УДК 513.88

# О ВТОРОМ СОПРЯЖЕННОМ ПО НАКАНО ПРОСТРАНСТВЕ К БАНАХОВОЙ СТРУКТУРЕ

Г.Я.Лозановский

В терминологии и обозначениях из теории векторных решеток мы следуем [1]. Банахово сопряженное пространство к нормированному пространству $X$ обозначается $X^*$. Пространство, сопряженное в смысле Накано к $K$-линеалу $E$, обозначается $\bar{E}$.

Следующая теорема является существенным обобщением теоремы 5 из [2].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $X$ - $KB$-линеал, $E$ - замкнутое по норме нормальное подпространство в $X^*$, причем $E$ тотально на $X$ и $\bar{E}$ есть $KB$-пространство. Тогда $X$ есть $KB$-пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H$ есть компонента в $X^*$, порожденная множеством $E$. Ясно, что $KN$-пространства $\bar{H}$ и $\bar{E}$ изоморфны и изометричны (чтобы в этом убедиться, достаточно каждому $f \in \bar{H}$ сопоставить его сужение на $E$), поэтому $\bar{H}$ есть $KB$-пространство. Обозначим через $\mathcal{U}$ замкнутый единичный шар пространства $H$. Так как пространство $\bar{\bar{H}} = (\bar{H})^*$ можно естественным образом отождествить с $H$, то множество $\mathcal{U}$ компактно в слабой топологии $\sigma(H, \bar{H})$. Но, очевидно, топология $\sigma(H, \bar{H}) \geq \sigma(H, X)$, ибо в естественной двойственности между $X$ и $H$ каждый элемент из $X$ является вполне линейным функционалом на $H$. Следовательно,

множество $\mathcal{U}$ компактно и в топологии $\sigma(H,X)$. Тем самым $\mathcal{U}$ замкнуто в $(X^*, \sigma(X^*, X))$. Так как $H$ тотально на $X$, то из теоремы Крейна-Шмульяна (см. [5], стр. 77, теорема 5) теперь следует, что $H = X^*$. Напомним, что $KB$-линеал является $KB$-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон (теорема Огасавара). Поэтому пространство $\bar{H} = \bar{H}^*$ слабо секвенциально полно. Но при естественном вложении $X$ в $X^{**}$ пространство $X$ оказывается замкнутым по норме подпространством в $\bar{X}^*$. Следовательно, $X$ слабо секвенциально полно, тем самым $X$ есть $KB$-пространство. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $X$ – $KB$-линеал, такой что $\bar{X}$ тотально на $X$ и $\bar{X}$ есть $KB$-пространство. Тогда $X$ есть $KB$-пространство.

Дадим приложение полученных результатов к теории банаховых функциональных пространств. Пусть $(T,\Sigma,\mu)$ – пространство с мерой, состоящее из множества $T$, некоторой $\sigma$-алгебры $\Sigma$ его подмножеств и неотрицательной счетно-аддитивной $\sigma$-конечной меры $\mu$ на $\Sigma$. Через $S = S(T,\Sigma,\mu)$ обозначаем пространство всех вещественных, измеримых почти всюду конечных функций на $T$, причем эквивалентные функции, как обычно, отождествляются. Банаховым функциональным пространством (б.ф.п.) на $(T,\Sigma,\mu)$ называется банахово $KN$-пространство $X$, являющееся фундаментом в $S$. Дуальным пространством $X'$ к б.ф.п. $X$ называется пространство всех $x' \in S$, таких что

$$\|x'\|_{X'} = \sup\{\int_T |x\,x'|\,d\mu : x \in X, \|x\|_X \le 1\} < \infty .$$

Пусть теперь $X$ есть произвольное б.ф.п. Хорошо известно, что пространство $X'' = (X')'$, вообще говоря, не совпадает с $X$. Тем не менее справедлива следующая теорема, вытекающая из следствия к теореме I.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X$ есть б.ф.п. на $(T,\Sigma,\mu)$ и пусть $X'$ есть $KB$-пространство. Тогда $X = X''$.

ПРИМЕР. Пусть $X$ есть б.ф.п. на $(T,\Sigma,\mu)$, такое что $X' = L^\infty(T,\Sigma,\mu)$. Тогда $X = L^1(T,\Sigma,\mu)$, ибо

$X'' = L^1(T, \Sigma, \mu)$ есть $KB$ -пространство. В связи со сказанным заметим, что, вообще говоря, из $X' = L^1(T, \Sigma, \mu)$ не следует, что $X = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ .

## Литература


1. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., 1961.
2. SHIMOGAKI T., On the continuity and the monotonousness of norm, J.Fac.Sci.Hokkaido Univ.,ser.I,1962,v.16,p.225-237
3. ДЭЙ М.М. Нормированные линейные пространства, ИЛ., М., 1961.



Поступила в ред.-изд. отд.

26. II. 1973 г.