1973 г.   О П Т И М И З А Ц И Я   Выпуск 12(29)

УДК 517.43

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С.И.Жданов

В [I] неоднократно подчеркивается, что между поведением линейных систем и свойствами линейных операторов, действующих в векторных (в частности, в банаховых) пространствах, существует тесная связь; каждая линейная система может быть представлена в виде $T_\alpha x = y$, где $x \in X$ – векторное пространство входных воздействий, $y \in Y$ – некоторое векторное пространство, T_α – линейные операторы, действующие из X в Y, $\alpha \in \{\alpha\}$ – множество параметров; вообще говоря, возможна ситуация $T_\alpha \equiv T$ для всех $\alpha \in \{\alpha\}$.

Под поведением системы мы понимаем следующее: некоторое свойство (или совокупность свойств), присущее элементам (или множествам) пространства X, система преобразует в свойство (или совокупность свойств), присущее элементам (или множествам) пространства $T_\alpha X \subset Y$.

Представив линейную систему формулой $T_\alpha x = y$, можно получить информацию о поведении системы, если известны свойства операторов T_α, $\alpha \in \{\alpha\}$ (например, непрерывность в каких-либо топологиях или псевдотопологиях, компактность и т.п.), или аналитическое представление операторов T_α, по которому мы можем судить об их свойствах. Это – прямая задача.

Обратная задача – по поведению системы получить информацию о свойствах операторов, в частности, что особенно важно, об аналитическом представлении. В функциональных пространствах одним из классов линейных операторов является класс интегральных операторов, задаваемых аналитическим выражением $(T_\alpha x)(s) = K(s,t)x(t)d\mu$. Связь интегральных операторов с линейны-

ми системами отмечена, например, в [2] (стр. 450): любая антисипативная система с нулевым начальным состоянием задается некоторым интегральным оператором. Решив обратную задачу и получив интегральное представление, можно далее решать и прямую задачу, исследуя, например, свойство ядер $K_\alpha(s,t)$.

Ниже, используя методы функционального анализа, в частности, методы теории полуупорядоченных пространств, мы будем в основном решать обратную задачу – задачу нахождения аналитического выражения по поведению системы.

Терминология полуупорядоченных пространств взята из [3], [4].

Мы рассматриваем линейные операторы специального вида (см. I.I), определенные на K-пространстве X и принимающие значения в линейном многообразии Y, элементами которого являются классы эквивалентности измеримых функций.

Эти операторы являются обобщением интегральных операторов, действующих в функциональных пространствах. Основанием для такого утверждения служит то соображение, что интеграл можно рассматривать как существенно положительный (O)-линейный функционал над пространством ограниченных элементов (во всяком случае тогда, когда множество, на котором определены функции, имеет конечную меру).

Исходя из этого, следует ожидать, что интегральность оператора зависит от свойств пространств и оператора, связанных с отношением порядка, тогда как топологические свойства (если они не связаны с порядком) могут не играть никакой роли.

Статья состоит из настоящего введения и шести частей.

В первой части исследуются интегральные операторы и задача о представимости ставится в общей форме. Во второй части, исходя из представления оператора на подпространстве, даются условия представимости на всем пространстве. В третьей части даются условия представимости оператора, определенного на K-пространстве ограниченных элементов, использующие топологические понятия, а в четвертой – использующие понятия только полуупорядоченных пространств. В пятой части рассматриваются некоторые свойства операторов, в частности, вопрос о непрерывности. Шестая часть – заключение.

I°. В этой части исследуются интегральные операторы и задача о представимости ставится в общей форме.

Пусть (Ω', μ') – пространство с конечной положительной

мерой, (Ω , μ) – пространство с σ -конечной положительной мерой; $S_1(R)=S_1(R,\Omega',\mu')$, $S(R)=S(R,\Omega,\mu)$ – линейные пространства, элементами которых являются классы эквивалентности вещественнозначных μ' -измеримых (соответственно μ -измеримых) функций; X – K -пространство, содержащееся в $S_1(R)$ такое, что g – класс эквивалентности функции, тождественно равной единице, содержится в X ; Y – линейное многообразие из $S(R)$ (которое может совпадать с $S(R)$); T – линейный оператор, определенный на X и принимающий значения в Y , причем существует определенная на $\Omega\times\Omega'$ $\mu\times\mu'$ -измеримая функция $K(s,t)$ такая, что

$$(Tx)(s)=\int\limits_{\Omega'} K(s,t)\,x(t)\,d\mu'$$

для μ – почти всех $s\in\Omega$. Это равенство выражает тот факт, что для любого $x\in X$ элемент $Tx\in Y$ совпадает с классом эквивалентности, порожденным функцией $\int\limits_{\Omega'} K(s,t)\,x(t)\,d\mu'$.

Отметим следующее.

1. Если $\mathfrak{A}$ ограниченное в X множество, т.е. $\exists x'\in X$, $\theta<x'$, $|x|\leq x'$ $\forall x\in\mathfrak{A}$, то $|(Tx)(s)|=|\int\limits_{\Omega'} K(s,t)\,x(t)\,d\mu'|\leq$ $\leq\int\limits_{\Omega'} |K(s,t)|\,x'(t)\,d\mu'$;

μ – почти всюду в Ω , т.е. является регулярным оператором, действующим из X в $S(R)$.

2. Существует μ – измеримое множество $\Omega_g\subset\Omega$, $\mu(\Omega\setminus\Omega_g)=0$, такое, что $\int\limits_{\Omega'} |K(s,t)|\,g(t)\,d\mu'<\infty$ при $s\in\Omega_g$,

т.е., функцию $K(s,t)$ можно рассматривать как функцию $\varphi(s)$ со значениями в $L_1(R,\Omega',\mu')$, полагая $K(s,t)\equiv K_t(s)\equiv\varphi(s)$; при этом $\varphi(s)$ μ-измерима в силу $\mu\times\mu'$ -измеримости функции $K(s,t)$.

3. Если $x\in L_\infty(R,\Omega',\mu')$, $x'\in L_1(R,\Omega',\mu')$, то равенство $\int\limits_{\Omega'} x'(t)\cdot x(t)\,d\mu'=x_o^{\times}(x\circ x')$ (где в скобках стоит произведение элементов полуупорядоченного пространства $S_1(R)$, которое есть класс эквивалентности обычного поточечного произведения функций $x(t)$ и $x'(t)$), определяет (o) – линейный существенно положительный функционал как над $L_\infty(R,\Omega',\mu')$, так и над $L_1(R,\Omega',\mu')$; (o) -линейность следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, существенная положительность очевидна.

4. Если $x \in X$, то найдется такое μ -измеримое множество $\Omega_x \subseteq \Omega$, $\mu(\Omega \setminus \Omega_x) = 0$, что $K(s,\cdot) \circ x \in L_1(R, \Omega', \mu')$ при всех $s \in \Omega_x$; $\Omega_x = \{s : s \in \Omega, \int\limits_{\Omega'} |K(s,t)| \cdot |x(t)| d\mu < \infty\}$ и $\int\limits_{\Omega'} K(s,t) \cdot x(t)\, d\mu' \equiv x_0^\times(\varphi(s) \circ x)$, $s \in \Omega_x$.

Эти четыре пункта позволяют заключить следующее:

если T - интегральный оператор, определенный на K -пространстве $X \subseteq S_1(R)$ таком, что класс эквивалентности, порожденный функцией, тождественно равной единице, принадлежит X, и принимающий значения в линейном многообразии $Y \subseteq S(R)$, то его можно записать в виде $(Tx)(s) = x_0^\times(\varphi(s) \circ x)$, где $\varphi(s)$ - μ -измеримая функция, для почти всех $s \in \Omega$ принимающая значения в $L_1(R, \Omega', \mu')$ и такая, что для любого $x \in X$ $\varphi(s) \circ x \in L_1(R, \Omega', \mu')$ μ - почти всюду в Ω ; равенство понимается в том смысле, что класс эквивалентности, порожденный функцией $x_0^\times(\varphi(s) \circ x)$, совпадает с $Tx \in Y$; кроме того, T регулярен, как оператор, действующий из X в Y.

Перейдем к постановке задачи в общей форме.

Пусть X_1 - K -пространство, X_{max} - его максимальное расширение с единицей x_0, x_0' - существенно положительный (o) -линейный функционал над X_{x_0} - K -пространством ограниченных элементов в X_{max}. В X_{max} можно определить операцию умножения $x_1 \circ x_2$, относительно которой оно становится полуупорядоченным коммутативным кольцом с единицей умножения x_0 ([3], п.IV.3.5.).

Обозначим через X'_{x_0} множество положительных элементов $x \in X_{max}$ таких, что $N(x) = \sup\limits_{\theta < x' < x} x_0'(x') < \infty$, $x' \in X_{x_0}$; через $X^\times_{x_0}$ - множество $x \in X_{max}$ таких, что $|x| \in X'_{x_0}$. Из теоремы XI.1.32 [3] вытекает, что $X^\times_{x_0}$ - KB -пространство с нормой $\|x\|_{X^\times_{x_0}} = N(|x|)$, аддитивной для положительных слагаемых; функционал x_0' допускает распространение $x_0^\times$ на все $X^\times_{x_0}$, если положить $x_0^\times(x) = N(x)$, $\theta < x \in X^\times_{x_0}$;

$$x_0^\times(x) = x_0^\times(x_1) - x_0^\times(x_2);\ x_1 - x_2 \in X^\times_{x_0},\ x_1, x_2 > \theta.$$

Из определения $X^\times_{x_0}$ легко можно вывести, что если последовательность положительных элементов $\{x_n\} \subset X^\times_{x_0}$ (o) -сходится в X_{max} к положительному элементу x и $\sup\limits_n x_0^\times(x_n) < \infty$, то $x \in X^\times_{x_0}$.

Если $x_1 \in X^{\times}_{x_0}$, $x_2 \in X_{x_0}$, то $x_1 \circ x_2 \in X_{x_0}$, так как $N(|x_1 \circ x_2|) \leq N(|x_1| \circ x_0) \cdot \| x_2 \|_{X_{x_0}}$.

На $X^{\times}_{x_0} \times X_{x_0}$ можно определить билинейную форму $\langle x', x \rangle = x_0^{\times}(x' \circ x)$, которая приводит пространства $X^{\times}_{x_0}$ и X_{x_0} в двойственность. По построению, $X^{\times}_{x_0}$ изоморфно (алгебраически и структурно) пространству (o) -линейных функционалов над X_{x_0}, равенство $(x^*, x') = x_0^{\times}(x \circ x')$, $x' \in X^{\times}_{x_0}$, $x^* \in (X^{\times}_{x_0})^*$ ($(X^{\times}_{x_0})^*$ - банахово сопряженное к $X^{\times}_{x_0}$), $x \in X_{x_0}$, определяет изометрический изоморфизм между X_{x_0} и банаховым сопряженным пространством к KB -пространству $X^{\times}_{x_0}$, наделенному нормой $\| x \|_{X^{\times}_{x_0}} = \langle |x|, x_0 \rangle = x_0^{\times}(|x| \circ x_0) = N(|x|)$.

Пусть X - линейное многообразие из X_{max}. Наша задача формулируется следующим образом:

при каких условиях линейный оператор T, определенный на X и принимающий значения в $S(R)$, представим в виде

$$(Tx)(s) = x_0^{\times}(\varphi(s) \circ x), \tag{I.I}$$

где $\varphi(s)$ - μ -измеримая функция, для μ - почти всех $s \in \Omega$ принимающая значения в $X^{\times}_{x_0}$ и такая, что для любого $x \in X$ $\varphi(s) \circ x \in X^{\times}_{x_0}$ μ - почти всюду в Ω; равенство понимается в том смысле, что класс эквивалентности, порожденный функцией $x_0^{\times}(\varphi(s) \circ x)$, совпадает с $Tx \in S(R)$.

2°. В этой части покажем, что, исходя из представления оператора T в виде (I.I) на (o) -плотном в X линейном многообразии, можно получить представление в виде (I.I) на всем X. Пусть $X_0 \subset X_{max}$ - нормальное подпространство; T действует из X_0 в $S(R)$.

ЛЕММА 2.I. Если на X_0 T имеет вид (I.I), то T регулярен как оператор, действующий из X_0 в $S(R)$ и

$$(|T|x)(s) = x_0^{\times}(|\varphi(s)| \circ x), \quad \theta < x \in X_0 .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}$ - ограниченное в X_0 множество: $|x| \leq x_1 \in X_0$, $x \in \mathfrak{A}$. Тогда $|(Tx)(s)| = |x_0^{\times}(\varphi(s) \circ x)| \leq \leq x_0^{\times}(|\varphi(s)| \circ x_1)$; если $x_0^{\times}(|\varphi(s)| \circ x_1)$ μ -измерима, то отсюда следует регулярность оператора.

Обозначим через $\Omega_{x_1} = \{ s : s \in \Omega, \ x_0^{\times}(|\varphi(s)| \circ x_1) < \infty \}$, $\mu(\Omega \setminus \Omega_{x_1}) = 0$ и введем μ -измеримую функцию $\varphi_1(s) = \varphi(s) \circ x_1$,

для μ - почти всех $s\in\Omega$ принимающую значения в $X^{\times}_{x_0}$.
Пусть $s_0\in\Omega_{x_1}$. Тогда, в силу изоморфизма между $X^{\times}_{x_0}$ и пространством (o) -линейных функционалов над X_{x_0} и по определению модуля функционала,

$$\|\varphi_1(s_0)\|_{X^{\times}_{x_0}}=x_0^{\times}(|\varphi_1(s_0)|\circ x_0)=\sup_{|x|\le x_0}|x_0^{\times}(\varphi_1(s_0)\circ x)|=$$

$$=\sup_{|x|\le x_0}|x_0^{\times}(\varphi(s_0)\circ x_1\circ x)|=\sup_{|x'|\le x_1}|x_0^{\times}(\varphi(s_0)\circ x')|.$$

В силу произвольности $s_0\in\Omega_{x_1}$,

$$x_0^{\times}(|\varphi_1(s)|\circ x_0)\equiv x_0^{\times}(|\varphi(s)|\circ x_1\circ x_0)\equiv\sup_{|x'|\le x_1}|x_0^{\times}(\varphi(s)\circ x')|,\quad s\in\Omega_{x_1}.$$

Покажем μ - измеримость функции $x_0^{\times}(\,|\varphi(s)|\circ x_1\,)$. Обозначим через $\bar{L}(\varphi_1)$ замыкание по норме $X^{\times}_{x_0}$ линейного многообразия, натянутого на множество значений функции $\varphi_1(s)$. По теореме II.3.II [5], в X_{x_0} найдется подпространство $(X_{x_0})_1$, изометрически изоморфное $\bar{L}(\varphi_1)^*$ -банахову сопряженному к $\bar{L}(\varphi_1)$. В силу μ -измеримости $\varphi_1(s)$, $\bar{L}(\varphi_1)$ сепарабельно,и, следовательно, в единичном шаре пространства $(X_{x_0})_1$ существует счетное множество $\{x_m\}$ такое, что

$\|x\|_{X^{\times}_{x_0}}=\sup_n|x_0^{\times}(x\cdot x_n)|,\quad x\in\bar{L}(\varphi),\quad x_n\in\{x_m\},\ n=1,2,\dots$.

Следовательно, $x_0^{\times}(|\varphi(s)|\circ x_1)\equiv\|\varphi_1(s)\|_{X^{\times}_{x_0}}\equiv\sup_n|x_0^{\times}(\varphi(s)\circ x''_n)|$,

$x''_n=x_n\circ x_1,\ x_n\in\{x_m\},\ n=1,2,\dots,\ s\in\Omega$,

и функция $x_0^{\times}(|\varphi(s)|\circ x_1)$ μ -измерима.

Далее, $|T|x_1=\sup_{|x'|\le x_1}|Tx'|$. По теореме IУ. I2.6 [5], найдется счетное множество $\{x'_j\}\subset X$, $|x'_j|\le x_1$, $j=1,2,\dots$, такое, что $|T|x_1=\sup_{|x'|\le x_1}|Tx'|=\sup_i|Tx'_i|$, $x'_i\in\{x'_j\}$, $i=1,2,\dots$.

Следовательно, точную верхнюю грань множества $\{Tx'\}\subset S(R)$, $|x'|\le x_1$, можно вычислить поточечно:

$$(|T|x_1)(s)=\sup_i|(Tx'_i)(s)|=\sup_i|x_0^{\times}(\varphi(s)\circ x'_i)|$$

μ - почти всюду, $x'_i\in\{x'_j\}$, $i=1,2,\dots$.

Ясно, что $\sup_i|x_0^{\times}(\varphi(s)\circ x'_i)|=\sup_n|x_0^{\times}(\varphi(s)\circ x''_n)|$ μ - почти всюду в Ω.

Таким образом, $(|T|x_1)(s)=x_0^{\times}(|\varphi(s)|\circ x_1)$ μ-почти всюду в Ω. Лемма доказана.

Пусть $X \subset X_{max}$ – нормальное подпространство, $X_0 \subset X$ – нормальное подпространство, плотное в X относительно (o)-сходимости.

ТЕОРЕМА 2.I. Для того, чтобы линейный оператор T, определенный на X и принимающий значения в $S(R)_\mu$ был представим в виде (I.I), необходимо и достаточно, чтобы:

I) для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, $x_n \xrightarrow{(o)} \theta$, $(Tx_n)(s) \to 0$ μ - почти всюду в Ω;

2) на X_0 оператор имел вид (I.I).

<u>Необходимость</u>. Пусть $(Tx)(s) = x_0^x(\varphi(s) \circ x)$, $\{x_n\} \subset X$ - последовательность, (o) -сходящаяся к θ. Тогда найдется μ -измеримое множество Ω' (зависящее от выбора последовательности $\{x_n\}$), $\mu\Omega' = 0$, такое, что для всех $s \in \Omega \setminus \Omega'$ $\varphi(s) \circ x_n \in X^x_{x_0}$, $n = 1, 2, \dots$, и для любой $s_0 \in \Omega \setminus \Omega'$ $\varphi(s_0) \circ x_n \xrightarrow{(o)} \theta$ в $X^x_{x_0}$.

В силу (o) -линейности функционала x_0^x, $x_0^x(\varphi(s_0) \circ x_n) \to 0$. Следовательно, $(Tx_n)(s) = x_0^x(\varphi(s) \circ x_n) \to 0$ μ - почти всюду в Ω. Необходимость второго условия очевидна.

<u>Достаточность</u>. Из первого условия вытекает, что T (oo)-линеен как оператор, действующий из X в $S(R)$. Поэтому, используя п. УI.I.42 [3] и теорему УII. 2.43 [3], можно заключить, что T регулярен как оператор, действующий из X в $S(R)$. Следовательно, существует линейный положительный оператор T_1, определенный на X и принимающий значения в $S(R)$, такой, что $|T||x| \leq T_1|x|$ для всех $x \in X$, т.е. $(|T||x|)(s) \leq (T_1|x|)(s)$ μ - почти всюду в Ω.

Пусть $\theta < x \in X$ – произвольный элемент. Найдется последовательность $\{x_n\} \subset X_0$ такая, что $x_n \xrightarrow{(o)} x$. Тогда и $|x_n| \xrightarrow{(o)} x$. Таким образом, $(Tx)(s) = \lim_{n \to \infty} (T|x_n|)(s) = \lim_{n \to \infty} x_0^x(\varphi(s) \circ |x_n|)$ μ - почти всюду в Ω. Следовательно,

$$(|T||x_n|)(s) = x_0^x(|\varphi(s)| \circ x_n) \leq (T_1|x_n|)(s) \qquad (2.I)$$

μ - почти всюду в Ω.

Кроме того, так как $|x_n| \xrightarrow{(o)} x$, то $|x_n| = x' \in X$, $n = 1, 2, \dots$;

Отсюда следует, что найдется μ -измеримое множество Ω',

$\mu\Omega'=0$, такое, что

$$x_0^x(|\varphi(s)|\circ|x_n|)\leq(T_1x')(s)<\infty \qquad (2.2)$$

при $s\in\Omega\setminus\Omega'$.

Но тогда и $\sup\limits_n x_0^x(|\varphi(s)|\circ|x_n|)<\infty$ при $s\in\Omega\setminus\Omega'$. Так как при этих s $|\varphi(s)|\circ|x_n|\in X_{x_0}^x$ и $\varphi(s)\circ|x_n|\xrightarrow{(0)}\varphi(s)\circ x$ в X_{max} , то и $\varphi(s)\circ x\in X_{x_0}^x$.

В силу (0) -линейности x_0^x , $\lim\limits_{n\to\infty}x_0^x(\varphi(s)\circ|x_n|)=x_0^x(\varphi(s)\circ x)$, $s\in\Omega\setminus\Omega'$. Отсюда $(Tx)(s)=\lim\limits_{n\to\infty}(T|x_n|)(s)=\lim\limits_{n\to\infty}x_0^x(\varphi(s)\circ|x_n|)=$ $=x_0^x(\varphi(s)\circ x)$ μ - почти всюду в Ω . Если $x_1-x_2=x\in X$, $x_1,x_2\in X$, $x_1,x_2\geq\theta$, то $(Tx)(s)=x_0^x(\varphi(s)\circ x_1)-$ $-x_0^x(\varphi(s)\circ x_2)=x_0^x(\varphi(s)\circ(x_1-x_2))=x_0^x(\varphi(s)\circ x)$ μ - почти всюду в Ω , и класс эквивалентности, порожденный функцией $x_0^x(\varphi(s)\circ x)$, совпадает с $Tx\in S(R)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы следует, что относительно X_0 достаточно предположить следующее: множество положительных элементов X_0 (0) - плотно в множестве положительных элементов X

3°. Пусть $X\subset X_{max}$ - нормальное подпространство, $X_{x_0}\subset X$. Тогда, по теореме III.3.35 [3], за X_0 можно принять X_{x_0} .

В этой части мы установим условия представимости в виде (I.I) линейного оператора T , определенного на X_{x_0} и принимающего значения в $S(R)$, использующие топологические понятия.

ТЕОРЕМА 3.I. Для того, чтобы оператор T был представим в виде (I.I), необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности $\{\Omega_n\}\subset\Omega$ попарно непересекающихся μ -измеримых множеств конечной меры, $\mu(\Omega\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n)=0$, оператор $P_{\Omega_n}T$ переводил любую сеть $\{x_\alpha\}\subset X_{x_0}$, ограниченную по норме X_{x_0} и сходящуюся к θ в $\sigma(X_{x_0},X_{x_0}')$-топологии, в сеть $\{P_{\Omega_n}Tx_\alpha\}$, сходящуюся к нулю по норме $L_\infty(R,\Omega_n,\mu)$, $n=1,2,\ldots$.

---

*) Через P_E обозначаем оператор умножения на класс эквивалентности характеристической функции $\chi_E(s)$ μ-измеримого множества $E\subseteq\Omega$.

Необходимость. Так как мера μ является σ -конечной, то Ω представимо в виде объединения счетного числа μ -измеримых множеств Ω_m конечной меры. Далее, в силу μ -измеримости функции $\varphi(s)$, для любого m найдется последовательность $\{\varphi_k^{(m)}(s)\}$ конечнозначных функций, сходящаяся к $\varphi(s)$ по норме $X_{x_0}^x$ для μ - почти всех $s\in\Omega_m$.

Пусть $\{\varepsilon_p\}$ - последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Зафиксируем p_0. В силу теоремы Егорова ([5], стр. 166), для ε_{p_0} найдется μ -измеримое множество $\Omega_{p_0}\subseteq\Omega_m$ такое, что $\mu\Omega_{p_0}\le\varepsilon_{p_0}$ и для $s\in\Omega_m\setminus\Omega_{p_0}$ $\varphi_k^{(m)}(s)\longrightarrow\varphi(s)$ равномерно по норме пространства $X_{x_0}^x$. Следовательно, для любого ε' найдется номер $K_{\varepsilon'}$, такой, что $\|\varphi(s)-\varphi_k^{(m)}(s)\|_{X_{x_0}^x}\le\varepsilon'$ при всех $s\in\Omega_m\setminus\Omega_{p_0}$, $K\ge K_{\varepsilon'}$.

Далее, $|(P_{\Omega_m}Tx)(s)|=\chi_{\Omega_m}(s)\cdot|x_0^x(\varphi(s)\circ x)|=$

$$=\chi_{\Omega_m}(s)\cdot|x_0^x((\varphi(s)-\varphi_k^{(m)}(s)+\varphi_k^{(m)}(s))\circ x)|\le\varepsilon'\|x\|_{X_{x_0}}\chi_{\Omega_m}(s)+$$
$$+|x_0^x(\varphi_k^{(m)}(s)\circ x)|=\varepsilon'\|x\|_{X_{x_0}}\cdot\chi_{\Omega_m}(s)+|x_0^x(\sum_{i=1}^{N_k}x_i'\chi_{E_i}(s)\circ x)|\le$$
$$\le\varepsilon'\|x\|_{X_{x_0}}\chi_{\Omega_m}(s)+\sum_{i=1}^{N_k}|x_0^x(x_i'\circ x)|\,\chi_{E_i}(s)$$

μ - почти всюду в $\Omega_m\setminus\Omega_{p_0}$, $K\ge K_{\varepsilon'}$; $\|P_{\Omega_m}Tx\|_{L_\infty(R,\Omega_m\setminus\Omega_{p_0},\mu)}\le$ $\le\varepsilon'\|x\|_{X_{x_0}}+\sum_{i=1}^{N_k}|x_0^x(x_i'\circ x)|$. Отсюда следует, что для любой сети $\{x_\alpha\}\subset X_{x_0}$, $\|x_\alpha\|_{X_{x_0}}\le C$, $x_\alpha\longrightarrow\theta$ в $\sigma(X_{x_0},X_{x_0}^x)$-топологии, сеть $\{P_{\Omega_m\setminus\Omega_{p_0}}Tx_\alpha\}$ сходится к нулю по норме $L_\infty(R,\Omega_m\setminus\Omega_{p_0},\mu)$.

Те же самые действия можно повторить с множеством $\Omega_{p_0}\subset\Omega_m$, т.е. применить теорему Егорова и так далее. Таким образом, множества $\Omega_m\setminus\Omega_{p_0}$, $\Omega_{p_i}\setminus\Omega_{p_{i+1}}$, $i=0,1,2,\ldots$, образуют требуемую последовательность, p_0, $m=1,2,\ldots$.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы.

Зафиксируем n_0. Оператор $P_{\Omega_{n_0}}T$ определен на X_{x_0}, принимает значения в $L_\infty(R,\Omega_{n_0},\mu)$ и, вследствие $\sigma(X_{x_0},X_{x_0}^x)$-компактности единичного шара в X_{x_0}, вполне непрерывен. Поэтому ([6], стр. 794) на образе $P_{\Omega_{n_0}}TX_{x_0}$ в пространстве $L_\infty(R,\Omega_{n_0},\mu)$ определен линейный оператор Q, принимающий значения в $M(\Omega_{n_0})$ ($M(\Omega_{n_0})$- B -пространство вещественнозначных μ -измеримых ограниченных на Ω_{n_0} функций, $\|f\|_{M(\Omega_{n_0})}=\sup_{s\in\Omega_{n_0}}|f(s)|$),

непрерывный в нормированных топологиях этих пространств, причем если f - элемент пространства $L_\infty(R, \Omega_{n_0}, \mu)$, т.е. класс эквивалентных функций, то $(Qf)(s) \in M(\Omega_{n_0})$ принадлежит тому же классу.

Зафиксируем $s_0 \in \Omega_{n_0}$. Равенство $(Q P_{\Omega_{n_0}} Tx)(s) = \langle x, x'_{s_0} \rangle = x_0^x(x'_{s_0} \circ x)$ определяет некоторый элемент $x'_{s_0} \in X^x_{x_0}$ (в силу непрерывности $P_{\Omega_{n_0}} T$ и Q). Так как $s_0 \in \Omega_{n_0}$ произвольна, то

$$(Q P_{\Omega_{n_0}} Tx)(s) \equiv x_0^x(\varphi_{n_0}(s) \circ x), \qquad (3.I)$$

$\varphi_{n_0}(s)$ - функция, для любой точки $s \in \Omega_{n_0}$ принимающая значения в $X^x_{x_0}$.

Покажем ее μ - измеримость. Действительно, образ единичного шара $\mathfrak{A}_{x_0} \subset X_{x_0}$ компактен в $M(\Omega_{n_0})$. Следовательно, по теореме IУ.5.4. [5], для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное число попарно непересекающихся множеств E_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\Omega_{n_0} = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$, и такие точки $s_i \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, что для всех i

$$\sup_{x \in \mathfrak{A}_{x_0}} \ \sup_{s \in E_i} |x_0^x((\varphi_{n_0}(s) - \varphi_{n_0}(s_i)) \circ x)| \le \varepsilon .$$

Таким образом, совокупность $\{\varphi_{n_0}(s_i)\}$ образует конечную ε -сеть для множества значений $\{\varphi_{n_0}(s)\} \subset X^x_{x_0}$, откуда следует компактнозначность и, следовательно, μ -измеримость функции $\varphi_{n_0}(s)$.

Из (3.I) вытекает, что $(P_{\Omega_{n_0}} Tx)(s) = x_0^x(\varphi_{n_0}(s) \circ x)$ μ - почти всюду в Ω_{n_0}.

Доопределяя $\varphi_{n_0}(s)$ нулем пространства $X^x_{x_0}$ для $s \bar{\in} \Omega_{n_0}$, получаем функцию $\varphi_{n_0}(s)$, определенную на всем Ω.

Из леммы 2.I следует, что $(|P_{\Omega_{n_0}} T| x)(s) = x_0^x(|\varphi(s)| \circ x)$ μ - почти всюду в Ω, $\theta < x \in X^x_{x_0}$.

Запишем формально ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(s)|$. Тогда

$$\lim_{N \to \infty} x_0^x\Big(\sum_{n=1}^{N} |\varphi_n(s)| \circ x_0\Big) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} x_0^x(|\varphi_n(s)| \circ x_0) =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (|P_{\Omega_n} T| x_0)(s) = (|T| x_0)(s) \cdot \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_{\Omega_n}(s) =$$

$$= (|T| x_0)(s) < \infty$$

μ - почти всюду в Ω.

Таким образом, для μ - почти всех $s\in\Omega$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(s)|$ сходится по норме пространства $X_{x_0}^{x}$; отсюда следует, что ряд $|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(s)|$ также сходится по норме пространства $X_{x_0}^{x}$ и представляет собой μ - измеримую функцию $\varphi(s)$.

Для любого $x\in X_{x_0}$ $x_0^x(\varphi(s)\circ x)=\lim\limits_{N\to\infty}x_0^x(\sum\limits_{n=1}^{N}\varphi_n(s)\circ x)=$
$=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}(P_{\Omega_n}Tx)(s)=(Tx)(s)\cdot\chi_\Omega(s)=(\overline{T}x)(s)$

μ - почти всюду в Ω. Класс эквивалентности, порожденный функцией $x_0^x(\varphi(s)\circ x)$, совпадает с $Tx\in S(R)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что при выполнении условий теоремы оператор T будет регулярен как оператор, действующий из X_{x_0} в $S(R)$. Действительно, в силу непрерывности операторов $P_{\Omega_n}T$, множества $P_{\Omega_n}T\mathfrak{A}_{x_0}$ будут ограничены в $L_\infty(R,\Omega_n,\mu)$, и, следовательно, $T\mathfrak{A}_{x_0}$ ограничено в $S(R)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В части достаточности от оператора $P_{\Omega_n}T$ можно потребовать непрерывность в $\sigma(X_{x_0}, X_{x_0}^{x})$- топологии пространства X_{x_0} и нормированной топологии пространства $L_\infty(R,\Omega_n,\mu)$, $n=1,2,\ldots$.

Приведем еще условия представимости оператора в виде (I.I).

Пусть $\Omega'\subset\Omega$ - μ -измеримое множество конечной меры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.I. Слабейшую хаусдорфову топологию в $L_\infty(R,\Omega',\mu)$, мажорирующую[ж)] на любом ограниченном по норме множестве топологию сходимости по мере, будем называть μL_∞ - топологией.

ТЕОРЕМА 3.2. Для того, чтобы оператор T был представим в виде (I.I), необходимо и достаточно, чтобы T был регулярен как оператор, действующий из X_{x_0} в $S(R)$, и для некоторой последовательности

ж) Напомним, что топология γ_1 мажорирует топологию γ_2, если любое множество, открытое в топологии γ_2, будет открытым в топологии γ_1; при этом топологии γ_1 и γ_2 могут совпадать.

$\{\Omega_n\}\subset\Omega$ попарно непересекающихся μ-измеримых множеств конечной меры, $\mu(\Omega\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n)=0$, оператор $P_{\Omega_n}T$ переводил любую сеть $\{x_\alpha\}\subset X_{x_0}$, ограниченную по норме и сходящуюся к θ в $\sigma(X_{x_0},X_{x_0}^{*})$-топологии, в сеть $\{P_{\Omega_n}Tx_\alpha\}$, сходящуюся к нулю в μL_∞-топологии, $n=1,2,\ldots$.

Необходимость условий доказывается, как в предыдущей теореме, с использованием леммы I.I и того факта, что на любом ограниченном по норме множестве в $L_\infty(R,\Omega_n,\mu)$, $n=0,1,\ldots$, нормированная топология мажорирует топологию сходимости по мере.

Достаточность. Так как T регулярен, то существует положительный элемент $\Lambda\in S(R)$ такой, что $\sup\limits_{x\in\mathfrak{A}_{x_0}} Tx\leq\Lambda$; $\forall x\in\mathfrak{A}_{x_0}$ $|(Tx)(s)|\leq\Lambda(s)$ μ-почти всюду в Ω.

Пусть $\Omega_K=\{s: s\in\Omega,\ K\leq\Lambda(s)<K+1\}$, $K=0,1,2,\ldots$. Множества Ω_K μ-измеримы, попарно не пересекаются и $\mu(\Omega\setminus\bigcup_{K=0}^{\infty}\Omega_K)=0$.

Введем множества $\Omega_{K,n}=\Omega_K\cap\Omega_n$, $K,n=0,1,\ldots$; перенумеровав их произвольным образом, получим множества Ω_j, $j=0,1,\ldots$, попарно непересекающиеся, μ-измеримые, $\mu\Omega_j<\infty$, $j=0,1,\ldots$, $\mu(\Omega\setminus\bigcup_{j=0}^{\infty}\Omega_j)=0$.

Отметим, что для любого j оператор $P_{\Omega_j}T$ удовлетворяет условиям теоремы и

$$|(P_{\Omega_j}Tx)(s)|\leq c_j \tag{3.2}$$

μ-почти всюду в Ω_j, $x\in\mathfrak{A}_{x_0}$.

Зафиксируем j, μ-измеримое множество $E'\subseteq\Omega_j$, и определим над X_{x_0} аддитивный функционал $\varphi_j^{E'}$:

$$(\varphi_j^{E'},x)=\int_{E'}(P_{\Omega_j}Tx)(s)\,d\mu. \tag{3.3}$$

Так как $\sup\limits_{x\in\mathfrak{A}_{x_0}}|(\varphi_j^{E'},x)|=\sup\limits_{x\in\mathfrak{A}_{x_0}}\left|\int_{E'}(P_{\Omega_j}Tx)(s)\,d\mu\right|\leq c_j\mu E'$,

то $\varphi_j^{E'}\in(X_{x_0})^{*}$ ($(X_{x_0})^{*}$ — банахово сопряженное ::

X_{x_0}) и

$$\|\varphi_j^{E'}\|_{(X_{x_0})^*} \leq c_j \mu E' . \qquad (3.4)$$

В силу произвольности μ -измеримого множества $E' \subseteq \Omega_j$, равенство (3.3) определяет функцию μ -измеримого множества $E \subseteq \Omega_j$ со значениями в $(X_{x_0})^*$:

$$(\varphi_j(E), x) = \int_E (P_{\Omega_j} Tx)(s)\, d\mu . \qquad (3.5)$$

Так как $\mathfrak{A}_{x_0}$ $\sigma(X_{x_0}, X_{x_0}^*)$ -компактен, то из условий теоремы следует, что множество $P_{\Omega_j} T \mathfrak{A}_{x_0}$ компактно в топологии сходимости по мере. Отсюда и из (3.2) следует, что множество $P_{\Omega_j} T \mathfrak{A}_{x_0}$ удовлетворяет известному критерию компактности в пространстве $L_1(R, \Omega_j, \mu)$ с нормированной топологией. Следовательно, $P_{\Omega_j} T$ - вполне непрерывный оператор, действующий из X_{x_0} в $L_1(R, \Omega_j, \mu)$.

Рассмотрим сопряженный оператор $(P_{\Omega_j} T)^*$, действующий из $L_\infty(R, \Omega_j, \mu)$ в $(X_{x_0})^*$, определяемый равенством ($((P_{\Omega_j} T)^* f, x) = \int_{\Omega_j} f(s)(P_{\Omega_j} Tx)(s)\, d\mu$, $x \in X_{x_0}$, $f \in L_\infty(R, \Omega_j, \mu)$). Оператор $(P_{\Omega_j} T)^*$ также является вполне непрерывным и область его значений в $(X_{x_0})^*$ сепарабельна.

Пусть χ_E - класс эквивалентности характеристической функции $\chi_E(s)$ μ -измеримого множества $E \subseteq \Omega_j$. Тогда $((P_{\Omega_j} T)^* \chi_E, x) = \int_{\Omega_j} (P_{\Omega_j} Tx)(s) \chi_E(s)\, d\mu =$ (по 3.5) $= (\varphi_j(E), x)$. Следовательно, функция $\varphi_j(E)$ принимает значения в сепарабельном подпространстве пространства $(X_{x_0})^*$. Учитывая (3.4) и проводя такие же преобразования, что и в [6] (стр. 803), получаем $(\varphi_j(E), x) = \int_E (\varphi_j(s), x)\, d\mu$, где $\varphi_j(s)$ - μ -измеримая функция, для μ почти всех $s \in \Omega_j$ принимающая значения в $(X_{x_0})^*$.

Покажем, что функционал x_j^*, определяемый равенством $(x_j^*, x) = \int_{\Omega_j} (P_{\Omega_j} Tx)(s)\, d\mu$, непрерывен в $\sigma(\Lambda_{x_0}, X_{x_0}^*)$-топологии

Пусть $\{x_\alpha\} \subset X_{x_0}$ – произвольная сеть, ограниченная по норме X_{x_0} и сходящаяся к θ в $\sigma(X_{x_0}, X_{x_0}^x)$-топологии. Тогда, учитывая (3.2),

$$|(P_{\Omega_j} T x_\alpha)(s)| \leq C' . \qquad (3.6)$$

Из определения μL_∞ -топологии следует, что сеть $\{(P_{\Omega_j} T x_\alpha)(s)\}$ сходится к нулю по мере.

Отсюда, из (3.6) и теоремы III.3.7. [5] заключаем, что сеть $\{(P_{\Omega_j} T x_\alpha)\}$ сходится к нулю по норме $L_1(R, \Omega_j, \mu)$. По следствию 2 теоремы 6.2 [8], функционал x_j^* непрерывен в $\sigma(X_{x_0}, X_{x_0}^x)$-топологии.

Так как для любого μ - измеримого множества $E \subseteq \Omega_j$ имеем

$$|(\varphi_j(E), x)| = |\int_E (P_{\Omega_j} Tx)(s) d\mu| \leq |\int_{\Omega_j} (P_{\Omega_j} Tx)(s) d\mu|,$$

то функционал $\varphi_j(E)$ непрерывен в $\sigma(X_{x_0}, X_{x_0}^x)$-топологии.

Следовательно, существует функция $\varphi_j(E)$ μ-измеримого множества $E \subseteq \Omega_j$, принимающая значения в $X_{x_0}^x$ такая, что [ж)] $\varphi_j(E) = æ\varphi_j'(E)$, **т.е.**

$$(\varphi_j(E), x) = (æ\varphi_j'(E), x) = \langle x, \varphi_j'(E)\rangle = \int_E (\varphi_j(s), x) d\mu. \qquad (3.7)$$

Из μ -измеримости функции $\varphi_j(s)$ следует, что область ее значений в $(X_{x_0})^*$ сепарабельна. Используя (3.7) и теорему 4 [9], заключаем, что существует μ -измеримая функция $\varphi_j'(s)$, для μ - почти всех $s \in \Omega_j$ принимающая значения в $X_{x_0}^x$ такая, что $\varphi_j(s) \equiv æ\varphi_j'(s)$, т. е.

$$(\varphi_j(s), x) \equiv (æ\varphi_j'(s), x) \equiv \langle x, \varphi_j'(s)\rangle \equiv x_0^x(\varphi_j'(s) \circ x).$$

Применяя теорему Радона-Никодима, получаем $(P_{\Omega_j} Tx)(s) = x_0^x(\varphi_j'(s) \circ x)$ μ- почти всюду в Ω_j. Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством теоремы 3.1.

ж) Здесь $æ$ - оператор естественного вложения B -пространства $X_{x_0}^x$ во второе B -сопряженное пространство $(X_{x_0})^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $\Omega' \subset \Omega$ - μ - измеримое множество конечной меры. Будем говорить, что хаусдорфова топология ν в $L_\infty(R, \Omega', \mu)$ обладает свойством (μ), если[ж)]

$$\mu L_\infty \leq \nu \leq \beta(L_\infty, L_1).$$

Теорема 3.1 и теорема 3.2 позволяют сформулировать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для того, чтобы линейный оператор T, определенный на X_{x_0} и принимающий значения в $S(R)$, был представим в виде (1.1), необходимо и достаточно, чтобы был регулярен как оператор, действующий из X_{x_0} в $S(R)$, и для некоторой последовательности $\{\Omega_n\}$ попарно непересекающихся μ-измеримых множеств конечной меры, $\mu(\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n)=0$, оператор $P_{\Omega_n} T$ переводил любую сеть $\{x_\alpha\} \subset X_{x_0}$, ограниченную по норме и сходящуюся к θ в $\sigma(X_{x_0}, X_{x_0}^*)$ - топологии, в сеть $\{P_{\Omega_n} T x_\alpha\}$, сходящуюся к нулю в топологии ν, обладающей свойством (μ), $n = 1, 2, \ldots$.

Приведем одно достаточное условие представимости оператора в виде (1.1), которое нам понадобится ниже.

ЛЕММА 3.1. Достаточным условием представимости оператора в виде (1.1) является существование положительного элемента $\Lambda \in S(R)$, обладающего свойством: для любого

ж) Здесь через $\beta(L_\infty, L_1)$ обозначена нормированная топология в пространстве $L_\infty(R, \Omega', \mu)$.

$\varepsilon > 0$ в X_{x_0} найдется окрестность нуля V_ε $\sigma(X_{x_0}, X^x_{x_0})$ - топологии такая, что $|(Tx)(s)| \le \varepsilon \Lambda(s)$ μ - почти всюду в Ω, $x \in V_\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\Lambda_0(s) = \begin{cases} 1/\Lambda(s), & s: \Lambda(s) \ne 0, \\ 0, & s: \Lambda(s) = 0, \end{cases}$$

и введем оператор T_Λ : $(T_\Lambda x)(s) = \Lambda_0(s) \cdot (Tx)(s)$ μ - почти всюду в Ω, $x \in X_{x_0}$. По теореме 3.I.(замечание 2), $(T_\Lambda x)(s) = x_0^x(\varphi(s) \circ x)$ μ - почти всюду в Ω. Тогда $(Tx)(s) = x_0^x(\varphi(s) \circ x)$ μ - почти всюду в Ω, где $\varphi(s) = \Lambda(s) \cdot \varphi_\Lambda(s)$ μ -измеримая функция, для μ - почти всех $s \in \Omega$ принимающая значения в $X^x_{x_0}$. Лемма доказана.

4°. В этой части для линейного оператора T, определенного на X_{x_0} и принимающего значения в $S(R)$, приводятся условия представимости в виде (I.I), использующие терминологию только полуупорядоченных пространств.

Приведем некоторые утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть X - KN -линеал, через $S(X) = S(X, \Omega, \mu)$ обозначим линейное пространство, элементами которого являются классы эквивалентности μ -измеримых функций, принимающих значения в X.

ЛЕММА 4.I. В $S(X)$ можно ввести отношение порядка так, что $S(X)$ становится K -линеалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем говорить, что элемент $f \in S(X)$ положителен, $f > \theta_S$ (за θ_S -нуль пространства $S(X)$ - принимаем класс эквивалентности функции, равн. θ_X - нулю пространства X - μ - почти всюду в Ω), если f - класс эквивалентности функции $f(s) \geq \theta_X$ μ - почти всюду в Ω и $f(s) > \theta_X$ для s, принадлежащих μ -измеримому множеству положительной меры. По определению, $f_1 > f_2$, если $f_1 - f_2 > \theta_S$.

Проверим выполнение аксиом K -линеала ([4], стр. 60).

I. Если $f > \theta_S$, то $f \ne \theta_S$.

Очевидно.

2. Если $f_1 > \theta_S$, $f_2 > \theta_S$, то $f_1 + f_2 > \theta_S$.

Очевидно.

3. Для любых $f_1, f_2 \in S(X)$ существует $f_3 = \sup(f_1, f_2)$.

Действительно, положим $f_3(s) = \sup(f_1(s), f_2(s))$ μ - почти всюду в Ω. Если $f_3(s)$ μ-измерима, то, по определению, f_3 есть класс эквивалентности функции $f_3(s)$ и $f_3 = \sup(f_1, f_2)$. Покажем μ-измеримость функции $f_3(s)$. Если $f_1(s)$ и $f_2(s)$ конечнозначны, т.е. $f_1(s) = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \chi_{E_i^1}(s)$ и $f_2(s) = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 \chi_{E_j^2}(s)$, то, по определению, $f_3(s)$ есть класс эквивалентности функции $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sup(x_i^1, x_j^2) \chi_{E_i^1 \cap E_j^2}(s)$, конечнозначной и, следовательно, μ-измеримой. Далее, так как $f_1(s)$, $f_2(s)$ измеримы, то найдутся последовательности $\{f_k^1(s)\}$, $\{f_k^2(s)\}$ конечнозначных функций такие, что $\{f_k^1(s)\}$ сходится к $f_1(s)$, $\{f_k^2(s)\}$ сходится к $f_2(s)$ по норме пространства X для μ - почти всех $s \in \Omega$. Ясно, что найдется μ-измеримое множество $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mu(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$, такое, что при любом $s \in \Omega_0$ обе последовательности сходятся к конечным пределам. Тогда, по теореме УП.I.2 [4], для любой $s_0 \in \Omega_0$

$$\lim_{k \to \infty} \| \sup(f_k^1(s_0), f_k^2(s_0)) - \sup(f_1(s_0), f_2(s_0)) \|_X = 0 .$$

Таким образом, $f_3(s)$ является пределом по норме пространства X μ - почти всюду сходящейся последовательности μ-простых функций и, следовательно, μ-измерима.

4. Если $f > \theta_S$, $\lambda > 0$ - вещественное число, то $\lambda f > \theta_S$. Очевидно.

Из I-4 следует, что $S(X)$ является K-линеалом. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Если x_0 - единица в X, то в $S(X)$ существует единица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g_0 - единица в $S(R)$, т.е. класс эквивалентности функции $g_0(s)$, μ-измеримой и положительной на μ-измеримом множестве Ω', $\mu(\Omega \setminus \Omega') = 0$. Обозначим через e_0 класс эквивалентности μ-измеримой функции $g_0(s) \cdot x_0$, для μ - почти всех $s \in \Omega$ принимающей значения в X.

Пусть $f_0 \in S(X)$ - положительный элемент; $f(s)$ - μ-измеримая функция со значениями в X - представитель класса f. Для μ - почти всех $s \in \Omega$ $f'(s) = \inf(g_0(s)x_0, f(s)) \geq \Theta_X$ и $f'(s) > \Theta_X$ на множестве ненулевой меры. Следовательно, $f'(s)$ порождает положительный элемент из $S(X)$. Таким образом, e_0 - единица в $S(X)$. Лемма доказана.

Достаточно очевидным является также тот факт, что $S(X)$ есть K_σ -пространство, если X - $K_\sigma N$ -пространство.

Пусть g_0 - единица в $S(R)$. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{J}_{x_0^x, g_0}$, действующий из X_{x_0} в $S(R)$ и определяемый равенством $(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0}, x)(s) = x_0^x(x \circ x_0) g_0(s)$ μ - почти всюду в Ω.

Оператор $\mathcal{J}_{x_0^x, g_0}$ регулярен: если $x \in \mathfrak{A}_{x_0}$, то

$$|(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0} x)(s)| = |x_0^x(x \circ x_0) g_0(s)| \leq x_0^x(|x| \circ x_0) g_0(s) \leq$$
$$\leq \|x\|_{X_{x_0}} g_0(s) x_0^x(x_0) \leq g_0(s) x_0^x(x_0)$$

μ - почти всюду в Ω, т.е. $|\mathcal{J}_{x_0^x, g_0} x| \leq c g_0$.

Через $K(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$ обозначим компоненту в K -пространстве регулярных операторов, действующих из X_{x_0} в $S(R)$, порожденную оператором $\mathcal{J}_{x_0^x, g_0}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Для того, чтобы линейный оператор T, действующий из X_{x_0} в $S(R)$ и положительный, если его значения рассматривать в $S(R)$, был представим в виде (1.1), необходимо и достаточно, чтобы $T \in K(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$.

<u>Необходимость.</u> Пусть $(Tx)(s) = x_0^x(\varphi(s) \circ x)$. В силу положительности T, φ является положительным элементом в K_σ -пространстве $S(X_{x_0}^\wedge)$. По лемме 4.2, $x_0 g_0 = e_0$ - единица в $S(X_{x_0}^x)$. Тогда (лемма IV.2.1. [4]) $\varphi = \sup_N \varphi_N$, где $\varphi_N = \inf(\varphi, N e_0)$.

Пусть $\{\varphi_N(s)\}$ - последовательность представителей элементов φ_N, $N = 1, 2, \ldots$, $\varphi(s)$ - представитель φ. Обозначим через Ω' множество тех $s \in \Omega$, для которых $\varphi(s) = \sup_N \varphi_N(s)$. Множество Ω' μ-измеримо и $\mu(\Omega \setminus \Omega') = 0$. Тогда для любого $x \in X_{x_0}$ $\varphi_N(s) \circ x \xrightarrow{(0)} \varphi(s) \circ x$ в $X_{x_0}^x$ (в силу

(O)-непрерывности операции умножения) при всех $s \in \Omega'$.

Определим линейные операторы T_N, действующие из X_{x_0} в $S(R)$, положив $(T_N x)(s) = x_0^x(\varphi_N(s) \circ x)$ μ - почти всюду в Ω, $N=1,2,\ldots$. Операторы T_N образуют возрастающую последовательность, так как $\varphi_N \le \varphi_{N+1}$, $N=1,2,\ldots$. Кроме того, для любого $x \in X_{x_0}$

$$(Tx)(s) = x_0^x(\varphi(s) \circ x) = \lim_{N\to\infty} x_0^x(\varphi_N(s) \circ x) = \lim_{N\to\infty} (T_N x)(s)$$

μ - почти всюду в Ω. Следовательно, по теореме УШ.2.4 [4], $T_N \xrightarrow{(o)} T$ в K-пространстве регулярных операторов, действующих из X_{x_0} в $S(R)$. Так как

$(T_N x)(s) = x_0^x(\varphi_N(s) \circ x) \le N x_0^x(x \circ x_0) g_0(s)$, $\theta < x \in X_{x_0}$,

то $T_N \in K(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$, $N=1,2,\ldots$. Из утверждения II.I.22(c) [3], вытекает, что $T \in K(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$.

__Достаточность__. Пусть $T \in K(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$. Тогда (лемма IУ.2.I. [4]) $T = \sup\limits_N T_N$, где $T_N = \inf(T, N \cdot \mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$, $N=1,2,\ldots$. Далее, по теореме УШ.2.3. [4], $T_N x \xrightarrow{(o)} Tx$ в $S(R)$ для любого $x \in X_{x_0}$. Так как $T_N \le N \mathcal{J}_{x_0^x, g_0}$, $N=1,2,\ldots$, то $|(T_N x)(s)| \le N|(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0} x)(s)| = N|x_0^x(x \circ x_0)| g_0(s)$ μ - почти всюду в Ω; следовательно, операторы T_N, $N=1,2,\ldots$, удовлетворяют условию леммы 3.I и $(T_N x)(s) = x_0^x(\varphi_N(s) \circ x)$ μ - почти всюду в Ω, где $\varphi_N(s)$ - μ-измеримая функция, для μ - почти всех $s \in \Omega$ принимающая значения в $X_{x_0}^x$, $N=1,2,\ldots$.

Ясно, что $\theta \le \varphi_N(s) \le \varphi_{N+1}(s)$ для всех $s \in \Omega \setminus \Omega_N$, $\mu\Omega_N = 0$, $N=1,2,\ldots$. Обозначим через $\Omega_0 = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \Omega_N$, $\mu\Omega_0 = 0$,

$\Omega' = \{s : s \in \Omega,\ (Tx_0)(s) < \infty\}$, $\mu(\Omega \setminus \Omega') = 0$, $\Omega_0' = \Omega_0 \cup (\Omega \setminus \Omega')$, $\mu\Omega_0' = 0$.

Тогда $x_0^x(\varphi_N(s) \circ x_0) \le (Tx_0)(s) < \infty$ для всех $s \in \Omega \setminus \Omega_0'$, $N=1,2,\ldots$. Следовательно, для этих s в $X_{x_0}^x$ существует $(o)-\lim\limits_{N\to\infty} \varphi_N(s)$, и можно считать, что существует функция $\varphi(s)$, определенная на Ω и принимающая значения в $X_{x_0}^x$ такая, что $\varphi_N(s) \xrightarrow{(o)} \varphi(s)$ в $X_{x_0}^x$, $s \in \Omega \setminus \Omega_0'$. Так как $X_{x_0}^x$ - KB-пространство, то $\|\varphi(s) - \varphi_N(s)\|_{X_{x_0}^x} \longrightarrow 0$ для μ - почти всех $s \in \Omega$, что показывает μ-измеримость

функции $\varphi(s)$.

Для любого $\theta < x \in X_{x_0}$ $(Tx)(s) = \sup_N (T_N x)(s) = \sup_N x_0^x(\varphi_N(s) \circ x)$ μ - почти всюду и, в силу (0) -линейности x_0^x как функционала над $X_{x_0}^x$, $\sup_N x_0^x(\varphi_N(s) \circ x) = x_0^x(\varphi(s) \circ x)$ μ - почти всюду в Ω.

Далее, если $x_1 - x_2 = x \in X_{x_0}$, $x_1, x_2 \in X_{x_0}$, $x_1, x_2 \geqslant \theta$, то $(Tx)(s) = x_0^x(\varphi(s) \circ (x_1 - x_2)) = x_0^x(\varphi(s) \circ x)$ μ - почти всюду в Ω и класс эквивалентности, порожденный функцией $x_0^x(\varphi(s) \circ x)$, совпадает с $Tx \in S(R)$. Теорема доказана.

Эта теорема позволяет сформулировать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для того, чтобы линейный оператор T, действующий из X_{x_0} в $S(R)$, был представим в виде (I.I), необходимо и достаточно, чтобы T был регулярен, как оператор, действующий из X в $S(R)$, и $T \in K(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$.

Действительно, если T регулярен и принадлежит $K(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$, то, так как компонента сама является K -пространством, $T = T_1 - T_2$, где T_1, $T_2 \in K(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$ и положительны, т.е.

$$(Tx)(s) = x_0^x(\varphi_1(s) \circ x) - x_0^x(\varphi_2(s) \circ x) = x_0^x((\varphi_1(s) - \varphi_2(s)) \circ x) =$$

$$= x_0^x(\varphi(s) \circ x)$$

μ - почти всюду в Ω.

Обратно, если $(Tx)(s) = x_0^x(\varphi(s) \circ x)$ μ - почти всюду, то, так как $S(X_{x_0}^x)$ является K_σ -пространством, $\varphi(s) = \varphi_1(s) - \varphi_2(s)$ μ -почти всюду в Ω, $\varphi_1(s), \varphi_2(s) \geqslant \theta$ - μ - измеримые функции, для μ - почти всех $s \in \Omega$ принимающие значения в $X_{x_0}^x$; т.е. $T = T_1 - T_2$, где $T_1 \in K(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$, $T_2 \in K(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$ и положительны. Но тогда и $T \in K(\mathcal{J}_{x_0^x, g_0})$, регулярность оператора установлена леммой (I.I).

5°. Приведём некоторые утверждения об операторах, представленных в виде (I.I).

Пусть Y - K -пространство, нормально вложенное в $S(R)$.

ТЕОРЕМА 5.I. Пусть T действует из X в Y и имеет вид (I.I). Оператор T регулярен тогда и только тогда, когда линейный оператор $\widetilde{T}$
$(\widetilde{T}x)(s) = x_0^{\lambda}(|\varphi(s)|\circ x)$ μ-почти всюду в Ω, действует из X в Y.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $\widetilde{T}$ действует из X в Y; $\mathfrak{A} \subset X$ - ограниченное множество: $|x| \le x' \in X$ $\forall x \in \mathfrak{A}$ для $x \in \mathfrak{A}$. Тогда $|(Tx)(s)| = |x_0^x(\varphi(s)\circ x)| \le x_0^x(|\varphi(s)|\circ x')$ μ-почти всюду в Ω, $x \in \mathfrak{A}$, откуда следует регулярность оператора T.

Обратно, пусть T имеет вид (I.I) и регулярен. Доказательство того, что оператор $\widetilde{T}$ действует из X в Y (учитывая нормальность вложения Y в $S(R)$) от доказательства леммы I.I. не отличается. При этом $|T| = \widetilde{T}$.

Перейдем к вопросу о непрерывности операторов вида (I.I).

Нам понадобятся некоторые сведения из теории псевдотопологических пространств [10].

Пусть M - некоторое множество. Говорят, что в M задана псевдотопология τ^M, если для каждого $x \in M$ задано семейство фильтров τ_x^M, называемых сходящимися к x. Эти семейства должны удовлетворять следующим аксиомам*) :

1. Из того, что фильтр $[\mathcal{N}] \in \tau_x^M$ и $[\mathcal{N}'] \le [\mathcal{N}]$, следует $[\mathcal{N}'] \in \tau_x^M$.

2. Из того, что фильтры $[\mathcal{N}] \in \tau_x^M$, $[\mathcal{N}'] \in \tau_x^M$, следует $\sup([\mathcal{N}], [\mathcal{N}']) \in \tau_x^M$.

3. Фильтр $[x] \in \tau_x^M$.

Топологические пространства являются частным случаем псевдотопологических пространств; псевдотопология τ^M задается следующим образом: фильтр $[\mathcal{N}] \in \tau_x^M$, если $[\mathcal{N}] \le [\mathcal{N}_x]$, где $[\mathcal{N}_x]$ - фильтр окрестностей точки x.

---

*) Напомним, что $[\mathcal{N}'] \le [\mathcal{N}]$ эквивалентно теоретико-множественному включению $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}'$ для всех $\mathcal{N} \in [\mathcal{N}]$, $\mathcal{N}' \in [\mathcal{N}']$; $\sup([\mathcal{N}], [\mathcal{N}'])$ - фильтр, состоящий из множеств вида: $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$, $\mathcal{N} \in [\mathcal{N}]$, $\mathcal{N}' \in [\mathcal{N}']$; $[x]$ - фильтр, состоящий из всех множеств, содержащих точку x [10].

Если на M задана какая-либо сходимость (например, если M — K -линеал, то — (o) — сходимость), то псевдотопология может быть задана следующим образом: фильтр $[\mathcal{N}] \in \tau_x^M$, если $[\mathcal{N}] \leq [\mathcal{N}']$, где $[\mathcal{N}']$ — фильтр сечений какой-либо обобщенной последовательности $\{x_\alpha\}$, сходящейся к x.

Пусть на M заданы две псевдотопологии $(\tau^M)_1$ и $(\tau^M)_2$. Говорят, что $(\tau^M)_1$ сильнее, чем $(\tau^M)_2$ в точке x, если из того, что фильтр $[\mathcal{N}] \in (\tau_x^M)_1$ следует, что $[\mathcal{N}] \in (\tau_x^M)_2$, $((\tau_x^M)_2 \leq (\tau_x^M)_1)$. Если это верно для каждой точки $x \in M$, то $(\tau^M)_1$ сильнее, чем $(\tau^M)_2$ $((\tau^M)_2 \leq (\tau^M)_1)$.

Псевдотопология τ^M называется отделимой, если из того, что фильтр $[\mathcal{N}] \in \tau_x^M$ и $[\mathcal{N}] \in \tau_{x_1}^M$ следует, что x совпадает с x_1.

Пусть M — вещественное пространство с семейством фильтров τ_0^M таким, что выполняются следующие условия согласованности:

1. Из того, что фильтры $[\mathcal{N}] \in \tau_0^M$, $[\mathcal{N}'] \in \tau_0^M$, следует $[\mathcal{N}] + [\mathcal{N}'] \in \tau_0^M$.

2. Из того, что фильтр $[\mathcal{N}] \in \tau_0^M$, $\lambda \in R$, следует $[\lambda \mathcal{N}] \in \tau_0^M$.

3. Из того, что фильтр $[\mathcal{N}] \in \tau_0^M$, следует $[\mathbb{V}\mathcal{N}] \in \tau_0^M$.

4. Из того, что $x \in M$, следует $[\mathbb{V}x] \in \tau_0^M$. (здесь через $[\mathbb{V}]$ обозначен фильтр окрестностей нуля в R, наделенном обычной топологией).

Пространство M становится псевдотопологическим векторным пространством с согласованной псевдотопологией τ^M, если положить :

а) $[\mathcal{N}] \in \tau_x^M$ тогда и только тогда, когда $[\mathcal{N}] - [x] \in \tau_0^M$;

в) $[\mathcal{N}] + [x] \in \tau_x^M$ тогда и только тогда, когда $[\mathcal{N}] \in \tau_0^M$.

Пусть M, V — метризуемые хаусдорфовы векторные пространства, являющиеся одновременно псевдотопологическими векторными пространствами с согласованными отделимыми псевдотопологиями τ^M и τ^V, причем:

1. Если фильтр $[\mathcal{N}] \subset M$ сходится к x в топологическом

смысле, то найдется фильтр $[\mathcal{N}_1] \in \tau_x^M$ такой, что $[\mathcal{N}] \leq [\mathcal{N}_1]$.

II. Если фильтр $[\mathcal{V}] \in V$ сходится к y в топологическом смысле, то $[\mathcal{V}] \in \tau_y^V$.

ЛЕММА 5.I. Пусть V метрически полно. Если линейный оператор T, действующий из M в V непрерывен в псевдотопологиях τ^M и τ^V, то T метрически непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В произведении $M \times V$ введем метрику $\rho(\{x,y\},\{x',y'\}) = \rho_M(x,x') + \rho_V(y,y')$ и покажем замкнутость графика Γ_T оператора T, откуда, в силу известной теоремы, будет следовать требуемое утверждение.

Пусть $\{x',y'\}$ – точка прикосновения Γ_T в $M \times V$; график будет замкнут, если $\rho_V(y', Tx') = 0$. Найдется последовательность $\{\{x_n, Tx_n\}\} \subset \Gamma_T$ такая, что $\rho(\{x',y'\},\{x_n, Tx_n\}) \to 0$. Тогда $\rho_M(x', x_n) \longrightarrow 0$ и $\rho_V(y', Tx_n) \longrightarrow 0$. Рассмотрим $[\mathcal{N}] \subset M$ – фильтр сечений последовательности $\{x_n\}$ и $[\mathcal{V}]$ – фильтр сечений последовательности $\{Tx_n\}$. По условию, (т.к. $[T\mathcal{N}] \leq [\mathcal{V}]$),

$$[T\mathcal{N}] \in \tau_{y'}^V ; \qquad (5.1)$$

согласно I , в M найдется фильтр $[\mathcal{N}_1] \in \tau_{x'}^M$, $[\mathcal{N}_1] \leq [\mathcal{N}]$. Отсюда и из (5.I) заключаем, что $[T\mathcal{N}_1] \in \tau_{y'}^V$ ($[T\mathcal{N}_1]$ – образ фильтра $[\mathcal{N}_1]$), но, в силу непрерывности T, $[T\mathcal{N}_1] \in \tau_{Tx'}^V$. Так как псевдотопология τ^V отделима, то отсюда следует совпадение Tx' и y' , т.е. $\rho_V(Tx', y') = 0$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если псевдотопология τ^M обладает ещё тем свойством, что из принадлежности фильтра $[\mathcal{N}] \in \tau_x^M$ следует его сходимость к x в топологическом смысле, то метрическая непрерывность оператора T влечёт его непрерывность в псевдотопологиях τ^M и τ^V.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть M , V – метризуемые хаусдорфовы векторные пространства, являющиеся одновременно псевдотопологическими вектор-

ными пространствами с согласованными отделимыми псевдотопологиями $\tau^M, (\tau^M)_1$, $\tau^V, (\tau^V)_1$; $(\tau^M)_1$, $(\tau^V)_1$ связаны с метриками условиями I и П; $\tau^M \leq (\tau^M)_1$, $(\tau^V)_1 \leq \tau^V$; кроме того, V метрически полно. Если линейный оператор T, действующий из M в V, непрерывен в псевдотопологиях τ^M и τ^V, то он метрически непрерывен.

Рассмотрим случай, когда $M \subset X_{max}$ – K-линеал с отделимой согласованной псевдотопологией τ^M, определяемой следующим образом: фильтр $[\mathcal{X}] \in \tau^M_x$, если $[\mathcal{X}] \leq [\mathcal{X}_1]$, где $[\mathcal{X}_1]$ – фильтр сечений какой-либо последовательности $\{x_n\}$, сходящейся с регулятором к x; $V \subset S(R)$ – K-линеал с отделимой согласованной псевдотопологией τ^V, определяемой следующим образом: фильтр $[\mathcal{V}] \in \tau^V_y$, если $[\mathcal{V}] \leq [\mathcal{V}_1]$, где $[\mathcal{V}_1]$ – фильтр сечений какой-либо последовательности $\{y_n\}$, сходящейся к y μ – почти всюду.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если выполнены условия предложения 3, то оператор, действующий из M в V и имеющий вид (I.I), непрерывен.

Действительно, как легко видеть, оператор вида (I.I) непрерывен в описанных выше псевдотопологиях τ^M и τ^V.

6°. Возвращаясь к функциональным пространствам и используя обозначения первой части, мы можем сформулировать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для того, чтобы линейный оператор T, определенный на линейном многообразии X, нормально вложенном в $S_1(R)$ и содержащем класс эквивалентности функции, тождественно равной единице, и принимающий значения в линейном многообразии $Y \subseteq S(R)$, был представим в виде

$$(Tx)(s) = \int_{\Omega'} K(s,t)\, x(t)\, d\mu',$$

где $K(s,t)$ – определенная на $\Omega\times\Omega'$ $\mu\times\mu'$-измеримая функция и равенство понимается в том смысле, что класс эквивалентности, порожденный функцией $\int\limits_{\Omega'} K(s,t)\,x(t)\,d\mu'$, совпадает с Tx, необходимо и достаточно, чтобы T удовлетворял условиям предложения I или предложения 2.

Кроме того, отметим, что в вопросе представимости оператора в виде (I.I) (и, следовательно, в интегральном виде) оказалось верным предположение о первичности свойств пространств и оператора, связанных с отношением порядка.

Автор благодарен В.Б.Короткову за советы.

Литература

I. ПОРТЕР У. Современные обоснования общей теории линейных систем. М.,"Наука", I97I.

2. ЗАДЕ Л., ДЕЗОЕР Ч. Теория линейных систем. М.,"Наука",I970.

3. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л.,ГИТТЛ,I950.

4. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., "Физматгиз", I96I.

5. ДАНФОРД Н., ШВАРЦ Дж.Т. Линейные операторы. М.,"Мри",I964.

6. ЭДВАРДС Р. Функциональный анализ. М.,"Мир",I970.

7. РОБЕРТСОН А.П., РОБЕРТСОН В.Дж. Топологические векторные пространства. М.,"Мир", I97I.

8. ШЕФЕР Х. Топологические векторные пространства. М.,"Мир", I97I.

9. РЫБАКОВ В.И. О векторных мерах.-Известия вузов, I968, т.I2,с.92-I00.

I0. ФРЁЛИХЕР А., БУХЕР В. Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы. М.,"Мир",I970.

Поступила в редакцию
20.Х. 1971 г.