УДК 513.88.

О СВЯЗИ МЕЖДУ ОТНОСИТЕЛЬНО РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТЬЮ И НОРМАЛЬНОСТЬЮ КОНУСА В УПОРЯДОЧЕННОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.А.Гейлер, И.Ф.Даниленко, И.И.Чучаев

Хорошо известно [I], [2], какую роль в теории упорядоченных векторных пространств играет относительно равномерная сходимость - сходимость с регулятором. Пусть X - архимедово упорядоченное векторное пространство с конусом K. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к x с регулятором $r \in K$ $(x_n \xrightarrow{r} x)$, если $\{x_n\}, x \in X_r = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} n[-r, r]$ и $x_n \to x$ по норме

$$\|x\|_r = \inf\{\lambda : x \in \lambda[-r, r]\}.$$

Если X - банахово пространство, а K - замкнутый и нормальный конус в X, то для каждого $r \in K$ подпространство X_r полно по $\|\cdot\|_r$ -норме [2]. В этом случае мы говорим, что X r- полно. В настоящей работе показано, что условие нормальности полного конуса в метризуемом пространстве является не только достаточным, но и необходимым условием r-полноты пространства.

ТЕОРЕМА I. Пусть (X, τ) - метризуемое ТВП и K - полный конус в X. Для того чтобы X было r - полным, необходимо и достаточно, чтобы K был нормальным конусом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Достаточность. В условиях теоремы для любого $z > 0$ интервал $[-z, z]$ - полное множество в (X, τ). Конус K - нормальный в (X, τ), поэтому $[-z, z]$ - ограниченное множество в (X, τ) (см. [3] стр. 272), а тогда, по общей теореме (см. [3], стр. 30, п.I.6.), X z-полно по $\| \|_z$ -норме.

б) Необходимость. Пусть X z-полно. Рассмотрим на X_z топологию τ_z -верхнюю грань топологии τ и топологии, определяемой $\| \|_z$ -нормой. Пространство (X_z, τ_z) -метризуемое ТВП и базис окрестностей нуля в (X_z, τ_z) образуют множества $V_n = [-\frac{z}{n}, \frac{z}{n}] \cap \mathcal{U}_n$, где $\mathcal{U}_n$ - замкнутая окрестность нуля из счетного базиса окрестностей нуля в (X, τ). Ясно, что каждое V_n - полное множество в (X, τ), а так как топология τ_z сильнее τ, то (X_z, τ_z) - полное метризуемое ТВП (см. [3], стр. 30, п.I.6.). Топология τ_z сильнее топологии, определяемой $\| \|_z$ -нормой, следовательно, по теореме Банаха о гомоморфизме, τ_z совпадает с топологией, определяемой $\| \|_z$ -нормой. Отсюда следует, что сходимость по $\| \|_z$ -норме влечет τ -сходимость.

Для доказательства нормальности конуса достаточно показать, что совокупность K -насыщенных оболочек множеств $\mathcal{U}_n$ [ж)] образует базис окрестностей нуля в (X, τ) ([3], стр. 271). Пусть $\mathcal{U}_n$ симметричны и удовлетворяют условию: $n(\mathcal{U}_n + \mathcal{U}_n) \subset \mathcal{U}_{n-1}$ при всех $n \geq 2$. Допустим, что существует такое n_0, что $[\mathcal{U}_n] \not\subset \mathcal{U}_{n_0}$ для всех n. Это значит, что для некоторых $y_n, z_n \in \mathcal{U}_n$ и $x_n \in [y_n, z_n]$ $(n \geq 1)$ имеем $x_n \bar{\in} \mathcal{U}_{n_0}$. Отсюда следует, что $0 \leq x_n - y_n \leq z_n - y_n = u_n$. Так как $nu_n = nz_n - ny_n \in n\mathcal{U}_n + n\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n-1}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ сходится в (X, τ). Пусть z -его сумма, очевидно, $z \geq 0$. Из неравенств $\frac{1}{n} z \geq x_n - y_n \geq 0$ вытекает, что $x_n - y_n \xrightarrow{z} 0$, откуда $x_n - y_n \xrightarrow{\tau} 0$. Но $y_n \xrightarrow{\tau} 0$, поэтому $x_n \xrightarrow{\tau} 0$, что противоречит $x_n \bar{\in} \mathcal{U}_{n_0}$ для любого n.

СЛЕДСТВИЕ I. Если (X, τ) - метризуемое ТПВ, K - полный конус в X и вся-

---

ж) Подмножество $A \subset X$ называется K -насыщенным, если $A = [A] \overset{def}{=} (A + K) \cap (A - K)$.

кое счетное порядково ограниченное множество из K имеет $supremum$, то K - нормальный конус в (X,τ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная оболочка конуса K является K_σ -пространством, которое τ-полно ([I], гл. У.3.I.).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X - банахово пространство и одновременно K - линеал с замкнутым конусом положительных элементов X_+. На X существует эквивалентная норма, в которой X является KN - линеалом тогда и только тогда, когда X τ- полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X τ-полно, то X_+ - нормальный конус. Конус X_+ несплющен в X, следовательно [4], [5], X - KN-линеал в эквивалентной норме. Обратно, если X - KN- линеал в эквивалентной норме, то X_+ - нормальный конус и, значит, X τ-полно.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть X - банахово пространство и одновременно K - линеал с замкнутым конусом положительных элементов X_+, а (Y,τ) - метризуемое ЛВП с полным конусом Y_+, так что $(Y_+ - Y_+)$-K - пространство, и пусть K - конус всех положительных операторов из X в Y. Тогда

а) $K \subset L(X,Y)$ - пространство непрерывных линейных операторов из X в Y;

б) K - нормальный конус в операторной топологии $L(X,Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию I, Y_+ - нормальный конус в (Y,τ). Он нормален также и в слабой топологии пространства (Y,τ). По теореме 5.5, гл. У [3], любая положительная линейная форма на X непрерывна. Поэтому для доказательства а) достаточно сослаться на п.5.6, гл. У [3]. Так как X_+- $\mathcal{S}$ -конус в X (следствие из теоремы 3.5.[3]), а Y_+ -

нормальный конус в (Y,τ), то б) вытекает из п. 5.2, гл. У [3].

Следующий пример показывает, что в теореме I условие полноты конуса существенно.

Пусть m - пространство всех ограниченных последовательностей с обычным упорядочением. Введем в m новую норму: $\|x\| = |x_1| \vee \sup\limits_{i\geq 1} |x_i - x_{i+1}|$. Конус последовательностей с неотрицательными координатами не нормален в m с такой нормой: если $y_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1, 1-\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0)$, $x_n = (0,0,\dots,1,0,\dots,0)$, то $0 \leq x_n \leq y_n$, но $\|y_n\| = \frac{1}{n}$, $\|x_n\| = 1$. В то же время m - K - пространство, следовательно, оно τ - полно.

Если X - векторное пространство с конусом K, то на X определена топология τ_0 - сильнейшая локально выпуклая топология на X, в которой любой порядковый интервал ограничен. Топология τ_0 определяется только порядковой структурой пространства. Если X - одновременно ЛВП, то представляют интерес условия, когда топология τ_0 совпадает с исходной топологией пространства. В следующей теореме приведены условия, достаточные для этого.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X,τ) - пространство Фреше, K - замкнутый, воспроизводящий конус в X. Эквивалентны:

а) X τ - полно,

б) K - нормальный конус,

в) $\tau_0 = \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что а)$\Longleftrightarrow$б), доказано в теореме I.
в)$\Longrightarrow$ а): если $\tau_0 = \tau$, то каждый порядковый интервал ограничен в (X,τ). Тогда из доказательства достаточности в теореме I вытекает τ - полнота X.
б)$\Longrightarrow$ в): ЛВП (X,τ_0) и (X,τ) - пространства Макки, причем $(X,\tau_0)' = X^b$ (п. 6.I, гл. У [3]), а $(X,\tau)' = X^+$ (обозначения X^b, X^+ из [3], гл. У), так как $(X,\tau)' = K' - K'$ (следствие 3, п. 3.3, гл. У [3]) и K' - сопряженный конус в $(X,\tau)'$ совпадает с конусом всех положительных линейных форм на X. Ясно, что $X^+ \subseteq X^b$. Для доказательства $\tau_0 = \tau$ достаточно доказать равенство $X^+ = X^b$.

От противного. Пусть $f \in X^b$, но $f \notin X^+$, тогда найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} 0$, но $f(x_n) \not\to 0$.

Топологическая сходимость в метризуемом ЛВП устойчива, поэтому найдется числовая последовательность $\lambda_n \uparrow +\infty$ такая, что $\lambda_n x_n \xrightarrow{\tau} 0$.

Переходя к подпоследовательности, получаем $\lambda_{n_k} x_{n_k} \xrightarrow{\tau} 0$ $\lambda_{n_k} f(x_{n_k}) \to +\infty$. Обозначая последовательность $\{\lambda_{n_k} x_{n_k}\}$ снова через $\{x_n\}$, имеем $x_n \to 0$, $f(x_n) \to +\infty$. Конус K несплющен и нормален в (X, τ), поэтому топология $\tau_+ = \tau$ [4],[5]. По теореме 2 [4], существуют последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ такие, что $u_n \xrightarrow{\tau} 0$, $v_n \xrightarrow{\tau} 0$ и $u_n, v_n \geqslant 0$; $u_n \geqslant x_n \geqslant -v_n$ для каждого n. Переходя к подпоследовательности, можно добиться того, чтобы ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_{n_k}$ сходились в (X, τ). Пусть u и v - их суммы. Тогда $u \geqslant x_{n_k} \geqslant -v$ для любого натурального k, и в то же время $f(x_{n_k}) \to +\infty$, что противоречит ограниченности f на интервале $[-v, u]$, $f \in X^b$. Эта теорема обобщает некоторые результаты о порядковой топологии из [3].

Литература

1. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, 1961.
2. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А. Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз, 1961.
3. ШЕФЕР Х. Топологические векторные пространства. "Мир", М., 1971.
4. ДАНИЛЕНКО И.Ф. О связи между топологией и полуупорядочениями в локально выпуклых пространствах с одним или двумя конусами.- "Оптимальное планирование", вып. 17, 1970.
5. ДАНИЛЕНКО И.Ф. О нормальных и оштукатуриваемых конусах в локально выпуклых пространствах. Теория функций, функциональный анализ и их приложения. № 15,, 1972.

Поступила в ред.-изд.отд.
26. II. 1973 г.