1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 13(30)

УДК 512.25/.26 + 519.3

ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.А.Булавский, Р.А.Звягина, А.А.Каплан, В.И.Шмырёв

Статья посвящена обзору исследований по численным методам решения задач оптимального планирования, проводившихся в основном сотрудниками математико-экономического отделения Института математики СО АН СССР (некоторые из них теперь в отделении не работают). Поскольку тематика статьи достаточно широка, то описываемые результаты порой тесно переплетаются с работами, проводившимися в других местах, а некоторые из этих результатов получены другими исследователями независимо.

Авторы настоящей статьи, однако, не ставили перед собой задачу написать сколько-нибудь полный обзор исследований по указанной тематике. Поэтому текст статьи и список литературы отражает лишь работы довольно узкого круга математиков.

Исследования, описанные в первых трех параграфах и частично в шестом, связаны с развитием метода последовательного улучшения для задачи линейного программирования, созданного Л.В.Канторовичем [48, 49, 50]. Обзор общих методов решения задачи линейного программирования дан Г.Ш.Рубинштейном [71, 72]. Алгоритмический учет специфики задач в рамках этого метода позволил значительно повысить объем решаемых задач. Некоторое обобщение метода привело к методам решения выпуклых задач с линейными ограничениями.

В четвертом и пятом параграфах рассмотрены методы решения систем линейных и нелинейных неравенств и задач выпуклого программирования. В шестом параграфе дан обзор работ по тем на-

правлениям математического программирования, которые не нашли отражения в перв... пяти параграфах.

§ 1. Двухкомпонентные задачи линейного программирования

Важный класс задач линейного программирования, который часто встречается в приложениях, образуют транспортные задачи. Для этого класса задач Л.В.Канторович и М.К.Гавурин [51] предложили вариант метода последовательного улучшения, известный как метод потенциалов. Ввиду особой структуры ограничений транспортной задачи, при ее решении методом последовательного улучшения матрицы встречающихся систем линейных уравнений перестановкой строк и столбцов приводятся к треугольному виду, что позволяет существенно упростить решение систем и повысить размерность решаемых задач. Алгоритмизацию этого метода осуществила М.А.Яковлева [90], предложившая использовать скрытую треугольность путем последовательного многократного просмотра информации. На такие просмотры, однако, затрачивалась значительная часть общего машинного времени счета. В.А.Булавский [14] предложил специальный алгоритм метода потенциалов, в котором для поддержания треугольного вида матриц требуется лишь однократный (и притом неполный) просмотр информации. Это существенно повысило эффективность алгоритма. Идея подхода, положенного в основу алгоритма, состоит в том, что требуемая упорядоченность строк и столбцов на каждом шаге не отыскивается заново, а легко устанавливается изменением порядка, полученного на предшествующем шаге.

Метод потенциалов был обобщен на класс распределительных (обобщенных транспортных) задач М.К.Гавуриным, Г.Ш.Рубинштейном и С.С.Суриным [31]. М.А.Яковлева [92] этот метод распространила на случай произвольных двухкомпонентных задач линейного программирования, характеризующихся тем, что каждая переменная задачи входит лишь в два из её ограничений (не считая условий неотрицательности). При решении этого класса задач методом последовательного улучшения матрицы систем линейных уравнений перестановкой строк и столбцов приводятся к треугольному виду с одной поддиагональю (или точно к треугольному виду).

Дальнейшее повышение размерности решаемых распределительных задач было осуществлено благодаря учету дополнительной специфики. Подход, предложенный Г.Ш.Рубинштейном [73], основан на том, что матрица системы ограничений распределительной задачи, помимо двухкомпонентности, имеет ещё и узкоблочную структуру (см. [42]). Ввиду этого при решении одной из двух линейных систем, фигурирующих на каждом шаге метода последовательного улучшения, можно провести исключение некоторых неизвестных из части уравнений. Получающаяся при этом система для оставшейся части неизвестных будет по-прежнему обладать двухкомпонентной структурой, и для её решения можно воспользоваться специальными алгоритмами. Так как матрица второй линейной системы получается из первой системы транспонированием, то решение второй системы упрощается аналогично.

В.И.Шмырёв [84] разработал алгоритм метода последовательного улучшения для решения обобщенной транспортной задачи большого объема, в которой число потребителей существенно превосходит сравнительно небольшое число поставщиков. Такая ситуация возникает, например, в распределительных задачах, когда учитываются одновременно производственный и транспортный факторы. Эти задачи обладают узкоблочной структурой с большим числом узких блоков. Ввиду этого большинство строк матрицы одной из двух линейных систем, рассматриваемых на одном шаге метода последовательного улучшения, содержат лишь по одному ненулевому элементу, и решение системы после надлежащих исключений сводится к решению некоторой системы небольшой размерности (в крайнем случае равной удвоенному числу поставщиков) с двухкомпонентной структурой. Предложенные алгоритмы решения двухкомпонентных систем основаны на специальной упорядоченности информации о системе, которая поддерживается от шага к шагу аналогично тому, как это делается в [14] для случая треугольных систем. Эти алгоритмы могут быть использованы и для общего случая двухкомпонентных задач линейного программирования.

§ 2. Методы факторизации базисной матрицы

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования: максимизировать линейную функцию (c, x) на множестве неотри-

цательных решений системы линейных уравнений $Ax = b$. Здесь A - матрица размерности $m \times n$. Не нарушая общности, можно считать, что в ней имеется единичная подматрица E порядка m.

При больших m самой трудоёмкой процедурой каждого шага метода последовательного улучшения является решение систем линейных уравнений

$$yB = c \quad , \quad Bg = A^{j'}, \tag{2.1}$$

где квадратная неособенная матрица B составлена из столбцов A^{j_i} ($i = 1,2,\ldots,m$) матрицы A. В этом параграфе рассматриваются некоторые модификации метода, использующие разложение $B = L \cdot \Lambda$. Тип матриц L и Λ определяется, с одной стороны, спецификой матрицы A, а с другой - требованием, чтобы процесс решения систем

$$z\Lambda = \tilde{c} \quad , \quad yL = z \; ; \tag{2.2}$$

$$Lh = A^{j} \quad , \quad \Lambda g = h \tag{2.3}$$

был значительно проще, чем систем (2.1). При этом необходимо учесть, что на каждом шаге метода в неособенной матрице B заменяется один столбец и получающаяся при этом матрица B' также неособенная. Все рассматриваемые ниже способы разложения матрицы B обладают тем свойством, что переход от представления $B = L \cdot \Lambda$ к представлению $B' = L' \cdot \Lambda'$ требует на порядок меньше операций, чем при полном разложении матрицы B'. Более того, в каждом из этих методов одну из матриц L или Λ можно хранить не полностью (или даже совсем не хранить), что приводит, разумеется, к некоторому увеличению объема работы на каждом шаге.

Мы здесь рассмотрим четыре общих подхода к построению указанных методов. Отдельные типы задач, охватываемые этими подходами, рассматривали В.Л.Макаров [66], А.Е.Бахтин и Ю.И. Волков [10], В.А.Булавский [18].

В дальнейшем при описании методов остановимся лишь на двух процедурах каждого шага: на решении систем (2.2) и (2.3), а также на переходе от разложения $B = L \cdot \Lambda$ к разложению $B' = L' \cdot \Lambda'$.

1. З а д а ч и с д о п о л н и т е л ь н ы м и с т о л б ц а м и . Пусть матрица A, за исключением по-

следних столбцов A^j ($j = n_1+1, n+2, \dots, n$), имеет такую структуру, что решение систем (2.1) не представляет труда, если $j_i \le n_1$ для любого $i = 1,2,\dots, m$. Предположим, что в матрице B столбцы A^{j_i} имеют номера $j_i \le n_1$ для $i = 1,2,\dots, m_1$ и $j_i > n_1$ для $i = m_1+1, m_1+2, \dots, m$. М.А.Яковлева [95,96] предложила вместо B хранить неособенную матрицу L, которая получается из B заменой последних $m - m_1$ столбцов некоторыми столбцами A^j с номерами $j \le n_1$. Тогда в представлении $B = L \cdot \Lambda$ матрица Λ определяется однозначно, и её столбцы являются коэффициентами разложения соответствующих столбцов B^i ($i = 1,2,\dots, m$) матрицы B по столбцам матрицы L. Поэтому Λ имеет вид

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|c} E_{11} & \Lambda_{12} \\ \hline 0 & \Lambda_{22} \end{array}\right],$$

где E_{11} - единичная матрица порядка m_1.

Таким образом, решение любой системы с матрицей Λ сводится к решению подсистемы с матрицей Λ_{22} порядка $m - m_1$. Если при этом считать известной лишь матрицу Λ_{22} (вместо Λ), то получается метод, экономный в отношении оперативной памяти ЭВМ. Эта экономия, конечно, сопряжена с некоторой дополнительной вычислительной работой. Именно при неполном хранении матрицы Λ приходится решать на каждом шаге две системы с матрицей Λ_{22} и четыре или пять систем с матрицей L, решение которых, как уже отмечалось, не представляет большого труда. Что касается матрицы Λ_{22}, то можно хранить обратную к ней, которая пересчитывается от шага к шагу.

2. Задачи с дополнительными ограничениями общего вида. Предположим, что матрица A, за исключением последних строк A_i ($i = m_1+1, m_1+2, \dots, m$), имеет такую структуру, что решение систем уравнений с подматрицами матрицы A, не содержащими последних $m - m_1$ строк, не представляет труда. Методы решения такого типа задач изучались Р.А.Звягиной [38,39,42].

В матрице B из первых m_1 строк выделим квадратную неособенную подматрицу B_{11} (для простоты будем считать, что в нее вошли первые m_1 столбцов из B). Тогда можно однозначно определить разложение $B = L \cdot \Lambda$ с матрицами L и

$\Lambda = E + \tilde{\Lambda}$ - соответственно верхней и нижней блочно-треугольными. Точнее,

$$L = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & 0 \\ \hline B_{21} & L_{22} \end{array}\right], \quad \tilde{\Lambda} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \Lambda_{12} \\ \hline 0 & \underbrace{0}_{m-m_1} \end{array}\right]\Big\} m_1 . \qquad (2.4)$$

Отсюда следует, что решение каждой из систем (2.1) сводится к решению двух систем с матрицами B_{11} и L_{22}, первая из которых решается просто, а вторая, как правило, невысокого порядка.

При замене в матрице B одного столбца может потребоваться перестановка столбцов. Хранящаяся информация позволяет произвести пересчет нужных таблиц.

Примерами задач, для которых подсистемы с матрицей B_{11} решаются особенно просто, могут служить следующие.

(а) Транспортная и двухкомпонентная задачи с дополнительными ограничениями общего вида.

(б) Задачи линейного программирования с узкоблочной матрицей, т.е. матрицей, имеющей вид:

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_{p-1} & \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{p,p-1} & A_{pp} \end{bmatrix}, \qquad (2.5)$$

где A_k $(1 \le k < p)$ - однострочные подматрицы-блоки. В этом случае $m_1 = p-1$, матрица B_{11} - диагональная, а Λ_{12} - узкоблочная диагональная. Впервые на такие задачи обратил внимание Г.Ш.Рубинштейн [70].

(в) Задачи с матрицей вида (2.5), но с блоками A_k $(1 \le k < p)$ произвольных размеров. В этом случае m_1 равно числу строк во всех блоках A_k $(1 \le k < p)$, а матрицы B_{11} и Λ_{12} - блочно-диагональные (рис. 1).

Обобщение последнего примера рассматривается в следующем пункте.

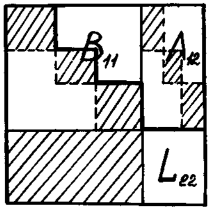

Рис. I

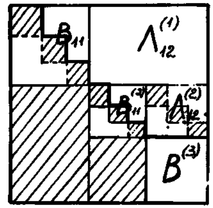

Рис. 2

3. **Иерархическое упорядочение в задачах линейного программирования.** Пусть матрица A имеет вид (2.5), причем $p \geq 2$ и подматрица $A^{(2)} = [A_{p1}\, A_{p2} \ldots A_{p,p-1}\, A_{pp}]$ не менее чем однострочечная. Назовем A_k ($1 \leq k < p$) блоками первой ступени, а подматрицу $A^{(2)}$, которой подчинены все A_k ($1 \leq k < p$), – блоком второй ступени. Таким образом, в матрице A установлена двухступенчатая иерархия (рис. 3).

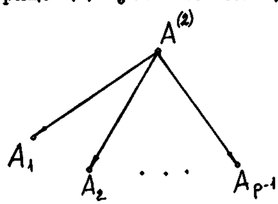

Рис. 3

Предположим теперь, что каждая из матриц A_k ($1 \leq k < p$) также имеет вид (2.5). Введя в каждой из этих матриц двухступенчатую иерархию и оставив на первой ступени те и только те блоки, которые выполняют в матрицах A_k ту же роль, что и блок $A^{(2)k}$ в матрице A, отнесем остальные блоки матриц A_k на нулевую ступень. Увеличив номера всех ступеней на I, получим трехступенчатую иерархию в матрице A (если в некоторой матрице A_k невозможно или нет необходимости выделять структуру типа (2.5), то всю эту матрицу будем считать блоком типа $A^{(2)}$). Описанную процедуру можно повторить любое число раз. Обозначим через l число иерархических ступеней в матрице A и заметим, что каждый блок s-й ступени при $1 \leq s < l$ подчиняется одному и только одному блоку ($s+1$)-й ступени.

Р.А.Звягина [43-47] заметила, что разложение матрицы B в произведение двух матриц блочно-треугольного типа является ($l-1$)-кратным повторением процедуры, описанной в предыдущем

пункте. Для этого достаточно выбрать в качестве первых m_1 строк все те, которые "пересекают" блоки первого уровня, и построить матрицы (2.4). В силу l-ступенчатой иерархии в A (а также и в B) матрицы $B_{11} = B_{11}^{(1)}$ и $\Lambda_{12} = \Lambda_{12}^{(1)}$ - блочно-диагональные, причем в $L_{22} = B^{(2)}$ имеется ($l-1$)-ступенчатая иерархия. Разложим $B^{(2)}$ (подобно B) в произведение двух матриц $L^{(2)}$ и $\Lambda^{(2)} = E^{(2)} + \tilde{\Lambda}^{(2)}$ блочно-треугольного типа:

$$L^{(2)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(2)} & 0 \\ B_{21}^{(2)} & L_{22}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Lambda}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \Lambda_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь $E^{(2)}$ - единичная матрица; $B_{11}^{(2)}$ и $\Lambda_{12}^{(2)}$ - блочно-диагональные матрицы (см. рис. 2), а в $L_{22}^{(2)} = B^{(3)}$ имеется ($l-2$)-ступенчатая иерархия. Затем процесс можно продолжить с матрицей $B^{(3)}$ и т.д. Через $l-1$ таких шагов в правом нижнем углу таблицы (типа изображенной на рис. 2) получится матрица $L_{22}^{(l-1)} = B^{(l)} = B_{11}^{(l)}$ с одноступенчатой иерархией.

Итак, исходная матрица B разлагается в произведение двух матриц L и $\Lambda = E + \tilde{\Lambda}$ блочно-треугольного типа:

$$L = \begin{bmatrix} B_{11}^{(1)} & & & \\ & B_{12}^{(2)} & & \\ B_{21} & B_{21}^{(2)} & \ddots & \\ & & \cdots & B_{11}^{(l)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & \Lambda_{12}^{(1)} & & & \\ & 0 & \Lambda_{12}^{(2)} & & \\ & & 0 & \vdots & \\ & & & 0 & \Lambda_{12}^{(l-1)} \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

При этом матрицы $B_{11}^{(s)}$ и $\Lambda_{12}^{(s)}$ - блочно-диагональные для всех $s = 1, 2, \ldots, l-1$.

Решение любой системы с матрицей L сводится к решению l систем с блочно-диагональными матрицами $B_{11}^{(s)}$ ($s = 1, 2, \ldots, l$). Если считать, что вместо матрицы L известны лишь ее диагональные блоки, то при решении каждой из систем $yL = z$ или $Lh = A^{j'}$ придется дополнительно решать расширяющиеся подсистемы некоторых систем вида $\tilde{y}\Lambda = \tilde{z}$ или $\Lambda\tilde{q} = \tilde{h}$ соответственно. Число таких подсистем не превосходит $l-1$.

Назовем столбцы матрицы B, определяющие неособенную матрицу $B_{H}^{(s)}$, г л а в н ы м и на s-й ступени ($s = 1,2,\ldots,\ell$). Очевидно, матрицы (2.6) определяются однозначно составом главных столбцов на всех ступенях. При замене i_0-го столбца, главного на s_0-й ступени, достаточно изменить состав главных разве лишь на ступенях с номерами $s \geq s_0$. Это изменение состоит из последовательности циклических перестановок некоторых главных столбцов (по одному из каждой ступени) и столбца $A^{i'}$, который в начальный момент формально считается главным (и единственным) на $(\ell+1)$-й ступени. При осуществлении указанных перестановок можно избежать прохода через матрицы, близкие к особенным.

В общем случае алгоритм тем более эффективен, чем меньше число ℓ. В связи с этим возникает следующая оптимизационная задача. Для неориентированного графа (P, R) с множествами P и R вершин и ребер соответственно построить ориентированный граф (P, V), удовлетворяющий следующим условиям:

1) в каждую вершину графа (P, V) входит не более одной дуги;

2) между любыми двумя вершинами, соединенными ребром на графе (P, R), имеется путь на графе (P, V);

3) максимальная длина пути на графе (P, V) минимальна.

4. М е т о д о р т о г о н а л и з а ц и и. В заключение рассмотрим метод, в котором тип матриц L и Λ непосредственно не связан со спецификой матрицы A и при реализации которого вычисляется (и хранится) только матрица Λ. Этот метод разработан В.А.Булавским [15,16].

Пусть матрица B представлена в виде произведения ортогональной матрицы L и верхней треугольной матрицы Λ. В силу соотношений $L^{-1} = L^{T}$ и $(\Lambda^{-1})^{T} = (\Lambda^{T})^{-1}$ (здесь T означает транспонирование) решение систем (2.2) сводится к решению систем $x\Lambda = \tilde{c}$ и $\tilde{y}\Lambda^{T} = x$, после чего вектор y вычисляется по формуле $y = \tilde{y}B^{T}$. Аналогично, решение систем (2.3) сводится к решению систем $\Lambda^{T}h = B^{T}A^{i}$ и $\Lambda g = h$.

Предположим, что в матрице B нужно заменить i_0-й столбец на $A^{i'}$. Из условия неособенности матрицы B' следует, что последний отличный от нуля элемент столбца h имеет номер $k \geq i_0$. Если $k = i$, то i_0-й столбец в матрицах B и Λ заменяется соответственно на $A^{i'}$ и h. Если $k > i_0$,

то i_0-й столбец в B и Λ вычеркивается, столбцы с номерами i ($i_0 < i < k$) сдвигаются на одну позицию влево и на освободившееся ($k-1$)-е место вставляются столбец $A^{j'}$ в B и столбец h в Λ. В получившейся при этом матрице $\tilde{\Lambda}$ каждый из столбцов с номером i ($i_0 \leq i < k$) имеет непосредственно под диагональным элементом элемент отличный от нуля. Чтобы привести $\tilde{\Lambda}$ к треугольному виду достаточно домножить $\tilde{\Lambda}$ слева на последовательность из $(k - i_0)$ специально выбираемых элементарных матриц вращения.

Аналогичный метод пересчета получен для случая, когда матрица B изменяется на матрицу ранга один (что происходит, например, с матрицей $L_{\ell\ell}$ в п. 2 настоящего параграфа). Трудоемкость пересчета имеет тот же порядок, что и трудоемкость одного шага обычного симплекс-метода.

§ 3. Методы последовательного улучшения для выпуклых задач с линейными ограничениями

Общая идея метода последовательного улучшения для задач линейного программирования, состоящая в направленном переборе вершин многогранника, определяемого условиями задачи, допускает обобщение на задачи о минимизации нелинейной функции f при линейных ограничениях, если при этом рассматривать не только вершины многогранника допустимых решений, но и грани более высокой размерности. В.А.Булавский и Г.Ш.Рубинштейн [26] разработали метод, основанный на интегрировании (точном или приближенном) некоторой дифференциальной системы, в котором происходит направленный переход от точки минимума функции f в одной грани допустимого множества к аналогичной точке другой грани. В применении к задаче квадратичного программирования получается точный метод. Геометрически идея состоит в следующем.

Пусть допустимая точка x лежит в некоторой грани $\bar{\Gamma}$ с аффинным носителем H и доставляет минимум функции f в H. Найдем грань Γ, примыкающую к $\bar{\Gamma}$ и имеющую размерность на единицу большую. При этом предположим, что в Γ точка x не является точкой минимума функции f. Это можно сделать на основе признака оптимальности. Выберем направление s так, чтобы гиперплоскости $H(\varepsilon) = H + \varepsilon s$ заполняли при $\varepsilon \in (-\infty, +\infty)$

всю аффинную оболочку $L(\Gamma)$ грани Γ. Для перемещения в точку минимума f на $L(\Gamma)$ можно двигаться по кривой γ, которую заполняют точки $x(\varepsilon)$, являющиеся точками минимума f на $H(\varepsilon)$. При этом предполагается, что функция f выпукла, дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующему условию: по каждому направлению s функция f либо линейна, либо $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(x) > 0$ при всех $x \in R^n$.

В этих предположениях функция $x(\varepsilon)$ непрерывно дифференцируема, и для нее получается система обыкновенных дифференциальных уравнений. При достижении траекторией точки минимума в грани Γ роль многообразия H на следующем шаге играет многообразие $L(\Gamma)$. При выходе же в грань $\hat{\Gamma}$ меньшей размерности требуемой гиперплоскостью в этой грани будет $H(\varepsilon_0) \cap L(\hat{\Gamma})$, где ε_0 таково, что $x(\varepsilon_0)$ является точкой пересечения кривой γ с границей грани Γ. При этом требуется продолжить движение в грани $\hat{\Gamma}$.

В.А.Булавский и М.А.Яковлева [28] использовали эту общую идею для создания вычислительно устойчивого процесса. В предложенном ими методе уже не предполагается, что точка $x(\varepsilon)$ известна точно, а интегрирование дифференциальной системы заменено прямолинейным сдвигом, величина которого определяется условием допустимости точки и достаточным убыванием значения функций f. Процесс организован так, что точность, с которой известна точка $x(\varepsilon)$, возрастает с приближением к решению задачи. При некотором дополнительном предположении (условие двойственной невырожденности решения) метод через конечное число шагов переходит в метод Ньютона для решения некоторой системы уравнений.

Г.Ш.Рубинштейн и В.И.Шмырев [75] исследовали другой подход к решению рассматриваемого класса задач. Они исходили из того, что поиск минимума функции f на аффинном многообразии является более простой операцией, чем поиск минимума на многогранном множестве общего вида. Этот подход возник как обобщение метода решения задачи максимизации на многограннике произведения двух линейных форм, предложенного Г.Ш.Рубинштейном в [74]. Опишем общую схему метода.

Пусть на многогранном множестве M требуется минимизировать квазивыпуклую функцию f, удовлетворяющую условиям:

А. Градиент функции f обращается в нуль лишь в точках ее минимума на R^n.

В. Для каждого непустого аффинного многообразия $L \subset R^n$, на котором функция f не достигает минимума, существует направление g, не выводящее из L и такое, что $\frac{\partial f}{\partial g}(x) < 0$ при всех $x \in R^n$.

Эти предположения обеспечивают справедливость для задачи минимизации f при линейных ограничениях признака оптимальности в дифференциальной форме, обычного для задач выпуклого программирования. Кроме того, если ограничения задачи совместны, то возможен лишь один из двух случаев:

1) в задаче существует оптимальный вектор;

2) многогранник, определяемый условиями задачи, содержит луч, на котором функция f строго убывает (ввиду условия В это будет так и для любого параллельного луча).

Рассматриваемая схема направленного перебора граней многогранника M, определяемого условиями исходной задачи, состоит в следующем.

К началу очередного шага имеется некоторая точка $x \in M$ и содержащая её грань Γ размерности k. Рассмотрим задачу минимизации функции f на аффинной оболочке $L(\Gamma)$ грани Γ. Используя признак оптимальности для этой задачи, определяем, является ли точка x её решением. Если это так, но x не доставляет минимума f на M, то можно указать грань Γ' размерности $k+1$ такую, что $L(\Gamma') \supset L(\Gamma)$ и $\inf\limits_{z \in L(\Gamma')} f(z) < f(x)$.

В этом случае происходит переход к следующему шагу процесса с заменой Γ на Γ'.

Если x не является точкой минимума f на $L(\Gamma)$, то осуществляется прямолинейное движение из точки x до границы Γ либо по лучу $\Lambda \subset L(\Gamma)$, на котором f строго убывает, либо по отрезку, соединяющему точку x с точкой минимума f на $L(\Gamma)$. Если при этом граница Γ не достигается, то в случае движения по отрезку мы приходим к уже рассмотренной ситуации, а в случае движения по лучу убеждаемся, что в исходной задаче нет оптимальных векторов. Если же граница грани Γ при указанном движении достигается, то осуществляется переход в грань меньшей размерности, и процесс продолжается.

При обычном предположении о невырожденности ограничений задачи такой процесс перебора граней многогранника M конечен.

Рассмотрен также двойственный вариант этой схемы и некоторые комбинированные методы последовательного улучшения, не имеющие непосредственных аналогов в линейном программировании. В этих методах на каждом шаге процесса имеются допустимые векторы прямой и двойственной задач, которые от шага к шагу улучшаются. В.И.Шмырев [86] рассмотрел класс задач, в которых двойственная задача допускает явную формулировку, а функция f нелинейная лишь на подпространстве размерности не более 4. Приведенный для этого случая алгоритм последовательного улучшения требует на каждом шаге минимизации функции лишь одной переменной. Он же [87] рассматривал вопросы алгоритмической конкретизации общей схемы метода для задач квадратичного программирования. Предложенный алгоритм основан на том, что в этом случае задача минимизации функции f на аффинных многообразиях эквивалентна решению некоторой системы линейных уравнений. Отмечается также возможность построения более экономных алгоритмов (требующих меньшего объёма памяти ЭВМ) на основе схемы сопряженных направлений. Частный случай задачи квадратичного программирования, позволяющий построить экономный (с точки зрения необходимой памяти ЭВМ) алгоритм, рассмотрел В.А.Булавский [13, 20].

Специальный случай нелинейных задач с линейными ограничениями рассмотрели А.Е.Бахтин и А.Б.Горстко [8].

§ 4. Методы проектирования для выпуклых задач

Общую схему методов, рассматриваемых в этом параграфе, можно описать следующим образом. Имеется замкнутое выпуклое множество Q и точка x вне Q. Выберем другое замкнутое выпуклое множество H, содержащее Q и не содержащее x, и найдем в H точку $\bar{x}$, ближайшую к x. Понятно, что к любой точке множества Q новая точка будет ближе, чем исходная. Затем для точки $\bar{x}$ выберем новое множество H и так далее. При удачном выборе последовательности множеств H получается сходящийся процесс, который в пределе дает точку множества Q. Различные методы этой группы отличаются в основном способом выбора множеств H.

В.А.Булавский [11,12] применил метод последовательного проектирования, разработанный для систем линейных неравенств,

к задаче линейного программирования. Основная идея такого применения состояла в чередовании шагов метода проектирования с возмущающим сдвигом в сторону градиента максимизируемой функции. Он же [13] обобщил метод последовательного проектирования на случай, когда каждая проекция осуществляется не на одно полупространство, а на пересечение нескольких полупространств, определяемых частью общей системы неравенств. А.И.Лобырев [64,65] изучал метод последовательного проектирования применительно к задаче о нахождении точки в пересечении выпуклых множеств и к некоторым задачам выпуклого программирования.

К рассмотренному направлению примыкают работы В.А.Булавского [22,25], посвященные проекционным методам, основанным на аппроксимации множества решений системы неравенств пересечением сравнительно небольшого числа полупространств. Основное содержание этих работ состоит в следующем.

Пусть заданы выпуклое замкнутое множество M и точка x_0 вне M. Пусть, далее, для M имеется аппроксимирующая система отделяющих полупространств $a_i x \geqslant \beta_i$, $i \in I$, пересечение которых обозначим через M_I. Предположим, что левые части неравенств линейно-независимы, а ближайшая к x_0 точка x_I множества M_I лежит в пересечении граничных гиперплоскостей. Будем говорить в этом случае, что имеется приближенная проекция точки x_0 на множество M. Основная операция, стандартный шаг, состоит в следующем. Добавим к имеющимся новое отделяющее полупространство $a_\nu x \geqslant \beta_\nu$, не содержащее x_I. Если сдвинуть границу этого полупространства в x_I и затем постепенно перемещать обратно, то ближайшая к x_0 точка будет непрерывно изменяться, начиная с x_I. В этом процессе некоторые из старых отделяющих полупространств могут стать несущественными и выбыть из рассмотрения. При возвращении нового полупространства в свое истинное положение мы получим новую аппроксимирующую систему отделяющих $a_i x \geqslant \beta_i$, $i \in \bar{I}$, и новую ближайшую точку $x_{\bar{I}}$. При этом $\nu \in \bar{I}$ и $\bar{I} \subset I \cup \{\nu\}$.

Если речь идет о проектировании точки x_0 на множество решений конечной системы линейных неравенств, то за конечное число описанных стандартных шагов либо будет найдена проекция, либо выяснится несовместность системы. Однако при больших системах реализация стандартного шага в таком методе наталкива-

ется на недостаточную мощность вычислительных машин, так как аппроксимирующие системы могут быть весьма большими. Поэтому приходится сочетать стандартные шаги с некоторым усреднением, при котором новая аппроксимирующая система заменяется системой, вообще говоря, меньшего размера, но дающей ту же приближенную проекцию x_T. Такая модификация позволяет ограничиться любым желаемым объемом аппроксимирующих систем.

Пусть требуется решить задачу

$$Ax \geqslant b, \quad \|x - x_0\|^2 - \min,$$

где x лежит в вещественном гильбертовом пространстве, а система неравенств конечная или счётная. В последнем случае приходится расширять совокупность привлекаемых неравенств по мере исчерпания достаточно больших невязок. Если последовательность $\{x_n\}$ получена применением стандартных шагов с усреднением, то либо через конечное число шагов будет найдено решение (или выяснена несовместность системы неравенств), либо $\lim \|x_n\| = +\infty$, и тогда система несовместна, либо $\{x_n\}$ сходится к решению.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Требуется решить систему

$$A_s(x) \leqslant 0, \quad s = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.1}$$

где x принадлежит банахову пространству, а каждое неравенство - это, в свою очередь, система выпуклых (или линейных) неравенств, левые части которых непрерывно дифференцируемы. Пусть уже найдена точка x_n. Решим (точно или приближенно) частные задачи:

$$\begin{cases} A'_s(x_n)(x - x_n) + A_s(x_n) \leqslant 0, \\ \|x - x_n\|^2 - \min. \end{cases}$$

Найденные решения обозначим через $x_{n,s}$. Точку $\bar{x}_n$ найдем как решение задачи

$$(x_{n,s} - x_n,\ x - x_{n,s}) \geqslant 0, \ s = 1, 2, \ldots, m,$$
$$\|x - x_n\|^2 - \min$$

и положим

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n \bar{x}_n .$$

В систему для определения $\bar{x}_n$ можно добавить любые неравенст-

ва, являющиеся следствием системы (4.1). Если $\alpha_n \in [\alpha, 2-\alpha]$, где $\alpha > 0$, и система (4.1) совместна, то последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к некоторому решению. При несовместной системе либо последовательность $\{x_n\}$ оказывается неограниченной, либо $\|x_{n+1} - x_n\|$ не стремится к нулю. Мы предполагаем, что точность решения частных линеаризованных задач растет с номером шага.

Некоторая модификация процесса позволяет получить решение, ближайшее к заданной точке x_0.

Если каждое из неравенств в (4.1) является конечной системой, частные проекции $x_{n,s}$ находятся точно и выполнено обычное условие телесности относительно нелинейных неравенств в (4.1), то сходимость описанного метода имеет скорость геометрической прогрессии. Если к тому же $m=1$, а производные левых частей неравенств в системе $A_1(x) \leq 0$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем σ, то скорость сходимости имеет порядок $1+\sigma$.

§ 5. Методы решения нелинейных задач

Здесь мы рассмотрим методы, специально приспособленные для решения нелинейных задач.

1. Метод штрафов является универсальным методом для решения экстремальных задач с ограничениями. Решение исходной задачи определяется как предельная точка последовательности решений вспомогательных задач на безусловный экстремум, в каждой из которых минимизируемая функция*) получается добавлением к целевой функции исходной задачи так называемой штрафной функции, играющей роль штрафа за нарушение ограничений. Для отыскания решения вспомогательной задачи в качестве начальной используется точка минимума, определенная на предыдущем шаге.

Эффективность метода штрафов зависит прежде всего от того, насколько удачно построены штрафные функции. Вопросу выбора

---

*) При рассмотрении метода штрафов удобно считать, что исходная задача состоит в минимизации функции f при ограничениях вида $g^j(x) \leq 0$, $j = 1,2,\ldots,m$. Такой постановки мы будем придерживаться на протяжении всего параграфа.

штрафных функций посвящено значительное число работ. Приведенные ниже утверждения относительно сходимости метода штрафов для задач выпуклого программирования, доказанные А.А.Капланом [58,59], не учитывают конкретного вида штрафных функций, а опираются лишь на характеристические свойства.

Пусть f, g^j - выпуклые функции на R^n, $\Omega=\{x: g^j(x)\leq 0,$ $j=1,2,\ldots,m\}$ - телесный компакт, φ_k, $k=1,2,\ldots,$ - квазивыпуклые функции на R^n, выпуклые в области $\Omega_\delta = \{x: g^j(x)\leq\delta,\ j=1,2,\ldots,m\}$ при некотором $\delta>0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Если

1) $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=0$ для $x\in \operatorname{int}\Omega$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=+\infty$ для $x\overline{\in}\Omega$,

то, начиная с некоторого K, функции $F_k(x)=f(x)+\varphi_k(x)$ достигают своего минимума; последовательность $\{x^k\}$, $k\geq K$ $(F_k(x^k)=\min\limits_{x\in R^n} F_k(x))$, ограничена, и любая предельная точка доставляет решение исходной задачи.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть функции f, g^j, $j=1,2,\ldots,m$, дифференцируемы, выполнено условие Слейтера, а функции φ_k, $k=1,2,\ldots,$ дифференцируемы и удовлетворяют условиям 1) и 2). Если $\nabla\varphi_k(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\psi_k^j(x)\nabla g^j(x)$, причем $\psi_k^j(x)$ непрерывны, неотрицательны и $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k^j(x^k)=0$, как только $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, g^j(x^k)<0$, то, начиная с некоторого K, точки*) $(x^k,u^k)\in R^{n+m}$ являются допустимыми в двойственной задаче; последовательность $\{(x^k,u^k)\}$ $(k\geq K)$ ограничена и

---

*) Точка x^k определена в утверждении I.

любая ее предельная точка доставляет решение двойственной задачи.

Смысл утверждения 2 заключается в том, что двухсторонние оценки для целевой функции исходной задачи могут быть получены без непосредственного решения двойственной задачи, так как допустимые решения двойственной задачи определяются по точкам x^k путем вычисления $\psi_k^1(x^k), \ldots, \psi_k^m(x^k)$, где $\psi_k^1, \ldots, \psi_k^m$ – известные функции.

Получено условие, гарантирующее, что при достаточно больших k точки x^k попадают внутрь Ω. Здесь также исследованы две функции штрафа, не применявшиеся ранее при решении экстремальных задач.

2. Идея <u>метода отсечения</u> для решения задач выпуклого программирования, принадлежащая Келли, состоит в следующем. Множество Ω погружается в многогранник, после чего решается задача минимизации целевой функции на данном многограннике. Затем добавляется одно или несколько линейных ограничений, отсекающих от многогранника полученную точку минимума таким образом, чтобы множество Ω содержалось в новом многограннике, и процесс повторяется. Для сходимости процесса, естественно, необходимо, чтобы добавляемые ограничения обеспечивали хорошую аппроксимацию множества Ω в окрестности точки, являющейся решением (одним из решений) исходной задачи.

А.Вейнотт и А.А.Каплан независимо друг от друга предложили следующий способ построения отсечений, гарантирующий сходимость описанного метода. Определяется точка $x^* \in int\,\Omega$, и на k-м шаге после решения вспомогательной экстремальной задачи (пусть y^k – это решение) находим точку x^k пересечения отрезка $[y^k, x^*]$ с границей Ω. Следующий многогранник получается добавлением ограничения $\psi_k(x) \le \psi_k(x^k)$, где ψ_k – такой линейный функционал, что $\psi_k(z) \le \psi_k(x^k)$ для $z \in \Omega$.

При указанном способе отсечения для достижения определенной точности решения обычно удается обойтись существенно меньшим числом ограничений, нежели при способе Келли. Кроме того, на каждом шаге процесса имеются двухсторонние оценки вида

$$f(x^k) \ge \min_{x\in\Omega} f(x) \ge f(y^k),$$

причем $\lim\limits_{k\to\infty}[f(x^k)-f(y^k)]=0$. В дальнейшем А.А.Каплан [56] модифицировал описанный процесс для случая, когда допустимое множество Ω не является телесным.

3. При реализации <u>метода возможных направлений</u> на каждом шаге процесса для определения очередного направления спуска, как правило, приходится решать задачу линейного программирования или задачу выпуклого программирования, среди ограничений которой имеется одно нелинейное. Разработана [57] модификация указанного метода, в которой для уменьшения трудоемкости процесса вводится система фиксированных направлений G, и тогда экстремальную задачу выбора направления приходится решать лишь на тех шагах, когда невозможен эффективный сдвиг в допустимой области по направлениям, принадлежащим G. Процесс построен таким образом, что его сходимость гарантирована при различных множествах G. С точки зрения простоты метода интересен случай, когда G - система координатных направлений, а с точки зрения быстроты сходимости целесообразно выбирать в качестве G систему сопряженных направлений (с периодическим её перевычислением).

4. В заключение параграфа остановимся на работах В.А.Булавского [23,24] по методу Ньютона для операторных неравенств и задачи выпуклого программирования.

Пусть X и Y - вещественные банаховы пространства, причем в Y выделен выпуклый замкнутый конус K положительных элементов. Рассмотрим нелинейный непрерывно дифференцируемый оператор $T: X\to Y$ и неравенство $T(x)\leqslant 0$. Для измерения невязки в этом неравенстве введем функционал h,

$$h(y)=\sup\{g(y): g\geqslant 0,\ \|g\|<1\},$$

и пусть $\varphi(x)=h(T(x))$. Величина $\varphi(x)$ - это норма положительной части невязки. В частности, если рассматриваемое неравенство - конечная система $g_k(x)\leqslant 0$, $k\in K$, то в качестве $\varphi(x)$ может фигурировать $\sum\limits_k (g_k(x))^+$, $\max\limits_k (g_k(x))^+$ и т.д. Естественный способ получения поправки в методе Ньютона состоит в решении линеаризованной задачи

$$T(x)+T'(x)\xi\leqslant 0,\quad \|\xi\|-\min.$$

Если пространство X гильбертово, то для решения линеаризованной задачи можно использовать, например, проекционные методы. Однако получаемые приближения лишь в пределе удовлетворяют всем условиям линеаризованной задачи. Кроме того, если левая часть неравенства не выпукла, то линеаризованная система может оказаться несовместной (даже вблизи решения). Определим направление ξ из возмущенной линеаризованной системы

$$h(T(x)+T'(x)\xi) \leq q_1 \min\{\varphi(x), [\varphi(x)]^{\tau(1+\alpha)}\},$$

$$\|\xi\| \leq \mathcal{D}[\varphi(x)]^{\tau},$$

где $0 \leq \tau \leq 1$, $0 < q_1 < 1$, $\mathcal{D} > 0$, $\alpha \geq 0$. При некоторых дополнительных предположениях удается доказать разрешимость возмущенной системы.

Шаг метода Ньютона состоит в релаксации функции φ из точки x по направлению ξ. Если последовательность $\{x_n\}$ построена по методу Ньютона и бесконечна, неравенство $T(x) \leq 0$ разрешимо, а оператор T непрерывно дифференцируем, то $\lim \varphi(x_n) = 0$. Если к тому же $\tau = 1$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к решению неравенства $T(x) \leq 0$.

Чтобы получить скорость сходимости, характерную для метода Ньютона, предположим, что производная оператора T удовлетворяет условию Гельдера с показателем α. При этом справедливо следующее. Если полученная последовательность $\{x_n\}$ бесконечна, то $\lim \varphi(x_n) = 0$. Если $\tau(1+\alpha) \geq 1$, то существует $\lim x_n = \bar{x}$, являющийся решением неравенства $T(x) \leq 0$. Сходимость имеет порядок $\tau(1+\alpha)$.

Помимо основного метода Ньютона для неравенства $T(x) \leq 0$ изучался модифицированный метод, в котором производная T' не перевычисляется, начиная с некоторого шага.

Вторая задача, для решения которой рассмотрен метод Ньютона, это задача математического программирования

$$\min\{\varphi(x) : x \in Q\},$$

где Q - непустое компактное выпуклое множество в вещественном гильбертовом пространстве, а φ - выпуклая дважды дифференцируемая функция, вторая производная которой удовлетворяет условию Гельдера с показателем α. Метод Ньютона для такой задачи состоит в определении вектора ξ из приближенной задачи

$$\min\{\varphi'(x_n)\xi + \frac{1}{2}\varphi''(x_n)\xi\xi : x_n + \xi \in Q\}$$

и сдвиге в направлении ξ (возможно, не на полную длину). Получено обоснование метода в предположении, что выполнены некоторые условия невырожденности, более слабые, чем обычное требование равномерной положительной определенности второй производной. В частности, эти условия выполнены, если пространство X конечномерное, множество Q является выпуклым многогранником, причем X разлагается в прямую сумму подпространств X_1 и X_2 так, что φ линейна вдоль X_1 и $\varphi''(x)hh \geq \delta\|h\|^2$ при $x \in X$ и $h \in X_2$. Здесь $\delta > 0$.

Для задачи выпуклого программирования также наряду с основным изучен и модифицированный метод.

§ 6. Другие работы по численным методам

Для задач целочисленного программирования проводилась работа по систематизации результатов и экспериментальной проверке методов (Ю.А.Волков и В.И.Хохлюк [30], В.И.Хохлюк [81]), по исследованию конечности некоторых вариантов алгоритма Гомори (А.А.Колоколов и В.И.Хохлюк [62]), а также по использованию случайного поиска при решении целочисленных задач с булевыми переменными (Д.Г.Терзи [79]).

Вопросам календарного и сетевого планирования посвящено несколько работ. Алгоритмы поиска критического пути и замкнутых контуров на сетевом графике, а также другие вопросы анализа ориентированных графов рассмотрены в работах Л.Т.Петровой [67], Л.Т.Петровой и Н.Н.Карнауховой [68], Л.Я.Лейфмана и Л.Т.Петровой [63]. Задачи сетевого планирования с учетом ограниченных ресурсов исследовали С.М.Анцыз и Л.Т.Петрова [6] и С.М.Анцыз [5]. Оригинальный алгоритм для поиска решения задачи календарного планирования предложил Г.П.Акилов [1].

Некоторые работы касаются развития общих методов решения задачи линейного программирования. В.И.Шмырев [83] исследовал метод параметра для решения задачи линейного программирования, А.Е.Бахтин [9] рассмотрел вопрос о реализации двойственного симплекс-метода при решении больших задач линейного программирования, В.А.Булавский [17,21] изучал вопрос о на-

чале счета в линейном программировании и о преодолении ситуаций, близких к вырожденным. Применительно к задаче раскроя линейных материалов В.А.Булавский и М.А.Яковлева [27] предложили алгоритм, реализующий идею построения шкалы индексов для задачи о ранце (Л.В.Канторович и В.А.Залгаллер [52]).

Имеются работы и по другим направлениям. Стохастическим программированием занимались В.Е.Солдатов [77,78] и А.Б.Горстко [32], метод решения одной задачи размещения рассмотрел А.Б.Горстко [33], метод решения для модели Неймана предложил В.И.Шмырёв [85]. Задачи параметрического дробно-линейного программирования исследовала Н.В.Шмырёва. Численными методами решения экстремальных задач в функциональных пространствах занимались Г.П.Акилов и А.М.Рубинов [2], А.М.Рубинов [69], В.Ф.Демьянов и А.М.Рубинов [34,35,36]. Возможность использования методов выпуклого программирования для решения некоторых задач математической физики, в частности, для классической задачи упруго-пластичности (в вариационной постановке) исследовал А.А.Каплан.

Большая работа была проделана по созданию программ для решения различных задач математического программирования. Для решения общей задачи линейного программирования предназначены программы, написанные Р.А.Звягиной [37] и М.М.Андреевой [3]. Две программы для решения блочной задачи созданы Р.А.Звягиной [40,41]. М.А.Яковлева [91,93,94] написала программы для решения обобщенной транспортной и общей двухкомпонентной задач, а также транспортной задачи на сети. В.И.Шмырёв написал программу, реализующую алгоритм [84] для решения обобщенной транспортной задачи в специальной постановке (задача оптимальной загрузки прокатных станов). Программы для решения задач целочисленного программирования созданы Ю.И.Волковым [29], С.М.Анцызом и В.И.Лохлюком [7]. В.Ф.Уефелов [80] написал программу для анализа сетевых графиков, М.А.Яковлева [97] - для разбивки потока в сети на маршруты. Программу для решения специальных задач нелинейного (в частности, невыпуклого) программирования написала Н.В.Шмырёва [88]. Программы для решения некоторых специальных задач созданы М.М.Андреевой [3], С.К.Сенюковой [76] и В.А.Булавским [19].

Литература

1. АКИЛОВ Г.П. Об одном алгоритме в задаче календарного планирования. - В кн.: Математическое программирование. М., 1966, с. 46-61.
2. АКИЛОВ Г.П., РУБИНОВ А.М. Метод последовательных приближений для разыскания полинома наилучшего приближения. - "Докл. АН СССР", 1964, т. 157, № 3, с. 503-505.
3. АНДРЕЕВА М.М. Программа приближения непрерывных функций многочленами. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1964, № 1, с.89-118.
4. АНДРЕЕВА М.М. Программа мультипликативного алгоритма для задачи линейного программирования с двусторонними ограничениями на переменные. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1966, № 4, с. 5-62.
5. АНЦЫЗ С.М. Алгоритм приближенного решения задачи распределения ресурсов (сетевое планирование). - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1969, № 12, с. 103-110.
6. АНЦЫЗ С.М. и ПЕТРОВА Л.Т. Задачи распределения ресурсов в сетевом планировании. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1967, № 7, с. 41-76.
7. АНЦЫЗ С.М., ХОХЛЮК В.И. Алгоритм I Гомори и модификация Мартина для этого алгоритма (две процедуры для численного решения линейной полностью целочисленной задачи). - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1969, № 13, с.57-61.
8. БАХТИН А.Е., ГОРСТКО А.Б. О решении нелинейных экстремальных задач с линейными ограничениями специального вида. - В кн.: Математическое программирование. М., 1966, с. 40-45.
9. БАХТИН А.Е. О реализации двойственного симплекс-метода при решении задач линейного программирования большой размерности. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1968, № 9, с. 15-38.
10. БАХТИН А.Е., ВОЛКОВ Ю.И. Метод последовательного улучшения плана для одного класса задач линейного программирования. - В кн.: Экономика и матем. методы. 1967, т.3, № 4, с. 581-587.
11. БУЛАВСКИЙ В.А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования. - "Докл. АН СССР", 1961, т. 137, № 2, с. 258-260.
12. БУЛАВСКИЙ В.А. Итеративный метод решения общей задачи линейного программирования. - "Сибирск. матем. ж.", 1962. т. 3, № 3, с. 313-332.
13. БУЛАВСКИЙ В.А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования. - В кн.: Материалы Всесоюзной конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании. Новосибирск, 1962, 11 с.
14. БУЛАВСКИЙ В.А. Об одном алгоритме решения транспортной задачи. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1964, № 2, с. 41-49.

15. БУЛАВСКИЙ В.А. О разложении квадратной матрицы в произведение ортогональной и треугольной. - "Сибирск. матем. ж.", 1969, т. 10, № 2, с. 467-469.

16. БУЛАВСКИЙ В.А. Метод ортогонализации в линейном программировании. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1970, № 15, с. 7-21.

17. БУЛАВСКИЙ В.А. Замечание о начале счета в линейном программировании. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1970, № 15, с. 76-78.

18. БУЛАВСКИЙ В.А. О решении одной специальной транспортной задачи с дополнительными ограничениями. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1971, № 1(18), с. 7-21.

19. БУЛАВСКИЙ В.А. Некоторая модель планирования поставок и метод её решения. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1971, № 1(18), с. 134-157.

20. БУЛАВСКИЙ В.А. Один специальный алгоритм квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, № 5(22), с. 22-36.

21. БУЛАВСКИЙ В.А. О ситуациях, близких к вырождению. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, № 5(22), с. 5-10.

22. БУЛАВСКИЙ В.А. Об одном типе проекционных методов в математическом программировании. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, № 5(22), с. 11-22.

23. БУЛАВСКИЙ В.А. О расширении области сходимости итерационных методов повышенной точности. - "Докл. АН СССР", 1972, т. 205, № 2, с. 274-277.

24. БУЛАВСКИЙ В.А. О решении нелинейных неравенств и экстремальных задач методами повышенной точности. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1973, № 9(26), с. 188-202.

25. БУЛАВСКИЙ В.А. О конечномерной аппроксимации в некоторых выпуклых задачах. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1973, № 9(26), с. 181-187.

26. БУЛАВСКИЙ В.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О решении задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями методом последовательного улучшения допустимого вектора. - "Докл. АН СССР", 1963, т. 150, № 2, с. 231-234.

27. БУЛАВСКИЙ В.А., ЯКОВЛЕВА М.А. О решении задачи оптимального раскроя линейных материалов на ЭВМ. - В кн.: Линейное программирование (Труды научного совещания по применению матем. методов в экономическом исследовании и планировании, 1960, т. 4) М., 1961, с. 83-87.

28. БУЛАВСКИЙ В.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Метод последовательного улучшения для выпуклых задач с линейными ограничениями. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, № 5(22), с. 37-62.

29. ВОЛКОВ Ю.И. Программа для приближенного решения частной задачи линейного программирования с булевыми переменными.- В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, № 13, с. 29-38.

30. ВОЛКОВ Ю.И., ХОХЛЮК В.И. Методы решения целочисленных задач линейного программирования. - В кн.: Математические модели и методы оптимального планирования. Новосибирск, 1966, с. 5-35.

31. ГАВУРИН М.К., РУБИНШТЕЙН Г.Ш., СУРИН С.С. Об оптимальном использовании средств при выполнении нескольких видов работ. - "Сибирск. матем. ж.", 1962, 3, № 4, с. 481-499.

32. ГОРСТКО А.Б. Об одной стохастической задаче теории управления. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1964, № 2, с. 69-74.

33. ГОРСТКО А.Б. Об одной задаче размещения специального вида. - В кн.: Математическое программирование. М., 1966, с. 117-120.

34. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., РУБИНОВ А.М. К задаче о минимизации гладкого функционала при выпуклых ограничениях. - "Докл. АН СССР", 1965, т. 160, № 1, с. 15-17.

35. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., РУБИНОВ А.М. Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве. - "Вест. Ленингр. ун.-та . Серия математика, механика и астрономия", 1964, № 19, вып. 4, с. 3-17.

36. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., РУБИНОВ А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Изд. ЛГУ, 1968, 180 с.

37. ЗВЯГИНА Р.А. Программа реализации на М-20 модифицированного симплексного метода для решения общей задачи линейного программирования. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1964, № 1, с. 5-51.

38. ЗВЯГИНА Р.А. Задачи линейного программирования с блочно-диагональными матрицами. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1964, № 2, с. 50-61.

39. ЗВЯГИНА Р.А. Метод последовательного улучшения для решения задачи линейного программирования с дополнительными ограничениями. - В кн.: Труды Ленингр. инж.-экон. ин.-та, 1966, вып. 58, с. 199-203.

40. ЗВЯГИНА Р.А. Программа реализации на М-20 модифицированного симплекс-метода с узкоблочной матрицей. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1966, № 4, с.63-124.

41. ЗВЯГИНА Р.А. Программа решения на М-20 задач линейного программирования с блочно-диагональной матрицей. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1969, № 13,с.62-194.

42. ЗВЯГИНА Р.А. Задачи линейного программирования с матрицами узкоблочной структуры. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1970, № 15, с. 33-47.

43. ЗВЯГИНА Р.А. Об общем методе решения задач линейного программирования блочной структуры. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1971, № 1(18), с. 22-40.

44. ЗВЯГИНА Р.А. О построении иерархических порядков при заданных условиях на сравнимость. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1971, № 1(18), с. 41-54.

45. ЗВЯГИНА Р.А. Задачи линейного программирования с матрицами произвольной блочной структуры. - "Докл. АН СССР", 1971, т. 196, № 4, с. 755-758.

46. ЗВЯГИНА Р.А. О разложении матрицы с блочной структурой в произведение матриц треугольного типа. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, № 5(22), с. 73-86.

47. ЗВЯГИНА Р.А. Принцип многоступенчатой декомпозиции в линейном программировании. In.:"Math.Operationsforshung und Statistik",1973,Band 4, Heft 6, S. 427-443.

48. КАНТОРОВИЧ Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Изд. ЛГУ, 1939, с. 309.

49. КАНТОРОВИЧ Л.В. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем. - "Докл. АН СССР", 1940, т. 28, № 3, с. 212-215.

50. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд. АН СССР, 1959, 347 с.

51. КАНТОРОВИЧ Л.В., ГАВУРИН М.К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. - В кн.: Проблемы повышения эффективности работы транспорта. Изд. АН СССР, 1949, с. 110-138.

52. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЗАЛГАЛЛЕР В.А. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. Новосибирск, "Наука", 1971, 299 с.

53. КАПЛАН А.А. О некоторых методах решения задач нелинейного программирования. - В кн.: Математические модели и методы оптимального планирования. Новосибирск, 1966,с.36-53.

54. КАПЛАН А.А. Некоторые свойства оператора покоординатного спуска. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1967, № 7, с. 25-32.

55. КАПЛАН А.А. Об отыскании экстремума линейной функции на выпуклом множестве. - "Докл. АН СССР", 1968, 178, № 6, с. 1245-1247.

56. КАПЛАН А.А. К вопросу о реализации метода отсечения для решения задач выпуклого программирования. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1969, № 14, с. 43-48.

57. КАПЛАН А.А. К вопросу о реализации метода возможных направлений. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, № 5(22), с. 99-105.

58. КАПЛАН А.А. К характеристике штрафных функций. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, № 8(25), с. 13-22.

59. КАПЛАН А.А. Характеристические свойства штрафных функций. - "Докл. АН СССР", 1973, т. 210, № 5, с. 1018-1021.

60. КАПЛАН А.А. Численные методы решения задач выпуклого программирования. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1970, № 17, с. 60-95.

61. КАПЛАН А.А. Об одном методе решения задач выпуклого программирования. - "Экономика и матем. методы", 1968, т.4, вып. 1, с. 111-114.

62. КОЛОКОЛОВ А.А., ХОХЛЮК В.И. О двух прямых алгоритмах линейного целочисленного программирования. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1970, № 16, с. 33-46.

63. ЛЕЙФМАН Л.Я., ПЕТРОВА Л.Т. Некоторые алгоритмы для анализа ориентированных графов. - В кн.: Вычислительные системы. Новосибирск, 1964, № 11, с. 98-110.

64. ЛОБЫРЕВ А.И. Метод последовательного проектирования вдоль вспомогательного многообразия. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, № 5(22), с. 121-127.

65. ЛОБЫРЕВ А.И. О минимизации строго выпуклой функции на пересечении выпуклых множеств. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, № 5(22), с. 128-132.

66. МАКАРОВ В.Л. О построении и расчете упрощенных народнохозяйственных динамических моделей, основанных на информации межотраслевого баланса. - В кн.: Математическое программирование. М., 1966, с. 3-8.

67. ПЕТРОВА Л.Т. Нахождение критического пути в сетевом графике. - В кн.: Математические модели и методы оптимального планирования. Новосибирск, 1966, с. 103-105.

68. ПЕТРОВА Л.Т., КАРНАУХОВА Н.Н. Об одном алгоритме нахождения критического пути сетевого графика (PERT). - В кн.: Вычислительные системы. Новосибирск, 1964, № 11, с.92-97.

69. РУБИНОВ А.М. О некоторых обобщениях метода наискорейшего спуска. - В кн.: Математическое программирование. М., 1966, с. 90-105.

70. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Обобщение задачи о крайней точке пересечения оси с выпуклым многогранником. - "Докл. АН СССР", 1957, т. 113, № 5, с. 987-990.

71. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Численные методы решения задач линейного программирования. - В кн.: Применение математики в экономических исследованиях. М., 1959, с. 437-460.

72. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Численные методы решения задач линейного программирования. - В кн.: Линейное программирование. (Труды научн. совещания о применении матем. методов в эконом. исслед. и планировании. 1960. т. 4), М., 1961, с. 7-19.

73. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О решении задач линейного программирования большого объема. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1964, № 2, с. 3-22.

74. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Несколько примеров двойственных экстремальных задач. - В кн.: Математическое программирование. М., 1966, с. 9-39.

75. РУБИНШТЕЙН Г.Ш., ШМЫРЁВ В.И. Методы минимизации квазивыпуклой функции на выпуклом многограннике. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1971, № 1(18), с. 82-117.

76. СЕНЮКОВА С.К. Реализация на ЭВМ М-20 алгоритма решения задачи рационального раскроя линейных материалов. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1966, № 6, с. 115-142.

77. СОЛДАТОВ В.Е. О задачах линейного программирования со случайными данными. - В кн.: Математические модели и методы оптимального планирования. Новосибирск, 1966, с.54-64.

78. СОЛДАТОВ В.Е. О некоторых задачах стохастического программирования. - В кн.: Математическое программирование. М., 1966, с. 78-89.

79. ТЕРЗИ Д.Г. Итерационный процесс приближенного решения задач с булевыми переменными. - В кн.: Оптимизация, Новосибирск, 1973, № 10(27), с. 159-170.

80. ФЕФЕЛОВ В.Ф. Некоторые программы для анализа сетевых графиков. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1966, № 6, с. 143-189.

81. ХОХЛЮК В.И. Несколько замечаний об алгоритмах отсечения (решение целочисленной задачи линейного программирования). In: An.stiint.Univ."Cuza" Iasi.Ser.math.,1972,v.18,p.201-208.

82. ШМЫРЕВ В.И. Контроль исходных данных для программы, реализующей модифицированный симплекс-метод с узкоблочной матрицей. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1966, № 4, с. 125-137.

83. ШМЫРЕВ В.И. Метод параметра для решения общей задачи линейного программирования. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1968, № 10, с. 47-59.

84. ШМЫРЁВ В.И. Алгоритм решения одного класса задач линейного программирования большого объема. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1969, № 11, с. 88-116.

85. ШМЫРЁВ В.И. Метод решения модели Неймана. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1969, № 11, с. 76-87.

86. ШМЫРЁВ В.И. Об эффективных алгоритмах для одного класса задач нелинейного программирования. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1971, № 1(18), с. 118-133.

87. ШМЫРЁВ В.И. Об алгоритмах метода последовательного улучшения для квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, № 5(22), с. 133-157.

88. ШМЫРЁВА Н.В. Программа для решения некоторых задач сепарабельного программирования. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1970, № 15, с. 79-126.

89. ЯКОВЛЕВА М.А. Учет специфики задач при составлении программ оптимизации. - В кн.: 1-й Всесоюзный симпозиум "Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования (г. Нарва - Йыэсуу, июнь 1970 г.)", М., 1970, с. 14-16.

90. ЯКОВЛЕВА М.А. Задача о минимуме транспортных затрат. - В кн.: Применение математики в экономических исследованиях. М., 1959, с. 390-399.

91. ЯКОВЛЕВА М.А. Программа реализации на М-20 алгорифма решения задачи об оптимальном использовании производственных средств при выполнении нескольких видов работ. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1964, № 1, с. 52-88.

92. ЯКОВЛЕВА М.А. Двухкомпонентная задача линейного программирования. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1964, № 2, с. 23-40.

93. ЯКОВЛЕВА М.А. Программа для решения транспортной задачи. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1966, № 6, с. 5-42.

94. ЯКОВЛЕВА М.А. Программа для решения двухкомпонентной задачи линейного программирования. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1968, № 10, с. 81-143.

95. ЯКОВЛЕВА М.А. О расширении области применения специальных алгоритмов линейного программирования. - "Докл. АН СССР", 1968, т. 179, № 5, с. 1067-1069.

96. ЯКОВЛЕВА М.А. Один общий приём учета дополнительных столбцов в специальных задачах линейного программирования. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1970, № 15, с. 58-75.

97. ЯКОВЛЕВА М.А. О маршрутизации системы потоков на графе. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1971, № 1(18), с.158-162.

Поступила в ред.-изд. отд.
5. III. 1974 г.