1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 14(31)
Модели динамики и равновесия

УДК 518.9

РАВНОВЕСИЕ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИГРАХ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТРАТЕГИЙ

В.Г.Рамм

Представим себе "конфликтную" ситуацию, число участников которой очень велико. Так велико, что фактически ни один из них не в силах заметно повлиять на ситуацию; это могут сделать лишь большие группы участников ситуации. С такими явлениями - с явлениями массового поведения - мы сталкиваемся, например, при исследовании пассажиропотока на городском транспорте - поведение одного пассажира, по-видимому, не влияет на условия проезда всего населения города. При условии интенсивного движения транспорта мы можем наблюдать аналогичную картину: выбирая тот или иной маршрут следования, водитель автомобиля не влияет на транспортную ситуацию, однако скопление многих автомобилей на одних и тех же улицах создает пробки, уменьшает осуществимую скорость движения и пр.

Примеры массового поведения очень разнообразны: это и конкурсы при поступлении в вузы, когда выбор вуза зависит не только от наклонностей, но и того, велик ли конкурс; это и проблема миграции - например, летней миграции населения, - выбирая место для летнего отдыха, мы думаем и о том, сколько людей, как и мы, выберет то же место.

С точки зрения массового поведения можно рассматривать "взаимоотношения" населения с системой обслуживания, т.е. с сетью мастерских, магазинов, кинотеатров, пунктов проката и т.п. С этой же точки зрения можно, по-видимому, изучать и некоторые явления, связанные с конъюнктурой спроса, с экологией и др.

Для того, чтобы управлять ситуациями, связанными с массовым поведением, вводить новые маршруты и перераспределять подвижной состав на старых, строить транспортные развязки, планировать развитие города, влиять на выбор профессии и пр., вообще говоря, необходимо научиться предсказывать равновесное состояние в таких ситуациях и знать его свойства. Двум важным свойствам такого равновесия и посвящена данная работа.

Конфликтные ситуации, с континуумом участников, Ω, в которых платежи (проигрыши) почти всех участников не зависят от действий каждого отдельного $\omega \in \Omega$, можно описать в терминах неатомических игр, т.е. игр, где на множестве игроков определена положительная неатомическая мера. Такие игры в нормальной форме определены Шмайдлером [1], который показал, что в них существует равновесие по Нэшу [2].

§ 1. Интегральные игры с конечным множеством стратегий

Игры, которые мы опишем далее, можно использовать как аппарат для изучения проблем массового поведения, связанных с точкой равновесия, т.е. с такой ситуацией, когда ни у одного из участников нет причин изменить избранное поведение.

Участников ситуации мы назовём игроками. Будем полагать в дальнейшем множество игроков Ω топологическим пространством, наделённым σ-алгеброй Σ. Пусть J - конечное множество стратегий ($|J| = n$) и каждый игрок $\omega \in \Omega$ может выбрать любую стратегию $j \in J$.

Пусть w - ситуация, ставящая в соответствие каждому игроку ω выбранную им стратегию $w(\omega) \in J$. Очевидно, что w задаёт отображение Ω в J. Обратное отображение w^{-1} ставит каждой стратегии $j \in J$ в соответствие множество игроков $w^{-1}(j)$, избравших эту стратегию. Пусть W - множество ситуаций. Мы будем предполагать, что W и Σ таковы, что если $w \in W$ и $j \in J$, то $w^{-1}(j) \in \Sigma$.

Предположим далее, что (Ω, Σ, μ) - вероятностное пространство с неатомической мерой (такая мера необходима для того, чтобы отдельно взятый игрок не мог влиять на ситуацию), т.е. $\mu(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$ и $\mu(\Omega) = 1$.

Обозначим через $y_j = y_j(w)$ меру множества игроков, избравших в ситуации w стратегию j :

$$y_j(w) = \mu(w^{-1}(j)).$$

Таким образом, мы задаём отображение $w \longrightarrow y(w)$ множества W на единичный n-мерный симплекс G . Вектор $y(w)$ назовём характеристикой ситуации w .

Обозначим через $f_\omega(w)$ платеж игрока ω в ситуации w. Мы будем далее рассматривать такие неатомические игры, где $f_\omega(w)$ зависит лишь от $w(\omega)$ и от $w(\omega)$-й компоненты вектора $y = y(w)$, т.е. от меры множества игроков, избравших одинаковую с ω стратегию. Введём на W отношение эквивалентности, относя к одному классу отображения, имеющие одну и ту же характеристику. Тогда множество G будет фактор-множеством множества W по этому отношению, и для задания платежных функций вместо отображений $\Omega \times W \longrightarrow R$ мы можем рассматривать отображения $\Omega \times G \longrightarrow R$, и даже просто n отображений $\Omega \times [0,1] \longrightarrow R$, т.е. функций $f_j(\omega, \xi)$, где $j \in \mathcal{J}$, $\omega \in \Omega$, а $\xi \in [0,1]$. Функции $f_\cdot(\cdot, \xi)$ будем предполагать непрерывными и строго возрастающими на [0,1]. Неатомические игры с функциями платежа, удовлетворяющие таким условиям, мы будем называть и н т е г р а л ь н ы м и и г р а м и .

Построим на $\Omega \times G$ функцию $\lambda(\omega, y)$:

$$\lambda(\omega, y) = \min_{j \in \mathcal{J}} f_j(\omega, y_j).$$

Пусть $w \in W$ и $y = y(w)$. Назовём w <u>равновесной</u> ситуацией, если почти для всех $\omega \in \Omega$ и любого $j \in \mathcal{J}$

$$w(\omega) = j \Rightarrow f_j(\omega, y_j) = \lambda(\omega, y),$$
$$w(\omega) \neq j \Rightarrow f_j(\omega, y_j) \geq \lambda(\omega, y).$$

Такое определение равновесия можно, по-видимому, считать распространением на интегральные игры определения равновесия, введённого Нэшем [2] для игр с конечным числом игроков. Шмайдлер [1] показал, что если f почти для всех ω при любом w зависит лишь от $w(\omega)$ и $y(w)$ и f непрерывна на G , то в игре (Ω, W, f) существует равновесие в чистых стратегиях. Множество равновесных ситуаций обозначим через W^*.

Характеристику равновесной ситуации мы тоже будем называть равновесной.

§ 2. Единственность равновесной характеристики

ТЕОРЕМА I. Пусть (Ω, W, f) - интегральная игра. Найдётся характеристика y^* такая, что если $w \in W^*$, то $y(w) = y^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть w, $\bar{w} \in W^*$. Положим $y^* = y(\bar{w})$ и $y = y(w)$. Докажем, что $y = y^*$. Введём обозначения:

$$J^1 = \{j \mid y_j^* > y_j\},$$
$$J^2 = \{j \mid y_j^* < y_j\},$$
$$J^3 = J \setminus J^1.$$

Пусть $\omega \in \Omega$ и $k = w(\omega)$, т.е. $\lambda(\omega, y) = f_k(\omega, y_k)$.

Если $k \in J^3$, то $y_k \geq y_k^*$, а так как $f_\cdot(\cdot, \xi)$ монотонна, то и $f_k(\omega, y_k) \geq f_k(\omega, y_k^*)$. Но $f_k(\omega, y_k^*) \geq \lambda(\omega, y^*)$, значит, $\lambda(\omega, y) \geq \lambda(\omega, y^*)$. С другой стороны, для любого $j \in J^1$

$$f_j(\omega, y_j^*) > f_j(\omega, y_j) \geq \lambda(\omega, y) \geq \lambda(\omega, y^*),$$

т.е.

$$f_j(\omega, y_j^*) > \lambda(\omega, y^*).$$

Откуда, по определению равновесия, следует, что $\bar{w}(\omega) \neq j$ или $\chi_{\bar{w}^{-1}(j)}(\omega) = 0$ при любом $j \in J^1$ (χ - характеристическая функция). Следовательно,

$$\sum_{j \in J^1} \chi_{\bar{w}^{-1}(j)}(\omega) = 0,$$

откуда

$$\sum_{j \in J^3} \chi_{\bar{w}^{-1}(j)}(\omega) \geq \sum_{j \in J^3} \chi_{w^{-1}(j)}(\omega).$$

Если же $k \notin J^3$, то это неравенство и подавно выполнено. Следовательно,

$$\sum_{j\in J^3} y_j^* = \int_{\Omega} \sum_{j\in J^3} \chi_{\overline{w}^{-1}(j)}(\omega)\, d\mu(\omega) \geq$$

$$\geq \int_{\Omega} \sum_{j\in J^3} \chi_{w^{-1}(j)}(\omega)\, d\mu(\omega) = \sum_{j\in J^3} y_j ,$$

откуда, по определению множества J^3, $y_j = y_j^*$, если $j \in J^3$, т.е. $J^2 = \phi$. Но $J^2 = \phi \Longleftrightarrow J^1 = \phi$, значит, $y_j = y_j^*$ при всех $j \in J$. Теорема доказана, и в игре (Ω, W, f), таким образом, имеется единственная равновесная характеристика.

Чтобы указать на зависимость равновесной характеристики от f, для её обозначения будем пользоваться символом y^f.

Таким образом, множество W^* полностью описывается вектором y^f : W^* - подмножество допустимых планов в задаче о перемещении масс из Ω в J, где распределение масс в Ω задано мерой μ, а распределение масс в J - вектором y^f, и $w(\omega) \neq j$, если $f_j(\omega, y_j^f) > \lambda(\omega, y^f)$.

§ 3. Непрерывность равновесной характеристики

Пусть $f = (f_j(\omega, \xi_j))_{j\in J}$ — вектор-функция, заданная на $\Omega \times G$ ($f.(\cdot, \xi)$ непрерывна, кусочно-дифференцируема и строго возрастает на $[0,1]$, и $f.(\omega, \cdot)$ измерима на Ω).

Обозначим через Ψ пространство таких вектор-функций. Очевидно, что равновесная характеристика y^f задаёт отображение $f \longrightarrow y^f$ пространства Ψ в G. Естественно предположить, что отображение непрерывно. Более того, оказывается, если мы зададим на G метрику ρ :

$$\rho(y, z) = \Big[\sum_{j\in J} (y_j - z_j)^2\Big]^{1/2}, \; y, z \in G,$$

а на Ψ метрику β :

$$\beta(f, g) = \int_{\Omega} \max_{j\in J} \max_{0\leq \xi \leq 1} |f_j(\omega, \xi) - g_j(\omega, \xi)|\, d\mu(\omega), \; f, g \in \Psi,$$

то на подпространстве Ψ_M пространства Ψ :

$$\Psi_M = \{ f \in \Psi \,|\, |\ln \frac{df.(\cdot,\xi)}{d\xi}| \le \ln M \}$$

выполнена.

ТЕОРЕМА 2. При любом $M \in [1,\infty]$ отображение $f \to y^f$ пространства Ψ_M в пространство G удовлетворяет условию Липшица - α ($\alpha = 0{,}5$), т. е.

$\rho(y^f, y^g) \le L[\beta(f,g)]^{1/2}$ для любых f, $g \in \Psi_M$,

где $L = \sqrt{2M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f, $g \in \Psi_M$, $y = y^f$, $z = y^g$ и $\gamma_j = y_j - z_j$, $j \in J$.

Обозначим через W_f^* множество равновесных ситуаций, порождённых платёжной функцией f, а через W_g^* - функцией g, и пусть $w_f \in W_f^*$, а $w_g \in W_g^*$. Пусть

$$\Omega_{jk} = w_f^{-1}(j) \cap w_g^{-1}(k), \; k, j \in J,$$

- множество игроков, сменивших при замене f на g стратегию j на стратегию k (j и k не обязательно различны).

Пусть $\omega \in \Omega_{jk}$, тогда $w_f(\omega) = j$ и $w_g(\omega) = k$, т.е.

$$f_j(\omega, y_j) \le f_k(\omega, y_k),$$

$$g_j(\omega, z_j) \ge g_k(\omega, z_k),$$

или

$$0 \le g_j(\omega, z_j) - g_k(\omega, z_k) + f_k(\omega, y_k) - f_j(\omega, y_j) =$$

$$= [g_j(\omega, z_j) - f_j(\omega, y_j)] + [f_k(\omega, y_k) - g_k(\omega, z_k)] =$$

$$= [g_j(\omega, y_j) - \gamma_j \left. \frac{dg_j(\omega,\xi)}{d\xi} \right|_{\xi = y_j - \theta\gamma_j} - f_j(\omega, y_j)] =$$

$$+ [f_k(\omega, y_k) - g_k(\omega, y_k) + \gamma_k \cdot \left. \frac{dg_k(\omega,\xi)}{d\xi} \right|_{\xi = y_k - \theta'\gamma_k}]$$

где $0 \le \theta, \theta' \le 1$.

Следовательно,

$$\max_j \max_\xi | f_j(\omega,\xi) - g_j(\omega,\xi)| \ge \frac{1}{2}[g_j(\omega, y_j) - f_j(\omega, y_j) +$$

$$+f_k(\omega,y_k)-g_k(\omega,y_k)] \geqslant \frac{\gamma_j}{2}\left.\frac{dg_j(\omega,\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=y_j-\theta\gamma_j}$$

$$-\frac{\gamma_k}{2}\cdot\left.\frac{dg_k(\omega,\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=y_k-\theta'\gamma_k} \geqslant \frac{1}{2M}(\gamma_j-M^2\gamma_k),$$

так как

$$\frac{1}{M} \leqslant \frac{dg.(\cdot,\xi)}{d\xi} \leqslant M$$

Введём обозначения:

$$A(M)=\sum_{k\in J}\sum_{j\in J}(\gamma_j-M^2\gamma_k)\mu(\Omega_{jk}),$$

$$B(M)=\sum_{k\in J}\sum_{j\in J}(M^2\gamma_j-\gamma_k)\mu(\Omega_{jk}).$$

Очевидно, что

$$\beta(f,g)=\int_\Omega \max_j \max_\xi |f_j(\omega,\xi)-g_j(\omega,\xi)|\,d\mu(\omega) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k,j}\int_{\Omega_{jk}}\frac{1}{2M}(\gamma_j-M^2\gamma_k)\,d\mu(\omega)=\frac{A(M)}{2M}.$$

Так как $\gamma_j=\sum_k \mu(\Omega_{jk})-\sum_k \mu(\Omega_{kj}),\ j\in J$, то

$$A(M)=\sum_j \gamma_j[\gamma_j+\sum_k \mu(\Omega_{kj})]-$$

$$-M^2\sum_k \gamma_k[\sum_j \mu(\Omega_{kj})-\gamma_k]=(1+M^2)\sum_k \gamma_k^2-B(M)$$

Значит,

$$A(M)+B(M)=(1+M^2)\sum_k \gamma_k^2,$$

в то же время

$$A(M)-B(M)=(1-M^2)A(1).$$

Но $A(1)=B(1)$, следовательно, $A(M)=\sum_k \gamma_k^2$ при любом M .

Значит,

$$\beta(f,g)\geqslant\frac{1}{2M}\sum_k \gamma_k^2=\frac{1}{2M}\rho^2(y,z)$$

или

$$\rho(y^f, y^g) \leq \sqrt{2M}\,\sqrt{\beta(f,g)}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. SCHMEIDLER D. Equlibrium points of non-atomic games, CORE discussion papers, June,1970.

2. НЭШ О. Бескоалиционные игры. - В кн.: Матричные игры. М., 1961.

Поступила в ред.-изд. отд.
24.IX.1973 г.