УДК 513.88

ВНУТРЕННЯЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

А.Г.Пинскер, В.В.Кузьмина

В работе [1] введено понятие квазилинейного множества (пространства) и установлено, что любое такое множество изоморфно выпуклому подмножеству некоторого линейного пространства. Обратно, выпуклое подмножество произвольного линейного пространства может быть определенным способом превращено в квазилинейное. Тем самым дана внутренняя характеристика выпуклого подмножества линейного пространства. В квазилинейном множестве E_0 определена некоторая алгебраическая операция, а именно: для любого конечного набора элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из E_0 и чисел $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1$ однозначно определен элемент $\lambda_1 x_1 \dot{+} \lambda_2 x_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \lambda_n x_n \in E_0$ - "квазивыпуклая комбинация" элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. При этом предполагаются выполненными некоторые аксиомы. Частным случаем квазивыпуклой комбинации является "произведение" $\lambda \cdot x$, где $0 \leq \lambda \leq 1$ и $x \in E_0$. В E_0 существует единственный "нулевой элемент" θ, удовлетворяющий условию $0 \cdot x = \theta$ для любого $x \in E_0$.

Любое квазилинейное множество E_0 может быть расширено до линейного множества E так, что θ окажется нулевым элементом E; квазивыпуклая комбинация элементов E_0 будет иметь обычный смысл в E; E_0 окажется выпуклым подмножеством E и любой элемент E может быть представлен в виде $\lambda(x-y)$, где $\lambda > 0$ и $x, y \in E_0$. Будем говорить, что

E - линейное расширение квазилинейного множества E_0. Этот результат может быть использован в решении следующей проблемы, поставленной Д.А.Райковым: дать аксиоматическое определение выпуклого множества топологического векторного пространства. Рассмотрению этой задачи и посвящена настоящая статья.

Пусть E_0 - квазилинейное множество, в котором выделено семейство подмножеств $\mathcal{N}=\{\mathcal{U}\}$ ($\mathcal{U}\subset E_0$), удовлетворяющих условиям:

1) каждое $\mathcal{U}\in\mathcal{N}$ "поглощает E_0" в том смысле, что для любого $x\in E_0$ найдется число $0<\lambda\leq 1$ такое, что $\lambda\cdot x\in\mathcal{U}$;

2) каждое $\mathcal{U}\in\mathcal{N}$ - "полууравновешенное" в E_0. Это значит, что если $x\in\mathcal{U}$ и $0\leq\lambda\leq 1$, то $\lambda\cdot x\in\mathcal{U}$;

3) для любого $\mathcal{U}\in\mathcal{N}$ найдется $V\in\mathcal{N}$ такое, что

$$\tfrac{1}{2}\cdot V+\tfrac{1}{2}\cdot V\subset\tfrac{1}{2}\cdot\mathcal{U}\quad\left(\tfrac{1}{2}\cdot V+\tfrac{1}{2}\cdot V=\{\tfrac{1}{2}\cdot x+\tfrac{1}{2}\cdot y)\,/\,x,y\in V\}\right);$$

4) если $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2\in\mathcal{N}$, то существует $\mathcal{U}\in\mathcal{N}$ такое, что $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$.

Будем говорить, что E_0 - квазилинейное топологическое пространство. Покажем, что в его линейном расширении E можно ввести линейную топологию и тем самым установить, что E_0 - выпуклое подмножество топологического векторного пространства E. С этой целью рассмотрим в E семейство $\mathcal{M}=\{\bar{\mathcal{U}}\}$ подмножеств E ($\bar{\mathcal{U}}\subset E$), где

$$\bar{\mathcal{U}}=\mathcal{U}-\mathcal{U}=\{x-y\,/\,x,y\in\mathcal{U},\ \mathcal{U}\in\mathcal{N}\}.$$

Легко видеть, что каждое множество $\bar{\mathcal{U}}\in\mathcal{M}$ поглощающее и уравновешенное в E. Далее, пусть $\bar{\mathcal{U}}\in\mathcal{M}$, $\bar{\mathcal{U}}=\mathcal{U}-\mathcal{U}$, $\mathcal{U}\in\mathcal{N}$. Тогда, по свойству 3, найдется $V\in\mathcal{N}$ такое, что $\tfrac{1}{2}\cdot V+\tfrac{1}{2}\cdot V\subset\tfrac{1}{2}\cdot\mathcal{U}$ и, следовательно, $V+V\subset\mathcal{U}$. Отсюда следует, что $(V-V)+(V-V)\subset\mathcal{U}-\mathcal{U}$ или $\bar{V}+\bar{V}\subset\bar{\mathcal{U}}$. Пусть теперь $\bar{\mathcal{U}}_1,\ \bar{\mathcal{U}}_2\in\mathcal{M}$, $\bar{\mathcal{U}}_1=\mathcal{U}_1-\mathcal{U}_1$, $\bar{\mathcal{U}}_2=\mathcal{U}_2-\mathcal{U}_2$ ($\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2\in\mathcal{N}$). По условию 4, существует $\mathcal{U}\in\mathcal{N}$ такое, что $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$. В таком случае $\mathcal{U}-\mathcal{U}\subset(\mathcal{U}_1-\mathcal{U}_1)\cap(\mathcal{U}_2-\mathcal{U}_2)$ или $\bar{\mathcal{U}}\subset\bar{\mathcal{U}}_1\cap\bar{\mathcal{U}}_2$.

Теперь можно ввести в E линейную топологию, выбирая в качестве фундаментальной системы окрестности нуля семейство $\mathcal{M}$.

Итак, имеет место

ТЕОРЕМА I. Л ю б о е к в а з и л и н е й н о е т о п о л о г и ч е с к о е п р о с т р а н с т в о E_0 и з о м о р ф н о в ы п у к л о м у п о д м н о ж е с т в у н е к о т о р о г о т о п о л о г и ч е с к о г о в е к т о р н о г о п р о с т р а н с т в а E .

Пусть E_0 - выпуклое подмножество некоторого топологического векторного пространства E . Не умаляя общности рассуждений, можно предположить, что E_0 содержит нуль пространства E . Допустим также, что в E содержится окрестность нуля V_0 такая, что $E_0 \cap V_0 \subset \frac{1}{2} E_0$. (*)

Как известно, в E существует фундаментальная система $\mathfrak{M} = \{V\}$ окрестностей нуля такая, что

I. каждая $V \in \mathfrak{M}$ - поглощающее множество;
II. каждая $V \in \mathfrak{M}$ - уравновешенное множество;
Ш. какова бы ни была $V \in \mathfrak{M}$, существует $\tilde{V} \in \mathfrak{M}$ такая, что $\tilde{V} + \tilde{V} \subset V$;
IУ. каковы бы ни были V_1 , $V_2 \in \mathfrak{M}$, существует $V \in \mathfrak{M}$ такая, что $V \subset V_1 \cap V_2$.

Можно также предположить, что V_0 , содержащееся в условии (*), также принадлежит системе $\mathfrak{M}$. Отправляясь от системы $\mathfrak{M}$, определим в E_0 семейство его подмножеств $\mathfrak{N} = \{\mathcal{U}\}$, полагая $\mathcal{U} = E_0 \cap V$, где $V \in \mathfrak{M}$.

Покажем, что множества $\mathfrak{N}$ обладают свойствами I - 4.

1. Пусть $\mathcal{U} \in \mathfrak{N}$, $\mathcal{U} = E_0 \cap V$, $V \in \mathfrak{M}$ и $x \in E_0$. Так как V - поглощающее множество, то при некотором $0 < \lambda \leq 1$ $\lambda x \in V$ и вместе с тем $\lambda x \in E_0$, откуда $\lambda x \in \mathcal{U}$, или $\mathcal{U}$ поглощает E_0 .
2. Пусть $\mathcal{U} = E_0 \cap V$, где $V \in \mathfrak{M}$. Тогда $\mathcal{U}$, являясь пересечением уравновешенного множества V с полууравновешенным E_0 (E_0 - выпуклое подмножество E , содержащее нулевой элемент E), будет полууравновешенным в E_0 .
3. Если $\mathcal{U} = E_0 \cap V$, $V \in \mathfrak{M}$, то, по условию Ш, существует $\tilde{V} \in \mathfrak{M}$ такая, что $\tilde{V} + \tilde{V} \subset V$. Рассмотрим некоторое мн[illegible]ство $\bar{V} \in \mathfrak{M}$, $\bar{V} \subset \tilde{V} \cap V_0$ (его существование сл[illegible]ет из условия IУ). Так как $\bar{V} \subset \tilde{V}$, то $E_0 \cap \bar{V}$ [illegible] $E_0 \cap V_0 \subset \frac{1}{2} E_0$ (условие (*)). В таком случае [illegible] $\cap \bar{V} + E_0 \cap \bar{V} \subset \bar{V} + \bar{V} \subset V$. Вместе

с тем $\bar V + \bar V \subset V$ и, следовательно, $E_0 \cap \bar V + E_0 \cap \bar V \subset \bar V + \bar V \subset V$. Таким образом, $E_0 \cap \bar V + E_0 \cap \bar V \subset E_0 \cap V$. Полагая $\mathcal{U}' = E_0 \cap \bar V$, будем иметь $\mathcal{U}' + \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, или $\frac{1}{2}\mathcal{U}' + \frac{1}{2}\mathcal{U}' \subset \frac{1}{2}\mathcal{U}$.

При этом $\mathcal{U}'$, так же как и $\mathcal{U}$, принадлежит системе $\mathfrak{N}$. Тем самым показана справедливость условия Ш.

4. Пусть $\mathcal{U}_1 = E_0 \cap V_1$, $\mathcal{U}_2 = E_0 \cap V_2$, где $V_1, V_2 \in \mathfrak{M}$. По условию IУ, существует $V \subset V_1 \cap V_2$ ($V \in \mathfrak{M}$). Имеем $\mathcal{U} = E_0 \cap V \subset (E_0 \cap V_1) \cap (E_0 \cap V_2) = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, и условие IУ также имеет место для системы $\mathfrak{N}$.•

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Выпуклое подмножество E_0 топологического векторного пространства E (с условием (*)) может быть превращено в квазилинейное топологическое пространство E.

Предложения, аналогичные теоремам 1, 2, имеют место и для случая локально выпуклого пространства.

Литература

1. ПИНСКЕР А.Г., КУЗЬМИНА В.В. Квазилинейные пространства и выпуклые множества, сборник "Оптимальное планирование", вып. 17, 1970.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, Москва, 1959.

Поступила в ред.-изд. отд.
12. УII. 1973 г.