)$, то с помощью простого рассуждения получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для K -линеала X множество $\bar{X}$ (соответственно $\bar{X}_T$) есть совокупность всех регулярных функционалов, непрерывных в (o) - топологии (соответственно в (o_T)-топологии).

Отсюда сразу следует, что если в X (o)-топология и (o_T)-топология совпадают, то $\bar{X}=\bar{X}_T$. Однако, как показывает следующая теорема, это совпадение бывает достаточно редко.

ТЕОРЕМА 2. Если X - K -пространство счетного типа, т.е. $t(X) \leq \aleph_0$, то в X (o) - и (o_T) - топологии совпадают. Если же $t(X) \geq c = 2^{\aleph_0}$, то (o_T) - топология строго сильнее (o) - топологии. Таким образом, в предположении справедливости гипотезы континуума (o) - и (o_T) - топологии в K -пространстве совпадают тогда и только тогда, когда оно счетного типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть теоремы очевидна, ибо в K -пространстве счетного типа (o) - (o_T)-топологии обе совпадают с $(o1)$ -топологией (замкнутыми в которой являются множества, содержащие (o)-пределы своих обычных последовательностей элементов).

Для доказательства второй части отметим сначала, что, очевидно, (o_τ)-топология всегда сильнее (o)-топологии или совпадает с ней. Теперь рассмотрим K-пространство $X=m(I)$ всех ограниченных вещественных функций на $I=[C,1]$ и построим в X (o_τ)-замкнутое множество K, не являющееся (o)-замкнутым.

Пусть $A=\{\alpha\}$ - направленное по возрастанию множество всех конечных подмножеств в I. Очевидно, $|A|=c$. Будем строить функции x_α $(\alpha\in A)$ из K в три шага, предварительно условившись для любого $M\subset I$ через $\tilde{M}$ (при фиксированном α) обозначать множество $M\setminus\alpha$.

На первом шагу определим $x_\alpha(\alpha)=1$.

На втором шагу зафиксируем разбиение $I=I_1\oplus I_2$, где $|I_1|=|I_2|=c$. Установим взаимно-однозначное соответствие $\alpha \longleftrightarrow \lambda(\alpha)$ между множеством A и совокупностью всех точек отрезка $[0,1/2]$ и положим $x_\alpha(\tilde{I}_1)=\lambda(\alpha)$.

Третий шаг - самый длинный. Сначала обозначим через $B=\{\beta\}$ совокупность всех счетных подмножеств из I. Очевидно, $|B|=c$. После этого отождествим A с равномощным ему множеством I. Тогда всякое $\beta\in B$ окажется некоторым счетным подмножеством $\{\alpha_n^\beta\}$ $(n\in\mathbb{N})$ в A. Для каждого такого β установим взаимно-однозначное соответствие $\alpha_n^\beta \longleftrightarrow \mu(\alpha_n^\beta)$ между всеми элементами из β и совокупностью всех рациональных чисел отрезка $[0,1/2]$.

После этого представим $I_2=\cup\{I_\beta:\beta\in B\}$, где все I_β несчетны и попарно не пересекаются. Наконец, положим

$$x_\alpha(\tilde{I}_\beta)=\begin{cases}\mu(\alpha_n^\beta), \text{ если } \alpha=\alpha_n^\beta\in\beta,\\ 0, \text{ если } \alpha\notin\beta.\end{cases}$$

Итак, множество $K=\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$ определено, и все x_α различны.

Покажем, что K не является (o)-замкнутым. Действительно, A направлено по включению, а так как (o)-сходимость в X - покоординатная сходимость при условии ограниченности, то $x_\alpha\to 1\notin K$. Проверим (o_τ)-замкнутость K.

В предположении противного найдутся $x\notin K$ и трансфинитная последовательность $\{\alpha_\gamma\}$ $(\gamma\in\Gamma)$ такие, что $x_{\alpha_\gamma}\to x$. Не умаляя общности, можно считать, что все x_{α_γ} различны, а

$\Gamma = W' = \{\gamma : \gamma < \omega'\}$, где ω' - регулярное начальное порядковое число. Рассмотрим два возможных варианта.

I вариант. $\omega' = \omega$, т.е. $x_{\alpha_n} \xrightarrow[n<\omega]{} x$. Рассмотрим счетное множество $\{\alpha_n\} = \beta \in B$. Очевидно, множество $I_\beta \setminus \bigcup\{\alpha_n : n<\omega\}$ непусто. Пусть оно содержит $t_0 \in I$. Тогда $\{x_{\alpha_n}(t_0)\} = \{\mu(\alpha_n^\beta)\}$ плотно в $[0, 1/2]$, и потому числовая последовательность $\{x_{\alpha_n}(t_0)\}$ не может иметь предела. Значит, и $\{x_{\alpha_n}\}$ не имеет (o)-предела.

2 вариант. $\omega' > \omega$. Прежде всего заметим, что множество $E = \{t \in I_1 : x(t) = 1\}$ конечно. Действительно, если допустить противное, то найдется последовательность $\{t_n\} \subset E$. Тогда $x(t_n) = 1$. Но так как (o)-сходимость в X влечет поточечную в I , а все функции x_α принимают значения лишь из множества $[0, 1/2] \cup \{1\}$, то получаем $x_{\alpha_\gamma}(t_n) = 1$ при $\gamma > \gamma_n$. В силу регулярности ω', $\gamma_0 = \sup \gamma_n < \omega'$. А это означает, что $x_{\alpha_\gamma}(\{t_n\}) = 1$ при $\gamma \geq \gamma_0$, что не соответствует действительности.

Пусть теперь $t_0 \in I \setminus E$. Тогда $x_{\alpha_\gamma}(t_0) \neq 1$ при достаточно больших γ . Значит, найдется $\gamma_0 < \omega'$ такое, что $x_{\alpha_\gamma}(t_0) = \lambda(\alpha_\gamma)$ при $\gamma \geq \gamma_0$. Отсюда трансфинитная последовательность чисел $\lambda(\alpha_\gamma)$ сходится к $x(\alpha_\gamma)$. Но этого быть не может, ибо, по построению, все $\lambda(\alpha_\gamma)$ различны, а $\Gamma = W'$ имеет несчетную регулярную мощность. Значит, $x_{\alpha_\gamma} \not\to x$.

Итак, K (o_τ)-замкнуто и не (o)-замкнуто. Отсюда (o_τ)-топология в X строго сильнее (o)-топологии.

Для завершения доказательства второй части теоремы, а значит, и всей теоремы, остается заметить, что если $t(X) \geq c$, то X , очевидно, содержит линейную подструктуру, изоморфную только что рассмотренному K-пространству $m(I)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть множество в K-линеале <u>монотонно (o)-замкнутым</u> (<u>монотонно (o_τ)-замкнутым</u>), если оно содержит пределы монотонных направлений (монотонных трансфинитных последовательностей) своих элементов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть в K-линеале X совпадают классы порядково выпуклых монотонно (o)-замкнутых и монотонно (o_τ)-замкнутых под-*

структур. Тогда $\overline{X} = \overline{X}_T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку всегда, очевидно, $\overline{X} \subset \overline{X}_T$, достаточно проверить лишь, что если $f \in \overline{X}_T$ и $f > 0$, то $f \in \overline{X}$. Допустим, что это не так. Тогда найдется направление $x_\alpha \downarrow 0$, для которого $f(x_\alpha) \geq 1$ при всех x_α.

Пусть $K = \cup\{[x_\alpha, +\infty) : \alpha \in A\}$, где $[x, +\infty) = \{y \in X : y \geq x\}$. Тогда K - порядково выпуклая подструктура: если $x_1, x_2 \in K$, то $x_i \geq x_{\alpha_i}$ $(i = 1, 2)$ и $x_1 \wedge x_2 \in [x_{\alpha_0}, +\infty)$ при $\alpha_0 > \alpha_i$ $(i = 1, 2)$. Кроме того, $\forall x \in K$ $f(x) \geq 1$. Построим наименьшую монотонно (o_T)-замкнутую подструктуру $H \subset X$, содержащую K, следующим трансфинитным процессом.

Для всякого $M \subset X$ через $M^{(1)}$ обозначим множество, получающееся присоединением к M всех (o)-пределов монотонно убывающих трансфинитных последовательностей элементов из M.

Для любого порядкового числа γ положим $K^{(\gamma+1)} = (K^{(\gamma)})^{(1)}$, а для предельного γ положим $K^{(\gamma)} = \cup\{K^{(\beta)} : \beta < \gamma\}$. Ясно, что для некоторого γ_0 окажется $K^{(\gamma_0+1)} = K^{(\gamma_0)}$. Положим $H = K^{(\gamma_0)}$. Очевидно, H монотонно (o_T)-замкнуто и порядково выпукло. Проверим, что H - подструктура в X.

Достаточно убедиться, что $x, y \in H \Rightarrow x \wedge y \in H$. Пусть, к примеру, $x, y \in K^{(1)}$. Тогда в K найдутся трасфинитные $x_\gamma \downarrow x$, $y_\beta \downarrow y$. Имеем $x_\gamma \wedge y_\beta \in K$, отсюда $x_\gamma \wedge y_\beta \downarrow_\beta x_\gamma \wedge y$. Значит, $x_\gamma \wedge y \in K^{(1)}$. Далее, $x_\gamma \wedge y \downarrow x \wedge y$. Значит, $x \wedge y \in K^{(2)}$. С помощью трансфинитной индукции рассуждение можно провести и для любых $x, y \in H$.

Итак, H - монотонно (o_T)-замкнутая порядково выпуклая подструктура в H. Так как $f \in \overline{X}_T$, то $\forall M \subset X$ $\forall x \in M^{(1)}$ $f(x) \geq \inf\{f(y) : y \in M\}$. Отсюда сразу вытекает, что $\forall x \in H$ $f(x) \geq 1$. В силу условия предложения, H монотонно (o)-замкнуто. Но так как $\{x_\alpha\} \subset K \subset H$ и $x_\alpha \downarrow 0$, то $0 \in H$. Однако $f(0) = 0 < 1$. Противоречие и означает, что $f \in \overline{X}$, что и завершает доказательство.

Хорошо известно, что в K-пространстве X всякая (даже не обязательно порядково выпуклая) монотонно (o_T)-замкнутая подструктура монотонно (o)-замкнута (см., например, [7]). Отсюда, во-первых, и следует, что $\overline{X} = \overline{X}_T$. Во-вторых, отсюда видно, что (o) и (o_T)-топологии отличаются в K-про...

странстве не столь уж значительно. В силу последнего обстоятельства изучение K -пространств с помощью лишь трансфинитных последовательностей и может привести к определенным успехам. Теперь посмотрим, как обстоит дело с равенством $\bar{X}=\bar{X}_T$ в случае K_σ-пространства X.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть X - K_σ-пространство и $t(X)\leq\aleph_1$. Тогда в X совпадают классы монотонно (o)-замкнутых и монотонно (o_T)-замкнутых подструктур. Отсюда $\bar{X}=\bar{X}_T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K - монотонно (o_T)-замкнутая подструктура. Для проверки монотонной (o) -замкнутости K достаточно убедиться, что K замкнуто относительно существующих в X супремумов множеств H элементов из K. Ввиду того, что $t(X)\leq\aleph_1$, достаточно ограничиться случаем, когда мощность $H\leq\aleph_1$. При этом случай счетного H тривиален.

Итак, пусть $x_\gamma\in K$ $(\gamma<\omega_1)$ и $x=\sup x_\gamma$. Так как X - K_σ-пространство и любое множество $\{\gamma':\gamma'\leq\gamma\}$ не более чем счетно, то существуют $y_\gamma=\sup\{x_{\gamma'}:\gamma'\leq\gamma\}$. Так как K - монотонно (o_T)-замкнутая подструктура, то $\{y_\gamma\}\subset K$. Но, очевидно, $y_\gamma\uparrow x$. Поэтому $x\in K$ опять в силу монотонной (o_T)-замкнутости K. Предложение доказано.

Следующий пример показывает, что это предложение не может быть усилено.

ПРИМЕР 5. Пусть $S=\{s\}$ - произвольное множество мощности $>\aleph_1$. Через X обозначим K -пространство всех ограниченных на S функций x, для каждой из которых $x(s)=x_\infty=const$ вне счетного подмножества $S(x)\subset S$ (с естественными операциями и порядком). Очевидно, $t(X)=|S|$. Укажем T - вполне линейный функционал на X, не являющийся вполне линейным. Таким является $f(x)=x_\infty$.

Действительно, если $x_\gamma\downarrow 0$, где $\{x_\gamma\}$ - трансфинитная последовательность, то, очевидно, $(x_\gamma)_\infty\to 0$, т.е. $f(x_\gamma)\to 0$. С другой стороны, пусть $A=\{\alpha\}$ - упорядоченное по включению направление всех конечных подмножеств в S. Пусть $x_\alpha(\alpha)=0$, $x_\alpha(S\setminus\alpha)=1$. Тогда $x_\alpha\downarrow 0$, однако $(x_\alpha)_\infty=1$, т.е. $f(x_\alpha)=1$.

3. Здесь мы рассмотрим два хорошо известных и важных

свойства нормированных структур и трансфинитные аналоги этих свойств. Как будет показано, лишь одно из этих свойств в случае K -пространства равносильно своему трансфинитному аналогу.

Напомним [2], что норма в KN -пространстве X называется универсально монотонно полной, если выполнено следующее условие:

(B′) если $0 \leqslant x_\alpha \uparrow$ и $\sup \|x_\alpha\| < +\infty$, то существует $\sup x_\alpha$. Норма в X называется универсально полунепрерывной, если выполнено следующее условие:

(C′) если $0 \leqslant x_\alpha \uparrow x$, то $\|x\| = \sup \|x_\alpha\|$.

В соответствии с нашей договоренностью определяются условия (B'_τ) и (C'_τ).

ТЕОРЕМА 6. В KN -пространстве X условия (C′) и (C'_τ) равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через U положительную часть единичного шара в X. Очевидно, условие (C′) (соответственно (C'_τ)) означает, что U монотонно (o)-замкнута (соответственно монотонно (o_τ)-замкнута). Таким образом, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что в K -пространстве всякое порядково выпуклое монотонно (o_τ)-замкнутое множество H монотонно (o)-замкнуто.

Пусть $K = \{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A) \subset H$ и $x_\alpha \uparrow x$.

Докажем, что для любого $M \subset K$ $y = \sup M \in H$. Это легко сделать, пользуясь трансфинитной индукцией. Действительно, если M конечно, то $y = x_{\alpha_1} \vee \ldots \vee x_{\alpha_n} \in H$, так как K - монотонно возрастающее направление и H порядково выпукло. Предположим теперь, что $|M| = \aleph_\tau \leqslant |A|$ и для всех $\mathfrak{m} < \aleph_\tau$ утверждение уже доказано. Можно считать, что $M = \{x_{\alpha_\gamma} : \gamma < \omega_\tau\}$. Положим $M_\gamma = \{x_{\alpha_{\gamma'}} : \gamma' \leqslant \gamma\}$, $y_\gamma = \sup M_\gamma$. Тогда $|M_\gamma| < \aleph_\tau$ и, в силу предположения, $y_\gamma \in H$. Но $y_\gamma \uparrow y$. Значит, $y \in H$ в силу монотонной (o_τ)-замкнутости H. Итак, $\sup M \in H$ для любого $M \subset K$. В частности, $x = \sup K \in H$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко показать, что во всяком K_σ-пространстве типа $\leqslant \aleph_1$ всякое монотонно (o_τ)-замкнутое порядково выпуклое множество монотонно (o)-замкнуто. Отсюда следует,

что для такого K_σ -пространства теорема остается в силе.

Теперь мы приведем пример банахова KN -пространства, в котором выполнено (B'_τ), но (B') не выполнено.

ПРИМЕР 7. Пусть S_n - множество мощности $\aleph_n$ $(n \in N)$ и $S_{n_1} \cap S_{n_2} = \emptyset$ при $n_1 \neq n_2$. Положим $S = \cup\{S_n : n \in N\}$. Через Δ_n обозначим совокупность всех подмножеств в S_n мощности $< \aleph_n$. Через P_n обозначим оператор сужения функций, заданных на S, на множество S_n.

Рассмотрим банахово KN -пространство X, состоящее из всех вещественных функций на S, для которых $\|x\|_X = \sup \|P_n x\|_n < \infty$, где

$$\|P_n x\|_n = \sup\{|x(s)| : s \in S\} + n \inf\{\sup[|x(s)| : s \in S_n \setminus \mathcal{D}] : \mathcal{D} \in \Delta_n\}$$

(операции и порядок на X естественные).

В X не выполняется условие (B'). Действительно, возрастающее направление χ_α характеристических функций конечных подмножеств α множества S таково, что $\|\chi_\alpha\| = 1$, но $\sup \chi_\alpha \bar{\in} X$. Докажем, что в X выполняется (B'_τ).

Допустим противное. Тогда в X найдется трансфинитная $0 \leq x_\gamma \uparrow$ $(\gamma \in \Gamma)$ такая, что $\|x_\gamma\|_X \leq 1$, но функция $x(s) = \sup x_\gamma(s)$ не входит в X, т.е. $\|x\|_X = +\infty$. Ясно, что $\forall s \in S$ $0 \leq x(s) \leq 1$. Так как $\|x\|_X = \infty$, то существует первое натуральное n, для которого $\|P_n x\|_n > C > 2$. Следовательно, множество $E = \{s \in S_n : (p_n x)(s) > (C-1)/n\}$ имеет мощность $\aleph_n$ (действительно, если $|E| < \aleph_n$, то $\|P_n x_n\|_n \leq 1 + n[(C-1)/n] = C$). Для каждого $s \in E$ через γ_s обозначим первый индекс γ такой, что $x_\gamma(s) > (C-1)/n$. Отметим, что при этом может оказаться $\gamma_{s_1} = \gamma_{s_2}$ для $s_1 \neq s_2$. Обозначим $\Gamma' = \{\gamma : \gamma = \gamma_s, s \in E\}$. Так как $E \subset S_n$, то $|\Gamma'| \leq \aleph_n$.

Покажем, что Γ' не может быть конфинально в Γ. Допустим противное и зафиксируем натуральное $m > n$. Поскольку $\|x_\gamma\|_X \leq 1$ для любого $\gamma \in \Gamma$, то и $\|P_m x_\gamma\| \leq 1$ для $\gamma \in \Gamma'$ и, следовательно, для любого $\gamma \in \Gamma'$ в S_m найдется подмножество $\mathcal{D}_\gamma \in \Delta_m$, такое, что вне $\mathcal{D}_\gamma$ функция $p_m x_\gamma(s) \leq 1/m$ (если бы такого $\mathcal{D}_\gamma$ не нашлось, то отсюда бы следовало, что $\|P_m x_\gamma\|_m \geq 1/m + m(1/m) > 1$). Но тогда множество $\mathcal{D} = \cup\{\mathcal{D}_\gamma : \gamma \in \Gamma'\} \in \Delta_m$, ибо $|\mathcal{D}| \leq \aleph_{m-1} |\Gamma'| \leq \aleph_{m-1} \cdot \aleph_n = \aleph_{m-1}$. Отсюда вытекает, что $x(s) \leq 1/m$ вне

$\mathcal{D} \in \Delta_m$ и, следовательно, $\|P_m x\|_m \leq 1 + m(1/m) = 2$. В силу произвольности $m > n$ отсюда следует, что $x \in X$ вопреки предположению.

Итак, Γ' не может быть конфинально в Γ. Поэтому существует $\gamma_0 \in \Gamma$ такое, что $\gamma_0 \geq \gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma'$. Поэтому для всех $s \in E$ имеем $x_{\gamma_0}(s) \geq x_{\gamma_1}(s) \geq (C-1)/n$. Значит,

$$\|x_{\gamma_0}\|_X \geq \|P_n x_{\gamma_0}\|_n > n\,[(C-1)/n] = C-1 > 1,$$

что невозможно. Противоречие и показывает, что в X выполнено (B'_γ).

Рассмотренный пример показывает ограниченность метода использования лишь трансфинитных последовательностей (вместо всех направлений) даже для случая K-пространств. Отметим в заключение, что в [8] найдено (необходимое и достаточное) условие, при выполнении которого в K-пространстве $(B'_\gamma) \Leftarrow \Rightarrow (B')$

Литература

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М., ГИТТЛ, 1950.
2. NAKANO H. Modulares semi-ordered linear spaces, Tokyo, 1950.
3. NAKANO H. Modern spectral theory, Tokyo, 1950.
4. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.
5. LUXEMBURG W.A.J., Zaanen A.C. Riess spaces, I, 1971.
6. ВЕКСЛЕР А.И., ГЕЙЛЕР В.А. О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств, Сиб. мат. журн., 1972, т. 13, вып. 1, с. 43-51.
7. BRUNS G. A lemma on directed sets and chains, Arch.Math., 1967, v.18, № 6, p.561-563.
8. АБРАМОВИЧ Ю.А. О некоторых свойствах нормы в нормированных структурах и в их максимальных нормированных расширениях. Канд. диссертация, Ленингр. гос. ун-т, 1972.

Поступила в ред.-изд. отд.
26. II. 1973 г.