1973 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 12(29)

УДК 513.918

ЗАМЕЧАНИЕ О ПОМЕТКАХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

С.С.Кутателадзе

В теории выпуклых множеств иногда интересуются вопросом выбора линейным способом по точке из каждого множества. Оказывается, что этот вопрос связан с декомпозициями.

Введем точное определение*). Семейство $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ борелевских мер на сфере направлений $\mathcal{Z}_n$ называется <u>пометкой</u>, если для каждого выпуклого компакта $\varkappa$ из $\mathscr{V}_n$ справедливо вхождение

$$(\mu_1(\varkappa), \ldots, \mu_n(\varkappa)) \in \varkappa.$$

Вектор $(\mu_1(\varkappa), \ldots, \mu_n(\varkappa))$ называют пометкой фигуры $\varkappa$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Семейство $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ является пометкой в том и только том случае, если для каждого x из $\mathcal{Z}_n$ имеет место вхождение

$$\varepsilon_x - \sum_{k=1}^{n} x_k \mu_k \in \mathscr{V}_n^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Минковского-Фенхеля определение пометки множества $\varkappa$ переписывается в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k(\varkappa) x_k \le \varkappa(x) \qquad (x \in R^n). \tag{I}$$

*) Относительно используемых обозначений и теорем см. [1].

Используя явное представление двойственного конуса $\mathcal{W}_n^*$, можно выписать декомпозиционный признак пометки. Простоты ради, проведем соответствующие рассуждения для плоскости.

Рассмотрим условия:

$$
\left.
\begin{array}{l}
(++)\ \ \varepsilon_{(\Delta_1,\Delta_2)}+\Delta_1\mu_1^- + \Delta_2\mu_2^- \underset{R^2}{\gg} \Delta_1\mu_1^+ + \Delta_2\mu_2^+ ;\\
(+-)\ \ \varepsilon_{(\Delta_1,-\Delta_2)}+\Delta_1\mu_1^- + \Delta_2\mu_2^+ \underset{R^2}{\gg} \Delta_1\mu_1^+ + \Delta_2\mu_2^- ;\\
(-+)\ \ \varepsilon_{(-\Delta_1,\Delta_2)}+\Delta_1\mu_1^+ + \Delta_2\mu_2^- \underset{R^2}{\gg} \Delta_1\mu_1^- + \Delta_2\mu_2^+ ;\\
(--)\ \ \varepsilon_{(-\Delta_1,-\Delta_2)}+\Delta_1\mu_1^+ + \Delta_2\mu_2^+ \underset{R^2}{\gg} \Delta_1\mu_1^- + \Delta_2\mu_2^- .
\end{array}
\right\}\quad (\Delta_1,\Delta_2)\in \mathcal{Z}_2\cap R^2_+;
$$

Ясно, что (I) равносильно одновременному выполнению выписанных четырех условий. Приведем еще детализацию соответствующего признака, например, для условия $(+\ -)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Условие* $(+\ -)$ *имеет место в том и только том случае, если для любых* (Δ_1,Δ_2) *из* $\mathcal{Z}_2\cap R^2_+$ *и всяких разбиений* $\{(\mu_1^+)_1,\ldots,(\mu_1^+)_m\}$ *и* $\{(\mu_2^-)_1,\ldots,(\mu_2^-)_m\}$ *мер* μ_1^+ *и* μ_2^- *найдутся разбиения* $\{(\mu_1^-)_1,\ldots,(\mu_1^-)_m\}$ *и* $\{(\mu_2^+)_1,\ldots,(\mu_2^+)_m\}$ *мер* μ_1^- *и* μ_2^+ *и числа* $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ *такие, что совместна система неравенств*

$$
\alpha_1\geq 0,\ \ldots,\ \alpha_m\geq 0
$$

$$
\alpha_1+\ldots+\alpha_m=1
$$

$$
\Delta_1\left(x_{(\mu_1^-)_k}-x_{(\mu_2^+)_k}+\alpha_k e_1\right)= \tag{2}
$$

$$
=\Delta_2\left(x_{(\mu_2^-)_k}-x_{(\mu_2^+)_k}+\alpha_k e_2\right)\qquad (k=1,\ldots,m),
$$

где x_μ *– точка, представляющая меру* μ, *то есть* $\mu(u)=(u,x_\mu)$ $(u\in R^n)$.

<u>Достаточность.</u> Пусть $(\Delta_1,\Delta_2)\in\mathcal{Z}_2\cap R^2_+$ и $\{\nu_1,\ldots,\nu_m\}$ – разбиение меры $\Delta_1\mu_1^+ + \Delta_2\mu_2^-$. По лемме о двойном разбиении, найдутся разбиения $\{(\mu_1^+)_1,\ldots,(\mu_1^+)_m\}$ меры μ_1^+ и $\{(\mu_2^-)_1,\ldots,(\mu_2^-)_m\}$ меры μ_2^- такие, что $\Delta_1(\mu_1^+)_k+\Delta_2(\mu_2^-)_k$

Найдем параметры, удовлетворяющие (2), и положим

$$\mu_k \triangleq \Delta_1(\mu_1^-)_k + \Delta_2(\mu_2^+)_k + \alpha_k\, \varepsilon_{(\Delta_1,-\Delta_2)} .$$

Ясно, что $\mu_k \geq 0$ и, кроме того, $\sum_{k=1}^{m} \mu_k = \Delta_1\mu_1^- + \Delta_2\mu_2^+ + \varepsilon_{(\Delta_1,-\Delta_2)}$.
Помимо этого, имеем

$$x_{\mu_k} - x_{\nu_k} = \Delta_1 x_{(\mu_1^-)_k} + \Delta_2 x_{(\mu_2^+)_k} + \alpha_k \Delta_2 e_1 -$$

$$-\alpha_k \Delta_2 e_2 - \Delta_1 x_{(\mu_1^+)_k} - \Delta_2 x_{(\mu_2^-)_k} = 0,$$

что и требовалось.

<u>Необходимость</u> проверяется подобным же образом.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если удается указанные в предложении разбиения выбрать независимо от (Δ_1, Δ_2), то, приравнивая скобки в (2) к нулю, приходим к достаточному признаку пометки. Отметим, что этот признак, естественно, существенно упрощается для дискретных мер и сводится к линейной программе. Проиллюстрируем возникающие условия примером простейшей пометки. Именно, если искать пометку в виде $\mu_1 \triangleq \varepsilon_{\mu^+} - \varepsilon_{\mu^-}$ и $\mu_2 \triangleq \varepsilon_{\nu^+} - \varepsilon_{\nu^-}$, где μ^+, μ^-, ν^+, ν^- – точки плоскости, то достаточный признак определяется системой

$$\begin{aligned}
&\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, a_i, b_i, c_i \geq 0\\
&\alpha_i + a_i = 1;\ \beta_i + b_i = 1;\ \gamma_i + c_i = 1 \quad (i = 1, \dots, 4);\\
&\mu^+ = \alpha_1\mu^- + \gamma_1 e_1;\ \beta_1\nu^- + \gamma_1 e_2 = 0;\\
&\nu^+ = b_1\nu^- + c_1 e_1;\ a_1\mu^- + c_1 e_1 = 0;\\
&\mu^- = \alpha_2\mu^+ - \gamma_2 e_1;\ \beta_2\nu^- + \gamma_2 e_2 = 0;\\
&\nu^+ = b_2\nu^- + c_2 e_2;\ a_2\mu^+ - c_2 e_1 = 0;\\
&\mu^- = \alpha_3\mu^+ - \gamma_3 e_1;\ \beta_3\nu^+ - \gamma_3 e_2 = 0;\\
&\nu^- = b_3\nu^+ - c_3 e_2;\ a_3\mu^+ - c_3 e_1 = 0;\\
&\mu^+ = \alpha_4\mu^- + \gamma_4 e_1;\ \beta_1\nu^+ - \gamma_4 e_2 = 0;\\
&\nu^- = b_4\nu^+ - c_4 e_2;\ a_4\mu^- + \gamma_4 e_1 = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что решением системы (3) являются параметры:

$$\begin{aligned}
&\alpha_i = b_i = 0;\\
&\beta_i = a_i = 1; \qquad (i = 1, \dots, 4),\\
&\gamma_i = c_i = \tfrac{1}{2};
\end{aligned}$$

при этом

$$\mu^+ = \frac{1}{2} e_1 ; \qquad \nu^+ = \frac{1}{2} e_2 ;$$

$$\mu^- = -\frac{1}{2} e_1 ; \qquad \nu^- = -\frac{1}{2} e_2 .$$

Таким образом, простейшей пометкой фигуры является точка

$$\frac{1}{2} \left(\varkappa(e_1) - \varkappa(-e_1), \varkappa(e_2) - \varkappa(-e_2) \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичные рассуждения в n-мерном случае приводят к пометке $\mu_k \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2}(\varepsilon_{e_k} - \varepsilon_{-e_k})$. Впрочем, проверку этого факта можно провести и непосредственно.

Литература

I. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и её приложения.- Успехи мат. наук, 1973, т.27, вып. 3, с. 127-176.

Поступила в ред.-изд. отд.

15. VII. 1973 г.