УДК 512; 519.4

О БАШЕННОМ ПОПОЛНЕНИИ АРХИМЕДОВОЙ ВЕКТОРНОЙ СТРУКТУРЫ

В.К.Захаров

В работе рассматривается некоторое пополнение архимедовой векторной структуры с единицей, связанное с понятием, рассматривавшимся Б.З.Вулихом [3],[4], а именно, с понятием полноты относительно определяющих последовательностей (иначе говоря, башенной полноты).

В K-пространстве X с единицей для любой ограниченной положительной последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \wedge m\mathbb{1} = x_m$ для $m < n$, всегда существует $x = \sup x_n$. Произвольная векторная структура X таким свойством, вообще говоря, не обладает. В связи с этим встает вопрос, нельзя ли естественным образом погрузить X в некоторую векторную структуру $H(X)$, обладающую этим свойством. В работе дается построение такой векторной структуры $H(X)$, называемой башенным пополнением X. Затем доказывается свойство универсальности $H(X)$ в смысле Н.Бурбаки [1] (теорема 1), и с помощью универсальности устанавливаются некоторые характеристики $H(X)$ (теорема 2).

Понятие полноты относительно определяющих последовательностей рассматривалось Б.З.Вулихом для изучения важного понятия внутренней нормальности векторной структуры [3], [4]. Введенное в данной работе башенное пополнение используется для построения и изучения внутренне нормального пополнения архимедовой векторной структуры. Рассмотрение внутренне нормального пополнения будет дано в другой работе.

Пусть X -архимедова векторная структура с фиксированной слабой единицей $1=1_X$, X_0 - подструктура ограниченных элементов в X. Напомним, что идеалом в векторной структуре X называется векторное подпространство L такое, что из $|z|\leq|x|$ для $z\in X$ и $x\in L$ следует $z\in L$. Для каждого максимального идеала p в X_0 определим в X идеал $P=\{y\in X \mid \exists x\in X_0,\ x\notin p$ и $|y|\wedge|x|\in p\}$. Ясно, что $P\cap X_0=p$. Можно убедиться, что идеалы P являются максимальными среди всех идеалов в X, не содержащих единицы I. Множество таких идеалов P обозначим $\mathfrak{M}(X)$. Наделим его стоуновой топологией, то есть в качестве базиса открытых множеств возьмем множества $Sx=\{P\in\mathfrak{M}(X) \mid x\notin P\}$ для всех $x\in X$. Пространство $\mathfrak{M}(X)$ является бикомпактом.

Для любого $P\in\mathfrak{M}(X)$ рассмотрим связанный с ним идеал $O_P=\{y\in X \mid \exists x\in X, x\notin P$ и $|y|\wedge|x|=0\}$. Сопоставим каждому элементу $x\in X$ функцию $\hat{x}\in\Pi\{X/O_P \mid P\in\mathfrak{M}(X)\}$. Множество $\mathcal{H}=\cup\{X/O_P \mid P\in\mathfrak{M}(X)\}$ можно превратить в пучок, взяв в качестве базиса открытых множеств $\hat{x}(V)=\{\hat{x}(P) \mid P\in V\}$, где $x\in X$ и V открыто в $\mathfrak{M}(X)$.

Пусть X и Y - архимедовы векторные структуры с единицами 1_X и 1_Y и $\varphi: X\to Y$ - унитарный гомоморфизм, то есть отображение, сохраняющее алгебраические и структурные операции и переводящее единицу в единицу. Для любого $q\in\mathfrak{M}(Y)$ прообраз $\varphi^{-1}(q)$ содержится в единственном максимальном идеале p в X_0. Сопоставим соответствующему идеалу Q из $\mathfrak{M}(Y)$ идеал $\mathfrak{M}(\varphi)Q=P$ из $\mathfrak{M}(X)$. Получаем непрерывное отображение $\mathfrak{M}(\varphi)$ из $\mathfrak{M}(Y)$ в $\mathfrak{M}(X)$. Если гомоморфизм φ вполне линеен, то прообраз при отображении $\mathfrak{M}(\varphi)$ любого плотного открытого многества из $\mathfrak{M}(X)$ является плотным открытым в $\mathfrak{M}(Y)$.

Назовем гомоморфизм $\varphi: X\to Y$ ортополным, если φ любую полную систему попарно дизъюнктных элементов в X переводит в полную систему в Y. Можно показать, что унитарный гомороморфизм $\varphi: X\to Y$ является вполне линейным тогда и только тогда, когда он ортополон.

Будем называть векторную структуру Y расширением X (расширением X с сохранением всех граней), если существует инъективный унитарный гомоморфизм из X в Y (соответственно, инъективный вполне линейный унитарный гомоморфизм из X в Y).

Векторную структуру X назовем башенно полной, если для любой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X_+$ такой, что $x_m = x_n \wedge m1$ для $m \leq n$, существует $x \in X_+$ для которого $x \wedge n1 = x_n$. Последовательности $\{x_n\}$ со свойством $x_m = x_n \wedge m1$ для $m \leq n$ будем называть башней (или определяющей последовательностью (см.[3], [4]). Нашей целью является построение для каждой архимедовой векторной структуры с единицей некоторой башенно полной векторной структуры, являющейся расширением X с сохранением всех граней.

Пусть $\mathfrak{A}$ обозначает направленное по убыванию множество всех плотных открытых подмножеств в $\mathfrak{M}(X)$. Для каждого $\mathcal{U} \in \mathfrak{A}$ обозначим через $\Gamma_X(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ множество всех сечений $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ таких, что $|f| \leq \hat{u} \in \hat{X}$ и $(-n\hat{1}) \vee \vee (f \wedge n\hat{1}) \in X_0$.

Через

$$H(X) = \underline{\lim}\, \{\Gamma_X(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \,|\, \mathcal{U} \in \mathfrak{A}\}$$

обозначим индуктивный предел по направлению $\mathfrak{A}$ векторных структур $\Gamma_X(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ относительно отображений сужения. По самому определению, $H(X)$ является векторной структурой, содержащей X как векторную подструктуру. Через θ будем обозначать отношение эквивалентности в этом индуктивном пределе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. *Пусть X - архимедова векторная структура с единицей. Тогда $H(X)$ - башенно полная векторная структура, являющаяся расширением X с сохранением всех граней. Если X башенно полна, то $H(X) = X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{z_n = \theta f_n\} \subset H(X)_+$, $z_n \leq y = \theta g \in H(X)$ и $z_n \wedge n1 = z_n$ при $m \geq n$. Тогда из $\theta f_n = \theta f_m \wedge n\theta \hat{1} = \theta(f_m \wedge n\hat{1})$ и $f_m \wedge n\hat{1} \in X_0$ следует, что $f_n = f_m \wedge n\hat{1} \in X_0$. Кроме того, так как $g \in \Gamma_X(\mathcal{U}, \mathcal{H})$, то $g \leq \hat{a} \in \hat{X}$. Поэтому $\{f_n\}$ является ограниченной башней в $\hat{X}$. Рассмотрим открытые множества

$$\mathcal{U}_n = \{P \in \mathfrak{M}(X) \,|\, f_n(P) < n\hat{1}(P)\}.$$

Из ограниченности башни вытекает, что $\bigcup \mathcal{U}_n$ плотно в $\mathfrak{M}(X)$.

Определим $f \in \Gamma(\bigcup \mathcal{U}_n, \mathcal{H})$, положив $f|\mathcal{U}_n = f_n|\mathcal{U}_n$. Тогда $f \in \hat{\mathfrak{u}}$ и $f \wedge n\hat{1} = f_n \in \hat{X}_0$, то есть $z = \theta_f \in H(X)$ и $z_n = z \wedge n1$. Следовательно, $H(X)$ – башенно полная векторная структура.

Пусть теперь X башенно полна и $0 \leq z = \theta f \in H(X)$. Рассмотрим $f_n = f \wedge n\hat{1} \in X_0$. Так как $f_n \leq f \leq \hat{u} \in \hat{X}$, то $\{f_n\}$ – ограниченная башня в $\hat{X}$. Из башенной полноты следует, что существует $\hat{x} \in \hat{X}$ такой, что $\hat{x} \wedge n\hat{1} = f_n = f \wedge n\hat{1}$. Так как $f \leq \hat{u} \in \hat{X}$, то отсюда получается, что сечения $\hat{x}$ и f совпадают на плотном открытом подмножестве. Значит, $z = \theta f = \theta\hat{x} = x \in X$, и $H(X) = X$.

Проверим, что $H(X)$ является расширением X с сохранением всех граней. В силу критерия вполне линейности достаточно установить, что вложение X в $H(X)$ унитарно и ортополно. Пусть $0 < z \in H(X)$, $z = \theta f$ и $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{H})$. Тогда существуют открытое множество $V \subset \mathcal{U}$ и элемент $x \in X$ такие, что $f|V = \hat{x}|V$ и $x \notin P$ для некоторого $P \in V$. В силу простоты P и $x \wedge 1 \notin P$. Значит, $f \wedge \hat{1} \neq 0$ и $z \wedge 1 \neq 0$ в $H(X)$, то есть вложение X в $H(X)$ унитарно.

Пусть $\{x_\alpha\}$ – полная система попарно дизъюнктных элементов из X. Так как, по свойству $H(X)$, $0 \neq z \wedge 1 \in X$, то для некоторого индекса α $x_\alpha \wedge z \wedge 1 \neq 0$. Следовательно, и $x_\alpha \wedge z \neq 0$, то есть вложение ортополно. Доказательство предложения закончено.

ТЕОРЕМА I. *Пусть X – архимедова векторная структура с единицей. Тогда среди всех башенно полных векторных структур, являющихся расширениями X с сохранением всех граней, $H(X)$ является единственным универсальным расширением относительно унитарных вполне линейных гомоморфизмов из X в башенно полные векторные структуры, то есть таким, что для любого унитарного вполне линейного гомоморфизма φ из X в башенно полную векторную структуру Y существует единственный*

унитарный вполне линейный гомоморфизм ψ *из* $H(X)$ *в* Y, *продолжающий* φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi : X \to Y$ – вполне линейный унитарный гомоморфизм и Y башенно полна. Пусть $z = \theta f \in H(X)$, то есть $(n\hat{1}) \vee (f \wedge n\hat{1}) = \hat{u}_n \in \hat{X}$ и $|f| \le \hat{x} \in X$. Тогда элементы $\{\varphi u_n\}$ образуют ограниченную башню в Y. Поэтому существует элемент $y \in Y$ такой, что $(-n1) \vee (y \wedge n1) = \varphi u_n$. Так как элементы u_n одни и те же для всех представителей из класса θf, то мы можем корректно определить отображение ψ из $H(X)$ в Y, полагая $\psi z = y$. Отображение ψ продолжает φ. Действительно, пусть $x \in H(X)$. Рассмотрим $x_n = (-n1) \vee (x \wedge n1)$. Так как $(n1) \vee [(\psi x) \wedge n1] = -(n1) \vee [(\varphi x) \wedge n1]$ для любого n, то $\psi x = \varphi x$.

Установим, что отображение ψ аддитивно. Пусть $z_1 = \theta f$, $z_2 = \theta g \in H(X)$, $(-n\hat{1}) \vee (f \wedge n\hat{1}) = \hat{u}_n$, $(-n\hat{1}) \vee (g \wedge n\hat{1}) = \hat{v}_n$ и $(2n\hat{1}) \vee [(f+g) \wedge 2n\hat{1}] = \hat{w}_{2n}$, где $u_n, v_n, w_{2n} \in X$. Рассмотрим открытые множества

$$U_n = \{p \in \mathfrak{M}(X) \mid |\bar{u}_n|(p) < (n-1)\bar{1}(p)\},\ V_n \text{ и } W_{2n}$$

и

$$U'_n = \{q \in \mathfrak{M}(Y) \mid |\overline{\varphi u}_n|(q) < (n-1)\bar{1}(p)\},\ V'_n \text{ и } W'_{2n}.$$

Пусть $p \in U_n$, $p = \mathfrak{M}(\varphi) q$ и $x = (n-1)1 - |u_n|$. Тогда выполнено $\bar{x}(p) > 0$, $\bar{x}_+(p) > 0$, и, значит, $x_+ \notin p$. Так как p – максимальный идеал, содержащий $\varphi^{-1}(q)$, то $x_+ \notin \varphi^{-1}(q)$ и $(\varphi x)_+ = \varphi(x_+) \notin q$. Отсюда $(\overline{\varphi x})_+(q) > 0$, и, следовательно, $(\overline{\varphi x})(q) > 0$. Значит, $(n-1)\bar{1}(q) - |\bar{\varphi} u_n|(q) > 0$, то есть $q \in U'_n$. Получили, что $\mathfrak{M}(\varphi)^{-1} U_n \in U'_n$.

Пусть $p \in U_n \cap V_n \cap W_{2n}$ и $p = \mathfrak{M}(\varphi) q$. Тогда $|\bar{u}_n|(p) < (n-1)\bar{1}(p)$ и $|\bar{v}_n(p)| < (n-1)\bar{1}(p)$ и, следовательно, $|f(p)| = |\hat{u}_n|(p) < (n-1)\hat{1}(p)$ и $|g(p)| = |\hat{v}_n|(p) < (n-1)\hat{1}(p)$. Отсюда получается

$$\hat{w}_{2n}(p) = (-2n\hat{1}(p)) \vee [f(p) + g(p)] \wedge 2n\hat{1}(p) = f(p) + g(p) = \hat{u}_n(p) + \hat{v}_n(p).$$

Нетрудно убедиться, что это равенство влечет

$$(\varphi w_{2n}) \bmod O_q = (\varphi u_n) \bmod O_q + (\varphi v_n) \bmod O_q.$$

По доказанному ранее, $q \in V'_n \cap U'_n \cap W'_{2n}$. Поэтому $|\psi u_n|(q) < (n-1)\bar{1}(q)$. Отсюда в силу равенства $(-n1) \vee \vee(\psi z_1 \wedge n1) = \psi u_n$ следует $(\psi z_1) \bmod O_Q = (\psi u_n) \bmod O_Q$. Аналогичные равенства справедливы и для ψz_2 и $\psi(z_1 + z_2)$.

Из доказанного в двух последних абзацах вытекает

$$[\psi(z_1 + z_2)] \bmod O_Q = (\psi w_{2n}) \bmod O_Q =$$

$$= (\psi u_n) \bmod O_Q + (\psi v_n) \bmod O_Q = [\psi z_1 + \psi z_2] \bmod O_Q.$$

Множество $\bigcup_n (U_n \cap V_n \cap W_{2n})$ плотно открыто в $\mathfrak{M}(X)$. Но для вполне линейного гомоморфизма φ прообраз при отображении $\mathfrak{M}(\varphi)$ плотного открытого множества является плотным открытым. Поэтому множество $\mathfrak{M}(\varphi)^{-1} \bigcup_n (U_n \cap V_n \cap W_{2n})$ плотно открыто в $\mathfrak{M}(\psi)$. Итак, мы установили, что сечения, соответствующие элементам $\psi(z_1 + z_2)$ и $\psi z_1 + \psi z_2$ совпадают на плотном открытом множестве в $\mathfrak{M}(Y)$. Значит, $\psi(z_1 + z_2) = \psi z_1 + \psi z_2$.

Пусть $z \in H(X)$ и λ – вещественное число. Пусть для $n \in N$ $m(n)$ обозначает натуральное число, равное произведению n и целой части от $|\lambda| + 1$. Тогда, рассмотрев $u_n = (-n1) \vee \vee(z \wedge n1)$ и $w_{m(n)} = (-m(n)1) \vee (\lambda z \wedge m(n)1)$ и проведя аналогичные рассуждения, получим $\psi(\lambda z) = \lambda \psi z$, то есть линейность отображения ψ.

Совсем просто проверяется, что ψ сохраняет структурные операции. Итак, ψ – унитарный гомоморфизм, продолжающий φ.

Проверим теперь единственность продолжающего гомоморфизма. Пусть ψ и ψ' – унитарные гомоморфизмы из $H(X)$ в Y, продолжающие φ. Пусть $0 \leq z \in H(X)$ и $z \wedge n1 = u_n \in X_0$. Тогда $(\psi' z) \wedge n1 = \psi'(z \wedge n1) = \psi' u_n = \psi u_n = \psi(z \wedge n1) = (\psi z) \wedge n1$ для любого n. Следовательно, $\psi' z = \psi z$.

Осталось доказать вполне линейность ψ. Пусть $\{z_\alpha\}$ – полная система попарно дизъюнктных элементов из $H(X)$. Так как $\{z_\alpha \wedge 1\}$ полна в $H(X)$ и, по свойству $H(X)$, $z_\alpha \wedge 1 \in X_+$, то $\{z_\alpha \wedge 1\}$ – полная система в X. Так как φ ортополон, то система $\{\varphi(z_\alpha \wedge 1)\}$ полна в X. Отсюда в силу $\varphi(z_\alpha \wedge 1) = \psi(z_\alpha \wedge 1) = \psi(z_\alpha) \wedge 1$ следует, что и система $\{\psi z_\alpha\}$ полна в Y. Итак, ψ ортополон и, значит, вполне линеен. Это и заканчивает доказательство.

Назовем Y башенным расширением X, если Y – расширение X и для любого $y \in Y$ $(-1) \vee (y \wedge 1) \in X$ и $|y| \leq x$ для

некоторого $x \in X$. Если Y – башенное расширение, то из $(-n1)\vee(y\wedge n1) = n[(-1)\vee(\frac{1}{n}y\wedge 1)]$ следует, что $(-n1)\vee\vee(y\wedge n1)\in X$ для любого n. С помощью теоремы I получается также следующая характеристика $H(X)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – архимедова векторная структура с единицей. Тогда

а) $H(X)$ является наибольшей векторной структурой среди всех башенных расширений X.

б) $H(X)$ является единственной башенно полной векторной структурой среди всех башенных расширений X.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $H(X)$ ясно, что $H(X)$ является башенным расширением X. Пусть Y – произвольное башенное расширение X. Обозначим через φ вложение X в Y и будем отличать X от его образа $\varphi(X)$. Пусть $y\in Y$. Тогда $u'_n = (-n1)\vee(y\wedge n1)\in\varphi(X)$ и $|u'_n|\le|y|\le\le x'\in\varphi(X)$. Пусть $u_n = \varphi^{-1}(u'_n)$ – прообразы элементов u'_n в X. Тогда $\{u_n\}$ – ограниченная башня в X. Обозначим $\mathcal{U}_n = \{p\in\mathfrak{M}(X)\,|\,|\bar{u}_n|(p)<(n-1)\bar{1}(p)\}$. Рассмотрим сечение $f(y)\in\in\Gamma(\cup\,\mathcal{U}_n, \mathcal{H})$ такое, что $f(y)\,|\,\mathcal{U} = \hat{u}_n\,|\,\mathcal{U}_n$. Так как $\{u_n\}$ – ограниченная башня в X, то $\cup\,\mathcal{U}_n$ плотно открыто в $\mathfrak{M}(X)$. Так как $|f(y)|\le\hat{x}$ и $(-n\hat{1})\vee(f(y)\wedge n\hat{1})-\hat{u}_n\in\hat{X}_0$, где $x = \varphi^{-1}(x')$, то $f(y)\in\Gamma_X(\cup\,\mathcal{U}_n, \mathcal{H})$ и $\theta f(y)\in H(X)$. Поэтому можно определить отображение ψ из Y в $H(X)$, положив $\psi y = \theta f(y)$. Ясно, что ψ сохраняет естественное вложение X в $H(X)$.

Докажем, что ψ аддитивно, то есть $\psi(y+z) = \psi y + \psi z$ для y и z из Y. Пусть $u'_n = (-n1)\vee(y\wedge n1)$, $v'_n = (-n1)\vee(z\wedge n1)$, $w'_{2n} = (-2n1)\vee[(y+z)\wedge 2n1]$ из $\varphi(X)$ и u_n, v_n, w_{2n} – их прообразы в X. Рассмотрим открытые множества

$$\mathcal{U}'_n = \{q\in\mathfrak{M}(Y)\,|\,|\bar{u}'_n(q)|(n-1)\bar{1}(q)\},\ V'_n \text{ и } W'_{2n}$$

и

$$\mathcal{U}_n = \{p\in\mathfrak{M}(X)\,|\,|\bar{u}_n(p)|(n-1)\bar{1}(p)\},\ V_n \text{ и } W_{2n}.$$

Пусть $p\in\mathcal{U}_n\cap V_n\cap W_{2n}$. При доказательстве теоремы I было

установлено, что $\mathfrak{M}(\varphi)^{-1}(U_n \wedge V_n \wedge W_{2n}) \subset U'_n \wedge V'_n \wedge W'_{2n}$. Следовательно, существует $q \in U'_n \wedge V'_n \wedge W'_{2n}$ такое, что $p = \mathfrak{M}(\varphi)q$. Так как $|\hat{u}'_n|(q) < (n-1)\hat{1}(q)$ и $|\hat{v}'_n|(q) < (n-1)\hat{1}(q)$ в Y_0/O_q, то $\hat{y}(q) = \hat{u}'_n(q)$ и $\hat{z}(q) = \hat{v}'_n(q)$. Отсюда получаем

$$\hat{w}'_{2n}(q) = (-2n\hat{1}(q)) \vee [(\hat{y}(q) + \hat{z}(q)) \wedge 2n\hat{1}(q)] =$$
$$= (-2n\hat{1}(q)) \vee [(\hat{u}'_n(q) + \hat{v}'_n(q)) \wedge 2n\hat{1}(q)] = \hat{u}'_n(q) + \hat{v}'_n(q)$$

в Y_0/O_q. Значит, существует элемент $s' \in Y_0$ такой, что $s' \notin q$ и $|w'_{2n} - u'_n - v'_n| \wedge |s'| = 0$ в Y_0. Так как для $0 < y \in Y_0$ $y = y_1 \wedge n1 \in \varphi(X_0)$, то $Y_0 = \varphi(X_0)$. Обращаясь к прообразам, получаем $s \notin \varphi^{-1}(q)$, где $s = \varphi^{-1}(s') \in X_0$, и $|w_{2n} - u_n - v_n| \wedge |s| = 0$ в X_0. Так как q - максимальный идеал в Y_0, то, в силу изоморфизма $\varphi : X_0 \longrightarrow Y_0$, получается, что $\varphi^{-1}(q)$ является максимальным идеалом в X_0. Следовательно, $p = \mathfrak{M}(\varphi)q = \varphi^{-1}(q)$. Отсюда вытекает, что $s \notin p$. Значит, $\hat{w}_{2n}(p) = \hat{u}_n(p) + \hat{v}_n(p)$ в X_0/O_p. Поэтому $f(y+z)(p) = \hat{w}_{2n}(p) = \hat{u}_n(p) + \hat{v}_n(p) = f(y)(p) + f(z)(p)$. Окончательно, $\psi(y+z) = \theta f(y+z) = \theta f(y) + \theta f(z) = \psi y + \psi z$, ибо множество $\bigcup_n (U_n \wedge V_n \wedge W_{2n})$ плотно в $\mathfrak{M}(X)$.

Пусть $y \in Y$ и λ - вещественное число. Пусть для $n \in N$ $m(n)$ обозначает натуральное число, равное произведению n и целой части от $|\lambda| + 1$. Тогда, рассмотрев $u'_n = (-n1) \vee (y \wedge n1)$ и $w'_{m(n)} = (-m(n)1) \vee (\lambda y \wedge m(n)1)$ и проведя аналогичные рассуждения, получим $\psi(\lambda y) = \lambda \psi y$, то есть линейность отображения ψ.

Совсем просто проверяется, что ψ сохраняет структурные операции. Итак, ψ - унитарный гомоморфизм, продолжающий вложение X в $H(X)$. Пусть $\psi(y) = 0$. Тогда $f(y) = 0$. Так как $(-n\hat{1}) \vee (f(y) \wedge n\hat{1}) = u_n$, то $u_n = 0$ для всех n. Отсюда $u'_n = 0$ и, значит, $y = 0$. Следовательно, ψ является инъективным гомоморфизмом из Y в $H(X)$, что устанавливает справедливость утверждения а).

Пусть теперь Y - башенно полная векторная структура и башенное расширение X. Так как Y - башенное расширение, то вложение X в Y является ортополным. Действительно, пусть $\{x_\alpha\}$ - полная система попарно дизъюнктных элементов из X и $0 \neq y \in Y$. Так как $0 \neq |y| \wedge 1 \in \varphi(X)$, то найдется индекс α такой, что $|y| \wedge 1 \wedge \varphi x_\alpha \neq 0$. Следовательно, и

$\varphi y \wedge \varphi x_\alpha \neq 0$. В силу ортополноты φ, по теореме I, существует единственный унитарный гомоморфизм $\varphi': H(X) \longrightarrow Y$, продолжающий φ. Пусть $x = \theta f \in H(X)$ и $\varphi' x = 0$. Вспоминая, как действует гомоморфизм φ', получаем $\varphi u_n = 0$, где $u_n' = (-n\hat{1}) \vee (f \wedge n\hat{1}) \in \hat{X}$. Отсюда $u_n = 0$ и, значит, $f = 0$. Итак, φ' есть вложение $H(X)$ в Y.

Проверим, что отображения φ и φ' взаимно-обратны. Пусть $y \in Y$, $u_n' = (-n1) \vee (y \wedge n1)$ и $u_n = \varphi^{-1}(u_n')$. Тогда $\varphi y = \theta f y$, где $(-n\hat{1}) \vee (f(y) \wedge n\hat{1}) = \hat{u}_n$. Отсюда $[\varphi'(\varphi y) \wedge n1] \vee (-n1) = \varphi u_n = u_n' = (y \wedge n1) \vee (-n1)$. Следовательно, $\varphi'(\varphi y) = y$. Из взаимной обратности гомоморфизмов и φ' вытекает, что векторные структуры Y и $H(X)$ изоморфны, то есть выполнено условие б). Доказательство теоремы закончено.

Теоремы I и 2 дают нам основание назвать $H(X)$ башенным пополнением X.

Литература.

I. БУРБАКИ Н. Теория множеств. "Мир", М., 1965.

2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., 1961.

3. ВУЛИХ Б.З. Некоторые вопросы теории линейных частично упорядоченных пространств. Изв. Акад. Наук СССР, сер. мат. 17. 1953, с. 365-388.

4. ВУЛИХ Б.З. О свойстве внутренней нормальности обобщенных полуупорядоченных колец. Уч. записки ЛГПИ им. А.И.Герцена, каф. мат. 166. 1958, с. 3-16.

Поступила в ред.-изд. отд.

26. II. 1973 г.