УДК 51.330:115

РАЗЛОЖЕНИЕ В ДВОЙСТВЕННОМ НАПРАВЛЕНИИ БОЛЬШОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЫПУКЛОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Т.О.М. Кронше

1. Введение

Экономическая система часто описывается следующей математической задачей:

$$\underset{x}{Min} \{ f(x) \mid g(x) \le 0 \}. \tag{1}$$

С помощью подходящего выбора новых переменных и ограничений задачу (1) можно приблизить задачей[1] с разделяющимися переменными:

$$\underset{x_1, x_2}{Min} \{ f^1(x_1) + f^2(x_2) \mid g^1(x_1) + g^2(x_2) \le 0 \}, \tag{2}$$

где $f^2(x_2)$ – выпуклая функция,

$g^2(x_2)$ – выпуклая вектор-функция и

верхние и нижние индексы означают, соответственно, вектор-строку и вектор-столбец, или просто скаляр.

Настоящее исследование финансировано Шведским Советом по Общественным Исследованиям.

[1] Cf. G. B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, 1963, Section 26-3; G. Hadley, Nonlinear and Dynamic Programming, Addison-Wesly Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1964, Chapter 4; T. O. M. Kronsjö, International and Interregional Economic Co-operation and Planning by Linked Computers, in A. J. Scott (Ed.), Studies in Regional Science, London, 1969.

Главной целью такого подразделения производственных деятельностей экономической системы является получение менее сложных подсистем, решение которых можно проводить параллельно. Примером такой задачи является задача (2) со структурой:

$$\min_{x_1, x_{2i}} \{ f^1(x_1) + f^{21}(x_{21}) + \ldots + f^{2i}(x_{2i}) + \ldots + f^{2m}(x_{2m}) \quad | \qquad (3)$$

$$\begin{array}{llll} g_1^1(x_1) + g_1^{21}(x_{21}) & & & \leq 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ g_i^1(x_1) & g_i^{2i}(x_{2i}) & & \leq 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ g_m^1(x_1) & & g_m^{2m}(x_{2m}) & \leq 0 \}, \end{array}$$

где x_1 и x_{2i} - векторы-переменные и
$g_i^1(x_1)$ и $g_i^{2i}(x_{2i})$ - векторы-функции.

Существует, по крайней мере, два важных примера систем с разделяющимися переменными, а именно:

(а) система, в которой функции $f^1(x_1)$ и $g^1(x_1)$ (4)

являются, соответственно, выпуклыми скаляр- и вектор-функциями.

Такое свойство означает, что все производственные деятельности связаны с постоянными или растущими конечной стоимостью и требованиями ресурсов;

(б) система с ограничениями, обусловливающими дискретные значения[1] вектора-переменного x_1. (5)

Свойство системы очень ценно, так как оно дает возможность приблизить экономическую систему, включающую постоянную стоимость, возрастающие конечные расходы, неразделяемость или невозможность компромиссных решений.

Для решения задач, аналогичных задаче (2), разработаны следующие методы:

i) задача с линейными зависимостями и непрерывными переменными изучается в линейном программировании, начало которому положили работы Л.В.Канторовича и Г.Б.Данцига. Среди работ более позднего периода, в которых

---

1) Например, ограничение, согласно которому $x_1 = 0$ или 1, может быть выражено в форме одного равенства: $x_1(x_1 - 1) = 0$, или в форме двух неравенств $x_1(x_1 - 1) \leq 0$ и $-x_1(x_1 - 1) \leq 0$.

исследовались задачи со структурой, напоминающей структуру задачи (3), можно назвать методы Е.М.Л.Биля[1] и Дж.Б.Розена[2];

ii) в случае зависимостей, нелинейных относительно переменных вектора x, и линейных относительно переменных вектора x_{ci}, предлагаемый в настоящей статье метод очень близок к методу Дж.Б.Розена и Дж.С.Орнеа[4];

iii) задача с целыми и непрерывными переменными и линейными зависимостями изучается в смешанно-целочисленном программировании. Среди существующих методов можно назвать методы Р.Гомори[5], А.Х.Ланда и А.Г.Дойга[6] и Дж.Ф. Бендерса[7];

iv) в случае нелинейных и линейных зависимостей в целых переменных и линейных зависимостей в непрерывных переменных, предлагаемый метод очень близок к методу Дж.Ф. Бендерса.

Задачу, изучаемую в настоящей статье, можно рассматривать одновременно и как обобщение и как частный случай задачи, решенной Дж.Б.Розеном и Дж.С.Орнеа: предлагаемая задача является обобщением задачи Розена и Орнеа в том смысле, что

---

[1] E. M. L. Beale, The Symplex Method Using Pseudo-Basic Variables for Structured Linear Programming Problems, in R. L. Graves and P. Wolfe, (Editors), Recent Advances in Mathematical Programming, McGraw-Hill, 1963, pp. 133-148.

[2] J. B. Rosen, Primal Partition Programming for Block Diagonal Matrices, Numerische Mathematik, Vol. 6, 1964, pp. 250-260.

[3] J. B. Rosen, Convex Partition Programming, in R. L. Graves and P. Wolfe (Editors), Recent Advances in Mathematical Programming, McGraw-Hill, 1963, pp. 159-176.

[4] J. B. Rosen and J. C. Ornea, Solution of Nonlinear Programming Problems by Partioning, in Actes de la 3ème Conférence Internationale de Recherche Opérationelle (Proceedings of the 3rd International Conference on Operational Research) Dunod, Paris, 1964, pp. 79-92; and in Management Science, Vol. 10, No. 1, October, 1963, pp. 160-173.

[5] R.E.Gomory, An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programms, in R.L.Graves and P.WolfeEditors), Recent Advances in Mathematical Programming, McGraw-Hill,1963,pp. 269-302.

[6] A.H.Land and A.G.Doig, An Automatic Method of Solving Discrete Linear Programming Problems,Econometrica,Vol.28,1960, pp. 497-520.

[7] J.F.Benders,Partioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems,Numerische Math.Vol.4.1962,pp.238-252.

предположение о линейности функций $f^2(x_2)$ и $g^2(x_2)$ относительно переменных вектора x_2 опускается, хотя функции предполагаются выпуклыми; одновременно настоящая задача является частным случаем задачи Розена и Орнеа в силу предположения о том, что функции $f^2(x_2)$ и $g^2(x_2)$ не зависят от переменных вектора x_1.

Предлагаемый метод также можно рассматривать как обобщение метода Бендерса в том смысле, что функции $f^2(x^2)$ и $g^2(x_2)$ предполагаются нелинейными выпуклыми.

Решающее доказательство сходимости, установленное автором в данной статье, инспирировано работами Данцига и Хьюарда[1].

Насколько известно автору, приведенная выше общая формулировка (2) рассматриваемой задачи и ее решение даны впервые. Предлагаемый метод имеет чрезвычайно интересную экономическую интерпретацию, которая излагается в следующем параграфе. В предлагаемой работе главное внимание уделяется теоретическим аспектам метода, освещающим децентрализованный процесс решений, принимаемых экономическими организациями.

2. Основные черты метода децентрализованного принятия решения

Предлагаемый в статье метод, решающий экономическую задачу (I)-(2) посредством децентрализованного принятия решения, отличается от теории планирования К.Дж.Эрроу, Л.Гурвица и Х. Удзава[2]. По схеме этих авторов оптимальное решение выпуклой задачи

$$\min_x \{ f(x) \mid g(x) \leq 0 \} \tag{I}$$

достигается действиями, с одной стороны, поставщиков ресурсов, и, с другой стороны, предпринимателей -потребителей. Постав-

---

1) G.B.Dantzig, op.cit.; P.Huard, Décomposition barycentrique convexe, Chapter 3, in P.Broise,P.Huard and J.Sentenac, Décomposition des programmes mathématiques,Dunod,Paris, 1968.

2) К.Дж. Эрроу, Л.Гурвиц и Х.Удзава, Исследования по линейному и нелинейному программированию, под редакцией Е.Г. Гольштейна, Изд. иностр. лит., М., 1962.

щики ресурсов либо не меняют цену u_i i-того товара, если товар в избытке $(g_i(x) < 0)$ и цена его равна нулю $(u_i = 0)$, либо меняют цену со временем так, что скорость изменения цен, $\frac{du_i}{dt}$ пропорциональна избытку ($g_i(x)<0$) или недостатку ($g_i(x)>0$), то есть

$$\frac{du_i}{dt} = \underline{\text{если}}\ g_i(x)<0\ \underline{\text{и}}\ u_i=0,\ \underline{\text{тогда}}\ 0,\ \underline{\text{иначе}}\ g_i(x). \quad (i=1,\dots,m). \tag{2}$$

Предприниматели - потребители платят стоимость $f(x)$ и цену(ы) u использованных поставок $y(x)$, то есть общую стоимость $f(x)+uy(x)$ и повышают (понижают) уровень j-той производственной деятельности x_j со временем пропорционально конечному доходу (расходу) этой производственной деятельности $\frac{df}{dx_j}+x\frac{dg}{dx_j}<0(>0)$, а именно

$$\frac{dx_j}{dt} = -\left(\frac{df}{dx_j}+u\frac{dg}{dx_j}\right) (j=1,\dots,n). \tag{3}$$

Характеристической чертой метода Эрроу-Гурвица-Удзава является то, что изменения зависят только от текущего состояния экономики. Отличительной же чертой нашего метода является то, что в нем развитие экономической системы "запоминается" и решение находится в свете накопленной информации.

Для того, чтобы объяснить основной механизм действия метода, рассмотрим простой пример:

$$f^0 = \underset{x_1,x_2}{Min}\{4(x_1-10)^2+(x_2-10)^2 \mid (x_1-6)^2-4(x_2-5)+20\le 0\} \qquad \begin{matrix}\text{Двойственная}\\ \text{переменная}\\ u\end{matrix} \tag{4}$$

Оптимальное решение равно $x_1^0=9.1$, $x_2^0=12.4$, $u_1=1.2$ и $f^0=9.0$

Иллюстрация к примеру дана на рис. I.

В методе различаются две группы предпринимателей - потребителей: одна группа несет ответственность за производственные деятельности x_1, а другая - за производственные деятельности x_2. Для краткости назовем первую группу главной задачей, вторую - подзадачей.

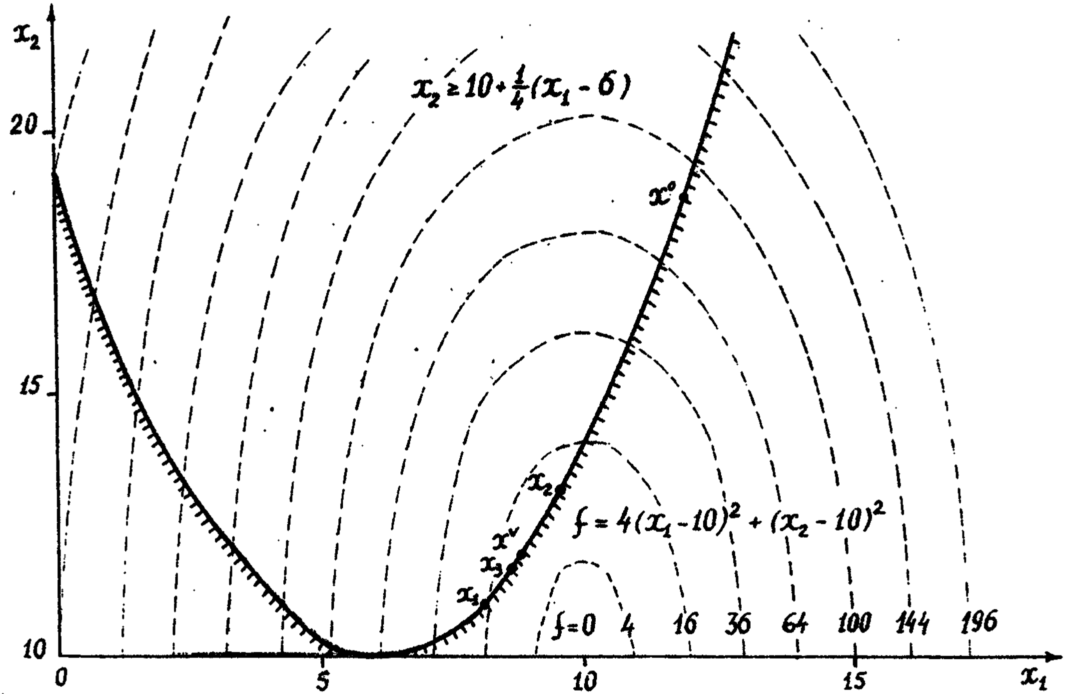

Рис. I. Иллюстрация к примеру (4). Кривые одинаковых значений целевой функции изображены прерывными линиями. Кривая ограничения, определяющего допустимую область, изображена сплошной линией.

При решении главной задачи мы стараемся достичь того, чтобы действие экономической системы осуществлялось с минимальной стоимостью $f^1(x_1)+f^2(x_2)$. Для достижения этой цели мы используем производственные деятельности x_1 и, в принципе, не заинтересованы в сведениях о соответствующих оптимальных производственных деятельностях x_2.

Требования главной задачи на ресурсы $g^1(x_1)$ сообщаются подзадаче, а при решении подзадачи мы, в свою очередь, заинтересованы только в удовлетворении этих требований с минимальной стоимостью $f^2(x_2)$.

И последнее - вместо формулировки и решения точной задачи мы решаем соответствующую приближенную главную задачу и затем последовательно улучшаем приближенное решение главной задачи в процессе "диалога" с подзадачей.

Ниже следует более подробное объяснение главной задачи и подзадачи. Цель этого объяснения состоит в том, чтобы разъяснить их принципиальную сущность, а не в том, чтобы служить основой для практического принятия решения или численных расчетов.

Главную задачу можно получить, формулируя первоначальную задачу I - (2) как задачу минимизации в две ступени

$$\underset{x_1}{Min}\{f^1(x_1)+\underset{x_2}{Min}\{f^2(x_2)\,|\,g^2(x_2)\le -g^1(x_1)\}\}. \qquad (5)$$

Выражая оптимальное решение x_2^* задачи частичной минимизации в виде функции от x_1,

$$x_2^* = x_2^*(x_1), \qquad (6)$$

главную задачу (5) можно привести к виду

$$\underset{x_1}{Min}\{f^1(x_1)+f^2(x_2^*(x_1))\}, \qquad (7)$$

или

$$\underset{x_1}{Min}\, f(x_1), \quad \text{где} \quad f(x_1)\equiv f^1(x_1)+f^2(x_2^*(x_1)). \qquad (8)$$

Так, в приведенном выше примере (4) главную задачу можно сформулировать следующим образом:

$$\underset{x_1}{Min}\{4(x_1-10)^2+\underset{x_2}{Min}\{(x_2-10)^2\,|\,-4(x_2-5)\le -20-(x_1-6)^2\}\}. \qquad (9)$$

Здесь задачу частичной минимизации можно переписать в виде

$$\underset{x_2}{Min}\{(x_2-10)^2 \mid x_2 \geq 10+1/4(x_1-6)^2\}. \qquad (10)$$

Ограничение препятствует тому, чтобы переменная x_2 по величине стала меньше 10 ; целевая функция принимает минимум при наименьшем значении выражения $(x_2-10)^2$. Значит, оптимальное решение функции x_2 для данного x_1 равно

$$x_2^* = 10+1/4(x_1-6)^2. \qquad (11)$$

Вставляя (11) в (9), получим главную задачу

$$\underset{x_1}{Min}\{4(x_1-10)^2+(10+1/4(x_1-6)^2-10)^2\}, \qquad (12)$$

или

$$\underset{x_1}{Min}\{4(x_1-10)^2+1/16(x_1-6)^4\}. \qquad (13)$$

На рис. 2 верхняя кривая (E_0) соответствует условиям задачи (13). Легко видеть, что оптимальное решение главной задачи равно

$$x_1 \approx 9.1.$$

В подзадаче мы стремимся удовлетворить требования главной задачи на ресурсы $g^1(x_1^*)$ с минимальной стоимостью $g^2(x_2)$. Поскольку стоимость $f^1(x_1^*)$ производственных деятельностей временно принимается за постоянную, то общая стоимость $f^1(x_1^*)+f^2(x_2)$ минимизируется по отношению к x_2 только:

$$\underset{x_2}{Min}\{f^2(x_2) \mid g^1(x_1^*)+g^2(x_2) \leq 0\}. \qquad (14)$$

В примере, изображенном на рис. 2, оптимальное решение подзадачи определяется формулой (11) и потому равно

$$x_2^y = 10+1/4(9.1-6)^2 \approx 12.4.$$

Формулировка приближенной главной задачи

Вместо точной главной задачи (7) сформулируем приближенную задачу

$$Min\{f^1(x_1)+\bar{f}^2(x_1)\}. \qquad (16)$$

Функцию $\bar{f}^2(x_1)$ можно последовательно улучшать, осуществляя "диалог" с подзадачей.

По-видимому, существует несколько различных способов формулирования приближенной главной задачи и ее последующего пере-

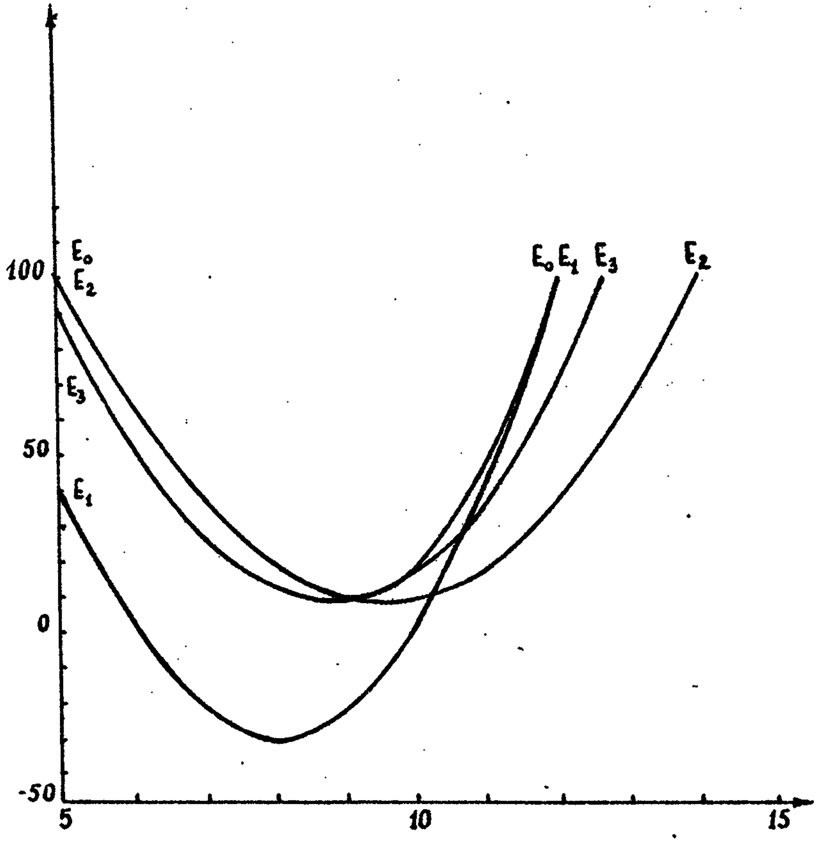

Рис. 2. Для рассматриваемого в тексте примера (4) кривая соответствует точной главной задаче (13); приближенная главная задача, оценивающая точное значение функции снизу, изображается кривой E_1, или высшей на рисунке частью кривых E_1 и E_2, или кривых E_1, E_2 и E_3, которые определяются в процессе решения примера.

смотра, а. значит, и несколько различных методов децентрализованного принятия решения.

Ниже рассматривается способ построения приближенной главной задачи, в котором приближенная функция $\tilde{f}^2(x_1) = \underline{f}^2(x_1)$ всегда является функцией, оценивающей $f^2(x_2^*(x_1))$ снизу или точно, и в котором "диалог" с подзадачей непрерывно улучшает функцию $\underline{f}^2(x_1)$.

Приближенная функция $\underline{f}^2(x_1)$ находится на основании следующих рассуждений:

i) решение главной задачи относительно уровней производственных деятельностей x_1 приводит к требованиям на ресурсы $g^1(x_1)$, удовлетворение которых обеспечивается подзадачей;

ii) изменение в требованиях на ресурсы, в свою очередь, приводит к тому, что в подзадаче для достижения допустимого и оптимального решения приходится изменять уровни производственных деятельностей x_2;

iii) изменение уровней производственных деятельностей x_2 приводит к изменению в целевой функции $f^2(x_2)$ подзадачи;

iv) вместо точной оценки эффектов, обусловленных ii и iii, свойства выпуклости подзадачи можно использовать для нахождения верхней оценки изменения в x_2, учитывая при этом знак изменения, например, полученная оценка изменения $2(-1)$ больше, чем точная величина изменения $1(-2)$, а также для нахождения нижней оценки изменения в $f^2(x_2)$, соответствующего данному изменению в x_2, учитывая при этом знак изменения.

Таким образом, описанный метод позволяет оценить реакцию подзадачи на изменения в требованиях $g^1(x_1)$, накладываемых главной задачей. Для упрощения нижеследующего изложения изменим обозначения и представим подзадачу (I4) в форме

$$f^2(x_2^*(x_1)) = \underset{x}{Min}\{f(x) \mid g(x) + k \leq 0\}, \tag{17}$$

где

$$x = x_2, \; f(x) \equiv f^2(x_2), \; g(x) \equiv g^2(x_2) \quad k = g^1(x_1). \tag{18}$$

Метод, с помощью которого находится нижняя оценка значений в подзадаче, иллюстрируется на рис. 3. На этом рисунке показаны

три различных значения вектора требований на ресурсы: начальное значение k^* и значения k^- и k^+.

Оптимальное решение подзадачи для $k = k^+$ находится в результате изучения допустимых решений x для $g(x) + k^* \leq 0$ или $g(x) \leq -k^*$. Эти решения являются совокупностью всех значений x, меньших или равных значению x^*. Поскольку в области допустимых решений функция $f(x)$ убывает с возрастанием x, оптимальное решение достигается при $x = x^*$.

Оптимальные решения подзадачи для $k = k^-$ и $k = k^+$ получаются тем же способом при $x = x^-$ и $x = x^+$.

Очевидно, что верхняя оценка $\bar{x}$ области допустимых решений, определяемой неравенством $g(x) + k \leq 0$, находится построением касательной (касательной плоскости) к ограничению $g(x)$ в предыдущей оптимальной точке x^* и определением всех точек x, для которых величина, равная значению производной плюс любой вектор k, является меньшей или равной нулю:

$$g^* + \frac{dg^*}{dx}(x - x^*) + k \leq 0. \tag{19}$$

Аналогичным образом нижняя оценка значений целевой функции находится построением касательной (касательной плоскости) целевой функции в предыдущей оптимальной точке x^*

$$f(x) = f^* + \frac{df^*}{dx}(x - x^*). \tag{20}$$

Нижние оценки оптимальных решений $f^{-1} = f(x^-)$ и $f^+ = f(x^+)$, соответствующих значениям $k = k^-$ и $k = k^+$, находятся в результате решения задачи минимизации линейной функции (20), удовлетворяющей линейному условию (19). Из рис. 3 видно, что оптимальное решение x этой задачи равно

$$x = x^* - \frac{dg^*}{dx}(k + g^*), \tag{21}$$

а нижняя оценка значений целевой функции равна

$$f = f^* - \frac{df^*}{dx} \cdot \frac{dg^*}{dx}^{-1}(k + g^*). \tag{22}$$

Обозначим величину $-\frac{df^*}{dx}\frac{dg^*}{dx}^{-1}$ через u_*, тогда будем иметь

$$u_* = -\frac{df^*}{dx}\frac{dg^*}{dx}^{-1} = -\frac{df^*}{dx} \cdot \frac{dx}{dg^*} = -\frac{df^*}{dg^*}. \tag{23}$$

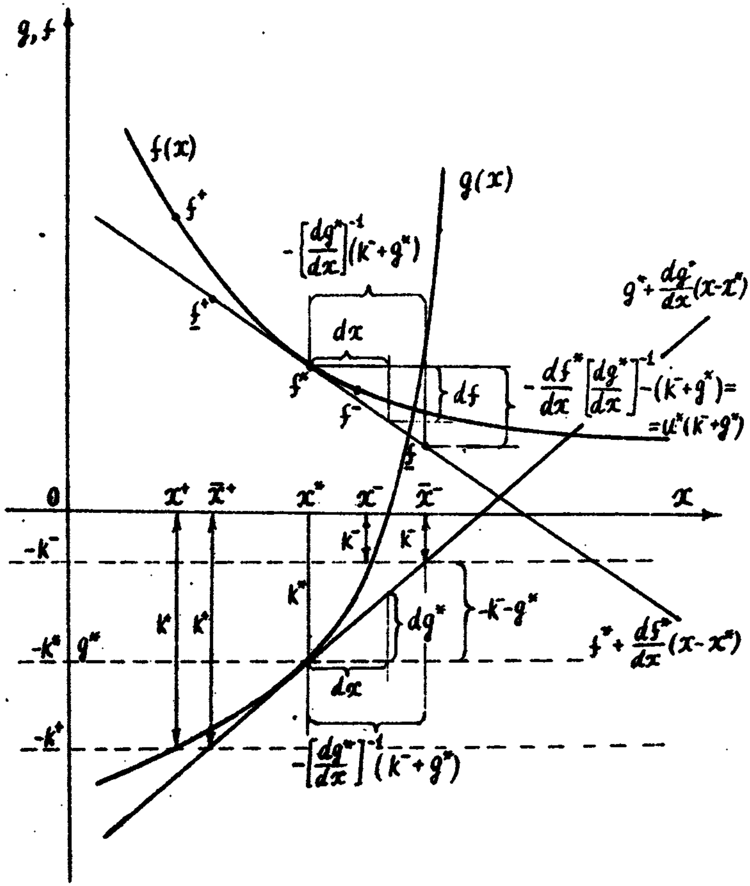

Рис. 3. Иллюстрация последовательности действий, определяющих нижнюю оценку $\underline{f}^*(\underline{f}^-)$ оптимальной целевой функции $f^*(f^-)$, соответствующей измененным требованиям на ресурсы $k^*(k^-)$, когда оптимальная целевая функция f^*, соответствующая требованиям на ресурсы k^* и связанным с ними частным производным df^*/dx и dg^*/dx, известна.

Последнее равенство показывает, что переменная u_* обозначает скорость изменения целевой функции, соответствующего увеличению требований на ресурсы, взятому со знаком минус, то есть соответствующего снижению в требованиях на ресурсы или, другими словами, соответствующего конечной стоимости или объективно-обусловленной оценке ресурсов.

В случае, когда объективно-обусловленные оценки ресурсов вычислены, нижнюю оценку можно выразить в форме

$$\underline{f} = f^* + u_*(k + g^*). \tag{24}$$

Если вектор k^* начальных требований на ресурсы выбрать отличным от рассмотренного выше, то отличной от найденной выше будет и нижняя оценка f^*. Это положение иллюстрируется на рис. 4.

Поскольку любые $\underline{f}^1$, f^2 и т.д. являются нижними оценками для f, то наилучшая оценка функции f дается наибольшей из нижних оценок:

$$\underset{i}{Max}\, f^i. \tag{25}$$

Однако формально эту наилучшую оценку можно получить, рассматривая задачу минимизации переменной z, которая должна быть больше чем или равна любой из нижних оценок:

$$\underset{z}{Min}\,\{z \mid z \geq \underline{f}^i (i \in J)\}. \tag{26}$$

Поскольку $\underline{f}^i$ определяется выражением (24), сформулированную выше задачу можно представить в форме

$$\underset{z}{Min}\,\{z \mid z \geq f^i + u_i(k + g^i)(i \in J)\}. \tag{27}$$

На основании данного в выражении (I8) определения величин и k, получаем:

$$\underset{z}{Min}\,\{z \mid z > f^2(x_2^i) + u_i(g^1(x_1) + g^2(x_2^i))(i \in J)\}. \tag{28}$$

Найденную нижнюю оценку можно использовать в главной задаче (7) вместо точной функции $f^2(x_2^*(x_1))$, которую практически очень трудно определить. В результате получим следующую приближенную (ограниченную) главную задачу:

$$\underset{x_1, z}{Min}\,\{f^1(x_1) + z \mid z \geq f^2(x_2^i) + u_i(g^1(x_1) + g^2(x_2^i))(i \in J)\}. \tag{29}$$

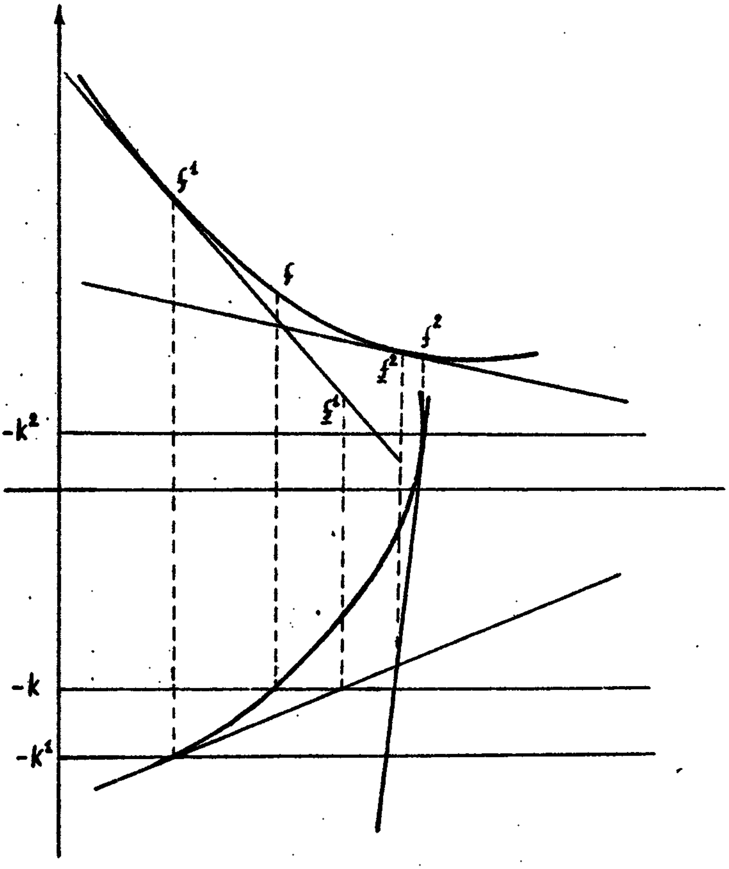

Рис. 4. Оптимальное решение f, соответствующее требованиям на ресурсы k, и его нижние оценки $\underline{f}^1$ и $\underline{f}^2$, найденные на основе известных оптимальных решений, соответствующих требованиям на ресурсы k^1 и k^2.

Прибавляя $f^1(x_1)$ к правой и левой частям ограничений, вводя переменную h, удовлетворяющую условию

$$h = f^1(x_1) + z, \tag{30}$$

а также вводя обозначения

$$f^1_{*i}(x_1) = f^1(x_1) + u_i g^1(x_1). \quad f^{2i}_{*i} = f^2(x_2^i) + u_i g^2(x_2^i),$$

приведем главную задачу (29) к виду:

$$\underset{h,\, x_1}{Min} \{ h \mid h \geq f^1_{*i}(x_1) + f^{2i}_{*i} \ (i \in \mathcal{J}) \}. \tag{31}$$

<u>Метод итераций</u>

При описании метода итераций в целях сокращенности будем обозначать главную задачу через M, подзадачу - через S и испытание - через T.

Для <u>начальной</u> итерации принимаем следующее:

i) индекс r текущей итерации равен нулю;

ii) стоимость f самого дешевого к настоящему моменту решения является бесконечно большой величиной (равна $+\infty$);

iii) нижняя оценка h этого решения является бесконечно малой величиной (равна $-\infty$);

Затем выбираем произвольное решение x_1^r и получаем соответствующее оптимальное (или двойственно допустимое) решение подзадачи, перейдя к фазе S, следующей ниже по тексту.

Для следующей итерации:

Индекс итерации r увеличиваем на единицу;

M: Используя только что полученные значения x_2 и u, формулируем дополнительное ограничение для ограниченной главной задачи (31), совокупность индексов которой, таким образом, выразится множеством, $\mathcal{J} = [1, \ldots, r]$ и находим оптимальное решение $h = h^r$, $x_1 = x_1^r$.

S: С текущими значениями x_1 решаем подзадачу (14) для оптимальных (или двойственно допустимых) x_2^r и u_r; вычисляем стоимость f^r общего решения, самого дешевого к настоящему моменту, для чего включаем член $f^1(x_1^r)$ в целевую функцию подзадачи.

Если разница между стоимостью f^r решения, самого дешевого к настоящему моменту, и нижней оценкой h^r больше чем ε, повторяем итерацию; в противном случае наилучшее из полученных решений принимаем за ε-оптимальное решение.

Иллюстрация децентрализованного принятия решения

Продемонстрируем только что описанный метод итерации на примере (4).

Начальная итерация: $f=\infty,\ h=-\infty,\ x_1=6+4\sqrt{2}\approx 11.66,\ \varepsilon=2$;

S: $f=\min\limits_{x_2}\{(x_2-10)^2+192-128\sqrt{2}\mid -4(x_2-5)+32+20\le 0$ (т.е. $x_2\ge 18$)$\}$

оптимальное решение $f=70.63,\ x_2=18,\ u=4$;

T: $d=70.63+\infty>2$, а значит, итерации следует продолжить.

$r=1$

M: $\min\limits_{h,x_1}\{h\mid h\ge 4(x_1-10)^2+4((x_1-6)^2+20)-144$ (т.е. $h\ge 8(x_1-8)^2-32$)$\}$.

оптимальное решение $h=-32,\ x_1=8$;

S: $f=\min\limits_{x_2}\{(x_2-10)^2+16\mid -4(x_2-5)+4+20\le 0$ (т.е. $x_1\ge 11$)$\}$;

оптимальное решение $f=17,\ x_2=11,\ u=1/2$;

T: $d=17+32=49>2$, а значит, итерации следует продолжить.

$r=2$

M: $\min\limits_{h,x_1}\{h\mid h\ge 8(x_1-8)^2-32,\ h\ge 4(x_1-10)^2+1/2((x_1-6)^2+20)-11\}$,

оптимальное решение $h=6\frac{1}{9},\ x=9\frac{5}{9}$;

S: $f=\min\limits_{x_2}\{(x_2-10)^2+\frac{64}{81}\mid -4(x_2-5)+12\frac{52}{81}+20$ (т.е. $x_1\ge 13\frac{13}{81}$)$\}$,

оптимальное решение $f=10.77,\ x_2=13\frac{13}{81}=13.16,\ u=1\frac{47}{81}$;

T: $d=10.77-6.11=4.66>2$, а значит, итерации следует продолжить.

$r=3$,

M: $\min\limits_{h,x_1}\{h\mid h\ge 8(x_1-8)^2-32,\ h\ge 4\,1/2(x_1-9\frac{5}{9})^2+6\frac{1}{9}$,

$$h\ge 4(x_1-10)^2+\frac{128}{81}((x_1-6)^2+20)-\frac{256.1066}{81.81}$$

$-$ (то есть $h\ge 5\frac{47}{81}((x_1-8\frac{98}{113})^2+$

$+\frac{1507840}{1034289}))\}$,

оптимальное решение $h=8.14,\ x_1=8.87$;

S: $\min\limits_{x_2}\{(x_2-10)^2+5.13\mid -4(x_2-5)+8.22+20\le 0$ (т.е. $x_2\ge 10+(\frac{162}{113})^2$)$\}$,

оптимальное решение $f=9.36,\ x_2=12.06,\ u=1.03$;

$T: d = 9.36 - 8.14 = 1.22 < 2$, и значит, конечное ε -оптимальное решение равно

$$f = 9.36,\ x_1 = 8.87,\ x_2 = 12.06.$$

Математическая формулировка метода разложения

3. Математическая задача

Сформулируем задачу $\mathcal{D}1$

$$\mathcal{D}1 \quad \boxed{\begin{array}{ll} f = Min\{f^1(x_1) + f^2(x_2) \mid & \text{Двойственные переменные} \\ g^1(x_1) + g^2(x_2) \le 0 & u \\ x_1 \in C_1 \quad \}, & \end{array}} \quad \begin{array}{r}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

где x_j - вектор-столбец, $f^j(x_j)$ - скаляр, $g^j(x_j)$ - вектор-столбец, $j = 1,2$; u - вектор-строка и C_1 - выпуклое множество. Верхние и нижние индексы означают, соответственно, столбец (цы), строку(и).

<u>Обозначения</u>

Для упрощения описания задачи и ее решения введем следующие обозначения:

$$f^j = f^j(x_j),\quad g^j = g^j(x_j),\quad f_*^j = f^j + ug^j,\quad (j = 1,2)$$

$$f^{12} = f^1 + f^2,\quad g^{12} = g^1 + g^2,\quad f_*^{12} = f^{12} + ug^{12}.$$

Значение функции, вычисленное для некоторых $x_j = x_j^\ell$ и $u = u_\ell$, обозначим дополнительными верхним и нижним индексами ℓ, то есть $f_*^{j\ell} = f_*^j(x_j^\ell)$ и $f_{*\ell}^j = f^j(x_j) + u_\ell g^j(x_j)$.

Соответствующие матрицы или векторы, полученные для всех множеств индексов L, отметим заменой ℓ на L, например,

x_j^L есть матрица размерности $(J_j \times L)$,

u_L есть матрица размерности $(L \times J)$,

f_*^{jL} - вектор-строка,

f_{*L}^j - вектор-столбец,

и далее.

$f_{*L}^{j''} = \{ f_{*\ell}^{j\ell} \mid \ell \in L \}$ обозначает вектор-столбец,

$e_\ell = 1$ -скаляр и ℓ_L единичный вектор-столбец.

Предположения

H_1: C_1 - компактное и непустое множество;

H_2: $C_2 = \{ x_2 \mid g^{12} \leq 0,\ x_1 \in C_1 \}$ — компактное и непустое множество;

H_3: f^j, g^j - непрерывные выпуклые функции от x_j, заданные и ограниченные на C_j $(j = 1, 2)$;

H_4: Определим вектор g^{12} следующим образом:

$$g^{12} \equiv \begin{vmatrix} g_-^1(x_1) + g_-^2(x_2) \\ g_=^0 + g_=^1 x_1 + g_=^2 x_2 \\ -g_=^0 - g_=^1 x_1 - g_=^2 x_2 \end{vmatrix},$$

где векторы постоянных и матрицы коэффициентов $g^j = (j = 0, 1, 2)$ связаны соответствующими линейными равенствами-ограничениями (которые могут и не существовать), и предположим, что для любой и каждой точки $x_1 \in C_1$ существует такая точка $x_2 = x_2^*(x_1)$, что

$$g_-^1(x_1) + g_-^2(x_2^*) < 0,\ g_=^0 + g_=^1(x_1) + g_=^2(x_2^*) = 0,$$

где $g_=^2$ - невырожденная матрица, то есть строки этой матрицы линейно независимы;

H_5: $\left\| \dfrac{df}{dx_2} \right\|$ и $\left\| \dfrac{dg^2}{dx_2} \right\|$ ограничены сверху на C_2.

4. Главная задача

Пусть L является непустым множеством индексов, а столбцы x_2^ℓ и строки u_ℓ, где $\ell \in L$, являются множеством двойственных решений

$$\{ x_2^\ell, u_\ell \mid (\frac{df^2}{dx_2} + u \frac{dg^2}{dx_2^\ell})_{x_2^\ell} = 0,\ u \geq 0 \}. \qquad (1)$$

Заменим первоначальную задачу $\mathcal{D}1$ приближенной нелинейной программой $\mathcal{D}2$ или двойственной главной задачей:

$$\mathcal{D}2 \quad \boxed{\begin{array}{ll} \underset{h, x_1}{Min} \{ h \mid & \text{Двойственные переменные} \\ f'_L(x_1) + f^{L'}_{*L} - e_L h \leq 0 & v^L \\ x_1 \in C_1 \}. & \end{array}} \quad \begin{array}{r} (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

Оптимальное решение задачи $\mathcal{D}2$ обозначим через h^ℓ, x_1^ℓ и v_ℓ^L.

5. Подзадача

Для постоянных значений h^ℓ и x_1^ℓ сформулируем нелинейную подзадачу $\mathcal{D}3$:

$$\mathcal{D}3 \quad \boxed{\begin{array}{ll} f = \underset{x_2}{Min} \{ f^{1\ell} + f^2(x_2) \mid & \text{Двойственные переменные} \\ g^{1\ell} + g^2(x_2) \leq 0 \} . & u \end{array}} , \quad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

которой соответствует двойственная задача

$$f = \underset{x_2, u}{Max} \{ f_*^{1\ell} + f_*^2(x_2) \mid \tag{3}$$

$$\frac{df_*^\ell}{dx_2} = 0, \; u \geq 0 \} . \qquad (4)\;(5)$$

Пусть f^ℓ, x_2^ℓ, u_ℓ являются оптимальным решением прямой или двойственной задач и

$$d^\ell = f^\ell - h^\ell . \tag{6}$$

6. Верхняя и нижняя границы оптимального решения

ТЕОРЕМА. Если x_1^ν, x_2^ν есть оптимальное решение задачи $\mathcal{D}1$, то решения задач $\mathcal{D}2$ и $\mathcal{D}3$ удовлетворяют двойному неравенству

$$h^\ell \leq f^\nu \leq f^\ell = h^\ell + d^\ell . \tag{1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе неравенство теоремы следует из определения величины d^ℓ, данного в 5-(6) и того обстоятель-

ства, что x_1^ℓ, x_2^ℓ являются допустимым решением задачи 3-(I)-(3).

Первое неравенство получаем следующим образом:

$$h^\ell = \underset{h, x_1}{Min}\{h / e_j h \geq f_{*j}^1(x_1^\ell) + f_{*j}^{2j}, j \in L, x_1 \in C\} \text{ согласно } \mathcal{D}2, \quad (2)$$

принимая во внимание предельное ограничение для $j = k$, $k \in K$, получаем

$$= f_{*k}^{1\ell} + f_{*k}^{2\ell}, \; k \in K,$$

а так как x_1^ℓ является вектором x_1, минимизирующим вышеупомянутые предельные ограничения, заключаем, что

$$\leq f_{*k}^{1\nu} + f_{*k}^{2k}, \qquad \text{где} \quad f_{*k}^{1\nu} \equiv f_{*k}^1(x_1^\nu),$$

теперь, прибавляя и вычитая $f_{*k}^{2\nu}$, получаем

$$= f^{1\nu} + f^{2\nu} + u_k(g^{1\nu} + g^{2\nu}) + f_{*k}^{2k} - f_{*k}^{2\nu}.$$

и, поскольку $u_k \geq 0$ и $g^{1\nu} + g^{2\nu} \leq 0$, переписываем

$$\leq f^{1\nu} + f^{2\nu} + f_{*k}^{2k} - f_{*k}^{2\nu},$$

далее, поскольку f^2, g^2 выпуклые и $u_k \geq 0$, а значит, f_{*k}^2 -выпуклая функция, получаем

$$\leq f^{1\nu} + f^{2\nu} + \frac{df_{*k}^{2k}}{dx_2}(x_2^k - x_2^\nu),$$

наконец, так как решение u_k, x_2^k подзадачи является оптимальным или двойственным допустимым решением, удовлетворяющим 4-(I), получаем

$$= f^{1\nu} + f^{2\nu},$$

$$= f^\nu.$$

СЛЕДСТВИЕ. Если оптимальное решение задач $\mathcal{D}2$ и $\mathcal{D}3$ удовлетворяет неравенству $d^\ell \leq 0$, то точка x_1^ℓ, x_2^ℓ оптимизирует задачу $\mathcal{D}1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При заданном $d^\ell \leq 0$ из (I) следует $d^\ell = 0$ и, значит, $f^\ell = f^\nu$.

7. Сходимость

Предположим, что множество $L = \{1, \ldots, \ell\}$ увеличивается на

единицу с каждой итерацией.

Относительно сходимости предложенного метода следует различать два случая:

1) результат $d^{\ell}=0$ достигается после конечного числа итераций, и, значит, решение получено;

2) результат $d^{\ell}=0$ не достигается никогда;
в этом случае метод дает бесконечную последовательность значений h^{ℓ}. Полученная последовательность неубывающая и ограничена сверху величиной f^{ν}. Если верхний предел последовательности обозначим через $\bar{h}$, то имеет место неравенство $\bar{h} \leq f^{\nu}$. Однако можно показать, что на самом деле $\bar{h}=f^{\nu}$. Для этого достаточно установить, что $d^{\ell} \to 0$, когда $\ell \to \infty$, и затем приложить этот результат к двойному неравенству 6-(I).

Ниже приводится доказательство равенства $\bar{h}=f^{\nu}$. Основными пунктами этого доказательства являются:

i) установление существования бесконечной подпоследовательности, которую можно выделить из бесконечной последовательности решений $\{x_1, x_2, u, h\}$ и которая, на основании предположений, сделанных в отношении бесконечной последовательности решений, сходится к точке $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u_{\sim}, h^{\sim}\}$;

ii) установление того, что $d^{\ell}=d(x_1^{\ell}, x_2^{\ell}, u_{\ell}, h^{\ell}) \geq 0$ и что неравенство $d(x_1^{\ell}, x_2^{\ell}, u_{\ell}, h^{\ell'}) \leq 0$, связанное с первым неравенством, при каждой итерации $\ell' > \ell$ эквивалентно одному из ограничений главной задачи;

iii) установление на основании заключений, полученных выше, и на основании непрерывности используемых функций, того, что

$$\lim_{\ell'>\ell \to \infty} d^{\ell}=d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u_{\sim}, h^{\sim})=0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ.

<u>Ограниченность векторов x_1 и x_2.</u>

Ограниченность векторов x_1 и x_2 следует из предположений H_1 и H_2.

<u>Ограниченность вектора u.</u>

Ограниченность вектора u следует из предположений H_4 и H_5. При доказательстве этого положения различаются два воз-

можных случая:

а) Задача не содержит линейные ограничения-равенства. В этом случае из предположения H_4 следует, что существуют такие x_1^ℓ и x_2^*, что $g^{1\ell}+g^{2*}<0$, $x_1^\ell\in C$. Оптимальное или двойственное решение задачи $\mathcal{D}3$ удовлетворяет условию $\frac{af_{*\ell}^{2\ell}}{dx^\ell}=0$; поэтому

$$\frac{df^{\ell\ell}}{dx}(x_2^*-x_2^\ell)=-u_\ell\frac{dg^{\ell\ell}}{dx_2}(x_2^*-x_2^\ell), \tag{I}$$

поскольку вектор g^ℓ выпуклый и $u_\ell\geqslant 0$, получаем

$$\geqslant -u_\ell(g^{2*}-g^{2\ell}),$$

прибавляя и вычитая $u_\ell g^{1\ell}$, находим

$$=-u_\ell(g^{1\ell}+g^{2*})+u_\ell(g^{1\ell}+g^{2\ell}),$$

на основании условия оптимальности Куна и Таккера последний член в правой части равенства равен нулю, а потому

$$=-u_\ell(g^{1\ell}+g^{\ell*}),$$

$$\geqslant 0.$$

Из предположения H_5 следует

$$\frac{df^{\ell\ell}}{dx_2}(x_1^*-x_1^\ell)\leqslant\sup_{x_2\in C_2}\left\|\frac{df^\ell}{dx_2}\right\|\cdot\sup_{x_2\in C_2}\|x_2^*-x_2^\ell\|=\rho. \tag{2}$$

Таким образом, из (I) и (2) получаем

$$0\leqslant -u_\ell(g^{1\ell}+g^{\ell*})\leqslant\rho. \tag{3}$$

Полагая $u_\ell^k=\max_i\{u_\ell^i\,|\,i\in\mathcal{I}\}$ и

$$q=\max_i\{-g_i^{1\ell}-g_i^{2*}\,|\,i\in\mathcal{I}\}$$

и принимая во внимание, что $u_\ell^i\geqslant 0$, из (3) получаем

$$0\leqslant u_\ell^i q\leqslant u_\ell^k q\leqslant\sum_i u_\ell^i q\leqslant\sum_i u_\ell^i(-g_i^{1\ell}-g_i^{\ell*})\leqslant\rho\ (i\in\mathcal{I}),$$

откуда следует, что

$$0\leqslant u_\ell^i\leqslant u_\ell^k\leqslant\frac{\rho}{q}\ (i\in\mathcal{I}). \tag{4}$$

б) Задача содержит линейные ограничения-равенства. В этом случае, начиная с неравенства (3), доказательство проводится в несколько измененной форме.

Установив неравенство (3), замечаем далее, что из предположения H_4 следует, что ограничения $g^{12} \le 0$ становятся

$$g_-^{\ell}(x_1) + g^{\ell}(x_2) \le 0,$$
$$g^{o}_{=} + g^{1}_{=} x_1 + g^{2}_{=} x_2 = 0.$$

Обозначим соответствующие двойственные переменные этих неравенств через u^- и $u^=$, тогда двойное неравенство (3) примет форму:

$$0 \le -u_\ell^-(g_-^{1\ell} + g_-^{2*}) - u\bar{\bar{\ell}}(g^o_= + g^1_= x_1^\ell + g^2_= x_2^*) \le p, \qquad (5)$$

где член с $u_\ell^=$ исчезает, поскольку $g^o_= + g^1_=(x_1^\ell) + g^2_=(x_2^*) = 0.$

Для того, чтобы исправить положение, введем два подмножества индексов вектора $u_\ell^{=P}$, - назовем их P и N, - таких, что $u_\ell^{=P} \ge 0$ и $u_\ell^{=N} < 0.$

Из предположения о невырожденности $g^2_=$ следует, что существует точка x_2^o, достаточно близкая к x_2^* и такая, что

$$g_-^1(x_1^\ell) + g_-^2(x_2^o) < 0,$$
$$g^o_{=P} + g^1_{=P} x_1^\ell + g^2_{=P} x_2^o < 0,$$
$$g^o_{=N} + g^1_{=N} x_1^\ell + g^2_{=N} x_2^o > 0.$$

Теперь повторим те же рассуждения, что привели к (3) в первом случае доказательства, используя точку x_2^o вместо точки x_2^*. Сейчас член, содержащий $u^=$, не исчезает, и, его можно заменить выражением:

$$\sum_{i\in J} |u^{=i}| \cdot |g^o_{=i} + g^1_{=i} x_1^\ell + g^2_{=i} x_2^o|, \qquad (6)$$

приводящим к заключению, что u^- и $u^=$ ограничены.

<u>Ограниченность целевой функции h.</u>

Ограниченность целевой функции h следует из предположения о том, что множество L непустое, ограниченности функций f^i и g^j (j = 1,2), принятой в H_3, и ограниченности вектора

u, установленной нами выше. Целевая функция h ограничена сверху функцией f^{ℓ} на основании теоремы 6-(I), а верхняя граница для f^{ℓ} существует вследствие ограниченности функций f^{j} (j = I,2), предположенной в H_3.

<u>Выделение бесконечной подпоследовательности $S^{\sim}$</u>

На основании результатов, установленных выше, следует, что последовательность $(x_1^{\ell}, x_2^{\ell}, u_{\ell}, h^{\ell})$ является элементом компактного множества. Таким образом, применяя лемму Больцано-Вейерштрасса[1], из бесконечной последовательности итераций S можно выделить бесконечную подпоследовательность $S^{\sim}$, такую, что

$$(x_1^{\ell}, x_2^{\ell}, u_{\ell}, h^{\ell}) \to (x_1^{\sim}, x_2^{\sim}, u_{\sim}, h^{\sim}) \text{ когда } \ell \to \infty,\ \ell \in S^{\sim}.$$

<u>Выражение d как функции от x_1, x_2, u, h и связанные с этим выражением отношения</u>

Выразим d^{ℓ} в форме неотрицательной функции от x_1^{ℓ}, x_2^{ℓ}, u_{ℓ} и h^{ℓ}:

$d^{\ell} = f^{\ell} - h^{\ell}$	на основании 5-(6);
$= f_{*\ell}^{1\ell} + f_{*\ell}^{\ell\ell} - h^{\ell}$	на основании 5-(3) для оптимального решения x_2^{ℓ}, u_{ℓ};
$= f_{*\ell}^{1}(x_1^{\ell}) + f_{*\ell}^{\ell\ell} - h^{\ell}$	на основании принятых обозначений;
$= d(x_1^{\ell}, x_2^{\ell}, u_{\ell}, h^{\ell})$	на основании определения функции;
$\geqslant 0$	вследствие 6-(I).

Важно отметить, что <u>почти</u> то же самое выражение, что и среднее в вышеприведенной цепочке формул, появляется в главной задаче $\mathcal{D}2$, в левой части ограничения-неравенства 4-(3), выполняемого для всех итераций $\ell'+1 > \ell+1$. Эти два выражения различаются только тем, что в левой части ограничения 4-(3) значения x_1 и h равны $x_1^{\ell'}$ и $h^{\ell'}$, т.е.

I) Г.М.Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, том I, Физматгиз, Москва, 1963.

$$f^{1}_{*\ell}(x_1^{\ell'}) + f^{2\ell}_{*\ell} - h^{\ell} =$$ используя те же обозначения, что

$$d(x_1^{\ell'}, x_2^{\ell}, u_\ell, h^{\ell'})$$ и выше;

$$\leq 0$$ поскольку $(x_1^{\ell'}, h^{\ell'})$ является допустимым решением для 4-(3) после завершения итерации ℓ' и перед началом следующей итерации $\ell'+1$.

<u>Предельное значение функции d.</u>

Полученные результаты можно обобщить в форме:

$$d^{\ell} = d(x_1^{\ell}, x_2^{\ell}, u_\ell, h^{\ell}) \geq 0 \quad \text{и}$$

$$d(x_1^{\ell'}, x_2^{\ell}, u_\ell, h^{\ell'}) \leq 0 \quad \text{для всех } \ell' > \ell.$$

Функция d непрерывна и ограничена на основании предположения H_3 и ограниченности x_1, x_2, h и u. Поэтому существует предел последовательности значений d^{ℓ} при $\ell \to \infty$ и $\ell \in S^{\sim}$, выражаемый в форме.

$$\lim_{\ell \to \infty} \{d^{\ell} \mid \ell \in S^{\sim}\} = \lim_{\ell \to \infty} \{d(x_1^{\ell}, x_2^{\ell}, u_\ell, h^{\ell}) \mid \ell \in S^{\sim}\}$$
$$= d(x_1^{\sim}, x_2^{\sim}, u_{\sim}, h^{\sim}) \geq 0,$$

но

$$\lim_{\ell' > \ell \to \infty} \{d(x_1^{\ell'}, x_2^{\ell}, u_\ell, h^{\ell'}) \mid \ell', \ell \in S^{\sim}\}$$
$$= d(x_1^{\sim}, x_2^{\sim}, u_{\sim}, h^{\sim}) \leq 0,$$

откуда следует, что $d = 0$ и что

$$\boxed{\lim_{\ell \to \infty} \{d^{\ell} \mid \ell \in S^{\sim}\} = 0.} \qquad (7)$$

Полученный результат вместе с 6-(I) показывает, что подпоследовательность значений h^{ℓ}, соответствующая подпоследовательности индексов $S^{\sim}$, сходится к f^{y}, а поскольку последовательность h^{ℓ} монотонна, то она сходится к f^{y} для всей последовательности индексов S.

8. Приближенные решения

Для сходимости метода нет необходимости при каждой итерации находить точное оптимальное решение $(x_1^{*}, x_2^{*}, u_{*}, h^{*})$. Достаточно

найти допустимое прямое решение задачи $\mathcal{D}2$ и допустимое двойственное решение задачи $\mathcal{D}3$. Обозначим эти решения через $(x_1^\ell, x_2^\ell, u_\ell, h^\ell)$ так, что

$$d^* \geq d^\ell \geq d^* - \varepsilon_\ell > 0, \qquad (1)$$

$$h^* \leq h^\ell \leq h^* + \varepsilon_\ell, \qquad (2)$$

где ε_ℓ образуют последовательность, стремящуюся к нулю, когда $\ell \to \infty$.

Обозначая допустимое решение индексом ℓ и оптимальное $*$ и используя неравенства (1) и (2), преобразуем формулу теоремы 6-(1) к виду:

$$h^\ell - \varepsilon_\ell \leq h^* \leq f^\nu \leq f^* = h^* + d^* \leq h^\ell + d^\ell + \varepsilon_\ell. \qquad (3)$$

Неравенство (3) обусловливает сходимость метода, поскольку приведенная выше аргументация о том, что предельное значение последовательности d^ℓ равно нулю, остается в силе и $\varepsilon_\ell \to 0$, а значит, $d^\ell + \varepsilon_\ell \to 0$.

9. Дальнейшие исследования

По мнению автора настоящей статьи, важно установить с помощью теоретического анализа и практических приложений, структуру и размеры задач, а также необходимую точность решения, для которых предлагаемый метод [1] может дать лучшие или худшие результаты по сравнению с другими существующими методами. Такое исследование важно для дальнейшего развития теории и практики оптимальной координации международной экономики и соответствующих систем, связанных с вычислительными машинами.

---

1) Настоящий метод используется в качестве одного из основных математических методов для разложения блочно-треугольных выпуклых задач программирования в работе:

T.O.M.Kronsjö, Optimal Co-ordination of a Large Convex System (Decomposition of a Nonlinear Convex Separable Economic System in Primal and Dual Directions to Obtain a Common Subproblem), in Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Band 183, Heft 3, 1969, pp. 378-400.