УДК 517.948 : 513.8 + 519.4

О K_σ-ПОПОЛНЕНИИ АРХИМЕДОВА K-ЛИНЕАЛА

А.С.Бондарев

Ниже показывается, что ряд теорем, известных для K-пополнения (дедекиндова пополнения) архимедова K-линеала (линейной структуры), переносится на K_σ-пополнение архимедова K-линеала. Мы пользуемся в основном терминологией и обозначениями из [1] и [2].

Известно, что множество всех компонент $B(X)$ K-линеала X, упорядоченное по включению, образует полную булеву алгебру. Через $B_\sigma(X)$ обозначим наименьшую σ-полную подалгебру $B(X)$, содержащую совокупность всех главных компонент в X. Компоненты из $B_\sigma(X)$ назовём σ-компонентами, а K-линеал с проекциями в σ-компоненты – K-линеалом с σ-проекциями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Наименьший K-линеал с σ-проекциями $p_\sigma X$, содержащий данный K-линеал X и содержащийся в pX,*) назовём пополнением X с помощью σ-проекций, или P_σ-пополнением X.

Для любого K-линеала X P_σ-пополнение X существует.

ТЕОРЕМА I. *Для любого K-линеала с σ-проекциями Y, содержащего K-линеал X в качестве псевдоплотного K-подлинеала, найдётся K-подлинеал с σ-проекциями*

---

*) pX есть пополнение X с помощью проекций, или P-пополнение [3].

$Y_0 \supset X$, изоморфный $\rho_\sigma X$ при изоморфизме, оставляющем на месте элементы из X.

Следовательно, P_σ-пополнение X есть наименьший из всех K-линеалов с σ-проекциями, содержащих X в качестве плотного K-подлинеала. Используя аппарат реализаций K-линеалов, можно указать конструкцию P_σ-пополнения, подобную конструкции P-пополнения [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Наименьшее K_σ-пространство $\kappa_\sigma X$, содержащее данный архимедов K-линеал X и содержащееся в κX – K-пополнении X, назовём K_σ-пополнением.

Для любого архимедова K-линеала K-пополнение существует и единственно [I]. Более того,

ТЕОРЕМА 2. Для любого K_σ-пространства Y, содержащего K-линеал X в качестве плотного K-подлинеала, найдётся K-подпространство $Y_0 \supset X$, изоморфное $\kappa_\sigma X$ при изоморфизме, оставляющем на месте элементы из X.

В [I] доказана формула $\kappa X = \tau\rho X$, где κX, ρX, τX – соответственно K, P, R – пополнения архимедова K-линеала X. Для K-пополнения справедлив аналогичный результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – архимедов K-линеал. Тогда для любого $\hat{x} \in \kappa_\sigma X$ найдётся возрастающая последовательность элементов $\{x_n\} \subset \rho_\sigma X$ такая, что $x_n \xrightarrow{(\tau)} x$ в $\kappa_\sigma X$, т.е. $\kappa_\sigma X = \tau\rho_\sigma X$.

Подчеркнём, что хотя в общем случае R-пополнение архимедова K-линеала получается из X некоторым трансфинитным процессом (τX можно получить в качестве борелевской надстройки над X в κX относительно (τ)-сходимости), теорема 3 гарантирует, что переход от $\rho_\sigma X$ к $\kappa_\sigma X$ укладывается в обычную схему Кантора.

В силу известной теоремы Л.В.Канторовича ([4], гл. XI, 2.13), всякий регулярный оператор допускает распространение

с X на $\kappa_\sigma X$. Из формулы $\kappa_\sigma X = \tau p_\sigma X$ и (τ)-непрерывности регулярных операторов вытекает, что для архимедовых K-линеалов с σ-проекциями такое распространение единственно, т.е. $H_\tau(X \to Y) = H_\tau(\kappa_\sigma X \to Y)$ для любого K-пространства Y. Отметим, что наличие σ-проекций в ряде случаев является и необходимым условием для совпадения всех K-пространств регулярных операторов в X и $\kappa_\sigma X$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X есть архимедов K-линеал ограниченных элементов. Для того, чтобы всякий регулярный функционал допускал в точности одно регулярное распространение на $\kappa_\sigma X$ необходимо и достаточно, чтобы X был K-линеалом с σ-проекциями.

Аналогичные теоремы для K-пополнения доказаны в [5]. Известно, что если X есть архимедов K-линеал с проекциями, а Y есть K-подлинеал κX, содержащий X, то Y тоже есть K-линеал с проекциями [6]. И этот результат переносится на K-пополнение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X есть архимедов K-линеал с σ-проекциями. Если Y есть K-подлинеал $\kappa_\sigma X$, содержащий X, то Y есть K-линеал с σ-проекциями.

Введение двух новых понятий P_γ и K_γ-пополнения архимедова K-линеала позволяет обобщить все упомянутые выше теоремы.

Будем говорить, что отображение γ, сопоставляющее каждому K-линеалу X некоторую систему его компонент $\gamma(X)$ удовлетворяет условию (К), если

1) для любого изоморфизма T K-линеалов X и Y $T(\gamma(x)) = \gamma(y)$;

2) для любого K-линеала $\mathcal{Z}$, содержащего K-линеал X псевдоплотным образом, $\gamma(\mathcal{Z})|_X \supset \gamma(X)$.*)

*) Через $T(\gamma(x))$ мы обозначим $\{TU : U \in \gamma(x)\}$, через $\gamma(\mathcal{Z})|_X$ множество $\{U \cap X : U \in \gamma(\mathcal{Z})\}$, содержащееся в $B(X)$ [3].

Компоненты $\gamma(X)$ назовём γ-компонентами в X, а K-линеал с проекциями в γ-компоненты – K-линеалом с γ-проекциями.

Примерами отображений, удовлетворяющих условию (К), могут служить: отображение, сопоставляющее каждому K-линеалу множество всех его (главных) компонент; отображение γ_σ, сопоставляющее каждому K-линеалу совокупность всех его σ-компонент; отображение, сопоставляющее каждому X две его компоненты – непрерывную и дискретную; отображение, сопоставляющее X компоненты, порождённые множеством элементов X мощностью, меньшей $\aleph_\alpha$, и другие.

Наименьший K-линеал с γ-проекциями $p_\gamma X$, содержащий данный K-линеал X и содержащийся в pX, назовём пополнением X с помощью γ-проекций, или P_γ-пополнением X. Архимедов K-линеал с γ-проекциями, полный относительно сходимости с регулятором, назовём K_γ-пространством. Наименьшее K_γ-пространство $\kappa_\gamma X$, содержащее данный архимедов K-линеал X и содержащееся в κX, назовём K_γ-пополнением X.

Очевидно, если γ сопоставляет каждому X множество всех его компонент (всех σ-компонент), то мы приходим к определению K-пространства (K_σ-пространства) и K-пополнения (K_σ-пополнения) архимедова K-линеала.

При некоторых ограничениях на отображение γ теоремы I–5 останутся в силе, если σ в них заменить на γ. В частности, будет справедлива формула $\kappa_\gamma X = r p_\gamma X$.

Литература

I. ВЕКСЛЕР А.И. О новой конструкции дедекиндова пополнения векторных структур и l-групп с делением. Сиб.мат.журн., 1969, т.10, вып.6, с.1206-1213.

2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.

3. ВЕКСЛЕР А.И. Линейные пространства с дизъюнктными элементами и превращение их в векторные структуры. Учён. зап. ЛГПИ им. А.И.Герцена, 1967, т. 328, с.19-43.

4. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

5. ВЕКСЛЕР А.И. О гомоморфизме между классами регулярных операторов в K-линеалах и в их пополнениях. Изв. вузов, Матем., 1960, № 1(14), 48-57.

6. ВЕКСЛЕР А.И. Представления полуупорядоченного пространства с помощью функций и их применения к общей теории полуупорядоченных пространств. Докторская диссертация. ЛГПИ им. А.И.Герцена, 1967.

Поступила в ред.-изд.отд.

26. II. 1973 г.