1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск I4(3I)
Модели динамики и равновесия

УДК 51.330 : II5

О ПОВЕДЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СОПРЯЖЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Ю.Н.Черемных

В качественных исследованиях оптимальных траекторий динамических народнохозяйственных моделей существенно используются уравнения в конечных разностях (см., например, [2]). Поэтому представляет интерес отыскание и изучение классов динамических моделей, допускающих выделение таких оптимальных траекторий, которые удовлетворяют ограничениям этих моделей как равенствам.

В настоящей работе рассматривается один такой класс динамических моделей, построенных на основе модели Дж. фон Неймана с матрицами A и B, которые могут зависеть от времени t. Условия, которым удовлетворяют матрицы $A(t)$ и $B(t)$, отличаются от аналогичных требований работы [4].

В работе используется следующая символика и терминология. Вектор $x=(x_1,\dots,x_n)$ называется положительным (обозначение: $x>0$), если $x_i>0$ $(i=1,\dots,n)$; вектор x называется полуположительным ($x\geqslant 0$), если $x_i\geqslant 0$ $(i=1,\dots,n)$ и если $x\neq 0$; вектор называется неотрицательным ($x\geqq 0$), если $x_i\geqslant 0 (i=1,\dots,n)$. Если x и y - n-мерные векторы, то,по определению, $x>y$ $(x\geqslant y, x\geqq y)$, если $x-y>0$ $(x-y\geqslant 0$, $x-y\geqq 0)$. Матрица $A=(a_{ij})$ называется положительной $(A>0)$, если все её элементы $a_{ij}>0$, матрица A называется полуположительной ($A\geqslant 0$), если все $a_{ij}\geqq 0$ и $A\neq 0$, матрица A называется неотрицательной $A\geqq 0$, если все $a_{ij}\geqslant 0$.

I°. Пусть матрицы $A(t)$ и $B(t)$ имеют размеры $n\times m$ и пусть $n\geqslant m$. Обозначим через $A_{(1)}(t)$ и $B_{(1)}(t)$ верхние квад-

ратные подматрицы порядка m матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно. Тогда

$$A(t)=\begin{pmatrix} A_{(1)}(t) \\ A_{(2)}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t)=\begin{pmatrix} B_{(1)}(t) \\ B_{(2)}(t) \end{pmatrix},$$

где $A_{(2)}(t)$ и $B_{(2)}(t)$ - подматрицы с размерами $((n-m)\times m)$ матриц $A(t)$ и $B(t)$.

Для n-мерных векторов $w(t)$ будем использовать аналогичное представление $w(t)=(w_{(1)}(t)$, $w_{(2)}(t)$, где $w_{(1)}(t)$ - m-й вектор, $w_{(2)}(t)$ - $(n-m)$-мерный вектор.

Рассмотрим пару сопряженных линейных задач:

ЗАДАЧА I : максимизировать функцию

$$u(z(T)) = u_{(1)}\, z_{(1)}(T) + u_{(2)}\, z_{(2)}(T)$$

при условиях :

$$z_{(1)}(1)A_{(1)}(1) + z_{(2)}(1)A_{(2)}(1) \leqq x^1,$$

$$z_{(1)}(t+1)A_{(1)}(t+1)+z_{(2)}(t+1)A_{(2)}(t+1)-z_{(1)}(t)B_{(1)}(t)-$$
$$-z_{(2)}(t)B_{(2)}(t)\leqq 0 \quad (t=1,2,\dots,T-1),$$

$$z(t)=(z_{(1)}(t), z_{(2)}(t)) \geqq 0 \qquad (t=1,\dots,T).$$

ЗАДАЧА 2 : минимизировать функцию $x^1 p(1)$ при условиях :

$$A_{(1)}(t)p(t)-B_{(1)}(t)p(t+1) \geqq 0 \quad (t=1,2,\dots,T-1),$$

$$A_{(2)}(t)p(t)-B_{(2)}(t)p(t+1) \geqq 0 \quad (t=1,\dots,T-1),$$

$$A_{(1)}(T)p(T)-u_{(1)} \geqq 0,$$

$$A_{(2)}(T)p(T)-u_{(2)} \geqq 0,$$

$$p(t) \geqq 0 \quad (t=1,\dots,T).$$

Через $(z'(1),\dots,z'(T)$) (а также через $(v'(1),\dots,v'(T)$) обозначим максимальное решение задачи I, через $(p'(1),\dots,p'(T))$ (а также через $(q'(1),\dots,q'(T))$ - минимальное решение задачи 2.

Предполагается, что векторы

$$u=(u_{(1)},u_{(2)})=(u_1,\dots,u_m,u_{m+1},\dots,u_n)\geq 0,$$
$$x_1=(x_1^1,\dots,x_m^1)\geq 0.$$

Будут использованы следующие условия

(a.I) $A(t+1)=\mathcal{D}(t+1)B_{(1)}(t),\ \mathcal{D}(t+1)\geq 0\quad (t=1,2,\dots).$

(a.2) $A_{(1)}(t)=B_1G(t),\ G(t)\geq 0\quad (t=1,2,\dots).$

(a.3) $\det B_{(1)}(t)\neq 0\quad (t=1,2,\dots).$

(a.4) $A_{(2)}(t)\geqq B_{(2)}(t)G(t)\quad (t=1,2,\dots).$

(a.4') $a_i(t)\geq b_i(t)G(t)\quad (i=m+1,\dots,n;\ t=1,2,\dots).$

(a.5) $\check{G}\leqq G(t)\leqq\hat{G}\quad (t=1,2,\dots).$

(a.6) Существует натуральное число k_1 такое, что $\check{G}^{k_1}>0$.

(a.7) $\check{\mathcal{D}}_{(1)}\leqq\mathcal{D}_{(1)}(t)\leqq\hat{\mathcal{D}}_{(1)}\quad (t=1,2,\dots).$

(a.8) Существует натуральное число k_2 такое, что $\check{\mathcal{D}}_{(1)}^{k_2}>0$.

Для формулировки и доказательства теорем нам понадобится квазиметрика Д.Гильберта [I, § I8], которая была определена Дж. Биркгоффом [3] для множества m-мерных векторов, образующих в m-мерном пространстве E_m выпуклый конус K с вершиной в начале координат (см. также [5], [4]).

Пусть $x\in K$ и $y\in K$ и пусть прямая, проходящая через точки x и y, "протыкает" границу конуса $\bar{x}$ в точках и $\bar{y}$. Квазиметрика $h(x,y)=h(x,y;K)$ определяется по формуле

$$h(x,y)=\ln R(x,y),$$

где $R(x,y)=R(x,y,\bar{x},\bar{y})$ - двойное отношение четырех точек x, y, $\bar{y}$, $\bar{x}$, расположенных на одной прямой [I, § I8].

Пусть множество $M\subseteq K$, тогда диаметр Гильберта множества M определяется так:

$$\delta_K(M)=\sup_{x,y\in M}h(x,y).$$

Если K - неотрицательный ортант пространства E_m, а C - матрица, все элементы которой положительны, то множество CK (образ неотрицательного ортанта) имеет диаметр Гильберта, равный

$$\delta(C)=\delta_K(CK)=\ln \max_{\mu,\nu,z,l} \frac{c_{\mu z}\, c_{\nu l}}{c_{\nu z}\, c_{\mu l}},$$

где c_{ij} - элемент матрицы C $(i,j=1,\dots,m)$ [5].

Положительная матрица C сжимает квазиметрику h на величину

$$\alpha(C)=\frac{1-e^{-\delta(C)/2}}{1+e^{-\delta(C)/2}}<1, \qquad [3]$$

т.е. если векторы x и y положительны, то $h(Cx,Cy)\le \le\alpha(C)\,h(x,y)$.

Пусть H_1 и H_2 -лучи, выходящие из начала координат и принадлежащие неотрицательному ортанту пространства E_m, тогда для любых векторов x и y таких, что $x\in H_1$ и $y\in H_2$, $h(x,y)$ (если она определена) есть величина постоянная. Поэтому для любых векторов x' и y' $(x'\in H_1, y'\in H_2)$ принимаем, по определению, $h(x',y')=h(x,y)$, где $|x|=|y|=1$ и $x\in H_1$, $y\in H_2$. Таким образом, квазиметрика h представляет собой расстояние между лучами, выходящими из начала координат. Следовательно, квазиметрику h' можно называть "угловым расстоянием".

2°. ЛЕММА I. Пусть выполнены условия (a.I) и (a.3). Пусть m-мерный вектор $p'(t+1)$ удовлетворяет неравенствам $B(t)p'(t+1)\le\hat{f}(t)$, $A(t+1)p'(t+1)\ge\check{f}(t)$. Пусть $B_{(2)}(t)B^{-1}_{(1)}(t)\hat{f}_{(1)}(t)\le\hat{f}_{(2)}(t)$ и пусть вектор $p''(t+1)$ таков, что $B_{(1)}(t)\,p''(t+1)= =\hat{f}_{(1)}(t)$.

Тогда

$$B_{(2)}(t)p''(t+1)\le\hat{f}_{(2)}(t),\ \check{f}(t+1)\le A(t+1)p''(t+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы I. Поскольку $p''(t+1)=B^{-1}_{(1)}(t)\hat{f}_{(1)}(t)$, из неравенства $B_{(2)}(t)B_{(1)}(t)\hat{f}_{(1)}(t)\leqslant\hat{f}_{(2)}(t)$ сразу получаем первое требуемое неравенство $B_{(2)}(t)p''(t+1)\leqslant\hat{f}_{(2)}(t)$.

Напишем условие (a.I) в развернутом виде

$$a_i(t+1)=d_{i1}(t+1)b_1(t)+\ldots+d_{im}(t+1)b_m(t)(i=1,\ldots,n), \tag{I}$$

где $d_{ij}(t+1), a_i(t+1)$, $b_j(t)$ $(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m)$ - соответственно, элемент матрицы $\mathcal{D}(t+1)$, i - я строка матрицы $A(t+1)$, j - я строка матрицы $B_{(1)}(t)$

Поскольку $b_j(t)p'(t+1)\leqslant\hat{f}_j(t)$, $\hat{f}_j(t)=b_j(t)p''(t+1)$ $(j=1,\ldots,m)$, справедливо неравенство

$$b_j(t)p''(t+1)\geqslant b_j(t)p'(t+1)\quad (j=1,\ldots,m). \tag{2}$$

Пусть существует номер i_0 $(i\in\{1,\ldots,n\})$ такой, что $a_{i_0}(t+1)p''(t+1)<\check{f}_{i_0}(t+1)$. Тогда, принимая во внимание равенство (I) и неравенства $\mathcal{D}(t+1)\geqslant 0$ и (2), можем написать следующую цепочку неравенств и равенств

$$\check{f}_{i_0}(t+1)>a_{i_0}(t+1)p''(t+1)\overset{(1)}{=}d_{i_01}(t+1)b_1(t)p''(t)+\ldots+d_{i_0m}(t+1)b_m(t)p''(t+1)\geqslant$$
$$\overset{(2)}{\geqslant}d_{i_01}(t+1)b_1(t)p'(t+1)+\ldots+d_{i_0m}(t+1)b_m(t)p'(t+1)\overset{(1)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=}a_{i_0}(t+1)p'(t+1)\geqslant\check{f}_{i_0}(t+1),$$

т.е. $\check{f}_{i_0}(t+1)>\check{f}_{i_0}(t+1)$. Пришли к противоречию, следовательно, для каждого номера i $(i=1,\ldots,n)$ имеем неравенство $\check{f}_i(t \leqslant$ $\leqslant a_i(t+1)p''(t+1)$.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (a.I) - (a.4). Пусть задача 2 имеет минимальное решение $p'(1),\ldots,p'(T)$; $p'(1)\geqslant 0$.

Тогда задача 2 имеет минимальное решение $p''(1)=p'(1), p''(2),\ldots,p''(T)$ такое, что

$$A_{(1)}(t)p''(t)-B_{(1)}(t)p''(t+1)=0\ (t=1,\ldots,T-1),$$

или

$$p''(t+1)=G(t)p''(t)\quad (t=1,\ldots,T-1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2. Принимаем $p''(2)=G(1)p'(1)$. Поскольку $p'(1)\geqslant 0$ и $G(1)\geqslant 0$, то $p''(2)\geqslant 0$.

Умножив обе части неравенства $B_{(2)}(1)G(1)\leqslant A_{(2)}(1)$ на вектор $p'(1)\geqslant 0$, будем иметь

$$B_{(2)}(1)B^{-1}_{(1)}(1)A_{(1)}(1)p'(1)\le A_{(2)}(1)p'(1).$$

Положим $\hat{f}(1)=A(1)p'(1)$, $\check{f}(2)=B(2)p'(3)$ и, применив лемму I к неравенствам

$$A(1)p'(1)-B(1)p'(2)\geqslant 0,\ A(2)p'(2)-B(2)p'(3)\geqslant 0,$$

получим, что

$$A(1)p'(1)-B(1)p''(2)\geqslant 0, A(2)p''(2)-B(2)p'(3)\geqslant 0,\quad \text{и т.д.}$$

Принимаем $p''(T)=G(T-1)p''(T-1)$. Поскольку $p''(T-1)\geqslant 0$, то $p''(T)\geqslant 0$.

Умножив обе части неравенства $B_{(2)}(T-1)G(T-1)\leqq A_{(2)}(T-1)$ на вектор $p''(T-1)\geqslant 0$, будем иметь

$$B_{(2)}(T-1)B^{-1}_{(1)}(T-1)A_{(1)}(T-1)p''(T-1)\leqq A_{(2)}(T-1)p''(T-1).$$

Положим $\hat{f}(T-1)=A(T-1)p'(T-1)$, $\check{f}(T)=u$ и, применив лемму I к неравенствам

$$A(T-1)p''(T-1)-B(T-1)p'(T)\geqslant 0,\ A(T)p'(T)-u\geqslant 0,$$

получим

$$A(T-1)p''(T-1)-B(T-1)p''(T)\geqslant 0,\ A(T)p''(T)-u\geqslant 0.$$

Таким образом, $p''(1)=p'(1),\dots,p''(T)$ – минимальное решение задачи 2.

Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия (а.5), (а.6). Пусть $p''(1)=p'(1),\dots,p''(T)$; $q''(1)=q'(1),\dots,q''(T)$ $(p'(1)\geqslant 0, q'(1)\geqslant 0, p'(1)=q'(1))$ – минимальные решения задачи 2, для которых справедливо заключение леммы 2.

Тогда существуют такие положительные числа $\alpha_1 (\alpha_1<1)$ и Δ_1, что при $t=s_1k_1+1,\dots,(s_1+1)k_1$, $s_1=1,2,\dots$ справедливо неравенство

$$h(p''(t),q''(t))\leqslant \alpha_1^{s_1-1}\Delta_1. \qquad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Числа α_1 и Δ_1 не зависят от T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Положим

$$\mathcal{L}(t)=G(t+k-1)\cdot\ldots\cdot G(t) \quad (t=1,2,\ldots,T-k_1).$$

Из условий (а.5) и (а.6) вытекает, что матрица $\mathcal{L}(t)\geqslant \check{G}^{k_1}\geqslant 0$ $(t=1,\ldots,T-k_1)$. На основании [3], [5] имеем неравенства:

$$h(p''(t+k_1); q''(t+k_1))\leq \delta(\mathcal{L}(t)) \quad (t=1,\ldots,k_1),$$

$$h(p''(t+k_1),q''(t+k_1))\leq\alpha(\mathcal{L}(t))h(p''(t),q''(t)) \qquad (4)$$

$$(t=k_1+1,\ldots,T-k_1),$$

где

$$\delta(\mathcal{L}(t))=\ln\max_{\mu,\nu,\varkappa,\lambda}\frac{l_{\mu\varkappa}(t)\,l_{\nu\lambda}(t)}{l_{\nu\varkappa}(t)\,l_{\mu\lambda}(t)},$$

$$\alpha(\mathcal{L}(t))=\frac{1-e^{-\delta(\mathcal{L}(t))/2}}{1+e^{-\delta(\mathcal{L}(t))/2}}$$

($l_{ij}(t)$ - элемент матрицы $\mathcal{L}(t)$, $i,j=1,\ldots,m$).

Рассмотрим на m^2-мерном параллелепипиде

$$Q=\{x/x=(x_{ij}),\ 0<\check{g}_{ij}^{(k_1)}\leq x_{ij}\leq\hat{g}_{ij}^{(k_1)},\ i,j=1,\ldots,m\}$$

($\check{g}_{ij}^{(k_1)}, \hat{g}_{ij}^{(k_1)}$ - элементы положительных матриц $\check{G}^{k_1}$ и $\hat{G}^{k_1}$ соответственно) функцию

$$\delta(\mathcal{L})=\ln\max_{\mu,\nu,\varkappa,\lambda}\frac{l_{\mu\varkappa}\,l_{\nu\lambda}}{l_{\nu\varkappa}\,l_{\mu\lambda}}$$

m^2 переменных l_{ij} $(i,j=1,\ldots,m)$. Очевидно, на множестве Q функция $\delta(\mathcal{L})$ ограничена сверху положительной постоянной Δ_1 $(\Delta_1<+\infty)$. Отсюда следует, что при $t=1,2,\ldots,T-k_1$ $\delta(\mathcal{L}(t))\leq\Delta_1$, и поэтому

$$\alpha(\mathcal{L}(t))\leq 1-e^{-\delta(\mathcal{L}(t))/2}\leq 1-e^{\Delta_1/2}<1.$$

Положив $\alpha_1=1-e^{-\Delta_1/2}$, из (4) получим требуемое неравенство (3).

Теорема I доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (а.1) - (а.3), (а.4'), (а.5) - (а.8).

Тогда существуют такие положительные числа α_ℓ ($\alpha_\ell < 1$) и Δ_ℓ, что для любых двух максимальных решений $(z'(1),\ldots,z'(T))$ $(z'_{(1)}(T) \geq 0)$ и $(v'(1),\ldots,v'(T))$ $(v'_{(1)}(T) \geq 0)$ задачи I при $t = T-(s_\ell+1)k_\ell,\ldots, T-s_\ell k_\ell - 1, s_\ell = 1,2,\ldots (t \geq k_1)$ справедливо неравенство

$$h(z'_{(1)}(t), v'_{(1)}(t)) \leq \alpha_\ell^{s_\ell - 1} \Delta_\ell. \qquad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Числа α_ℓ и Δ_ℓ от номера T не зависят.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку число $\alpha_\ell < 1$, для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер s_ℓ^0 такой, что при $s_\ell > s_\ell^0$ будет выполняться неравенство $\alpha_\ell^{s_\ell - 1}\Delta_\ell < \varepsilon$, т.е. при всех номерах t, удовлетворяющих неравенствам $k_1 \leq t \leq T-(s_\ell^0+1)k_\ell - 1$, "угловое расстояние" h между соответствующими элементами $z'_{(1)}(t)$ и $v'_{(1)}(t)$ любых двух максимальных решений длины T будет меньше ε. Иными словами, если номер T достаточно большой, все максимальные решения длины T при всех номерах t из множества $\{1,\ldots,T\}$ (за исключением ряда номеров в начале и в конце этого множества $\{1,\ldots,T\}$) устроены почти одинаково.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. При $k_1+1 \leq t \leq T$ вектор $p''(t) > 0$, поэтому при $k_1+1 \leq t \leq T-1$ из условия (а.4') вытекает неравенство

$$A_{(2)}(t)p''(t) - B_{(2)}(t)p''(t+1) > 0,$$

откуда следует, что при $k_1+1 \leq t \leq T-1$ $z'_{(2)}(t)=0, v'_{(2)}(t)=0.$

Таким образом, при $k_1+1 \leq t \leq T-1$ имеем равенства:

$$z'_{(1)}(t)A_{(1)}(t) - z'_{(1)}(t-1)B_{(1)}(t-1) = 0, \quad v'_{(1)}(t) - v'_{(1)}(t-1)B_{(1)}(t-1) = 0,$$

или

$$z'_{(1)}(t-1) = z'_{(1)}(t)\mathcal{D}_{(1)}(t) \qquad (t = k_1+1,\ldots,T-1),$$

$$v'_{(1)}(t-1) = v'_{(1)}(t)\mathcal{D}_{(1)}(t) \qquad (t = k_1+1,\ldots,T-1).$$

Положим
$$R(T-\tau)=\mathcal{D}_{(1)}(T-\tau)\cdot\ldots\cdot\mathcal{D}_{(1)}(T-\tau-k_2+1)\ (\tau=1,\ldots,T-k_2-k_1).$$

Из условий (а.7), (а.8) вытекает, что матрица $R(T-\tau)\geqq \check{\mathcal{D}}_{(1)}^{k_2}>0\ (\tau=1,\ldots,T-k_2-k_1)$. Как в случае доказательства теоремы I, на основании [3], [5] имеем неравенства
$$h(z'_{(1)}(T-\tau-k_2),v'_{(1)}(T-\tau-k_2))\leqslant\delta(R(T-\tau))\ (\tau=1,\ldots,k_2),$$
$$h(z'_{(1)}(T-\tau-k_2),v'_{(1)}(T-\tau-k_2))\leqslant\alpha(R(T-\tau))\,h(z'_{(1)}(T-\tau),\tag{6}$$
$$v'_{(1)}(T-\tau))\quad(\tau=k_2+1,\ldots,T-k_2-k_1),$$
где
$$\delta(R(T-\tau))=\ln\max_{\mu,\nu,x,\lambda}\frac{r_{\mu x}(T-\tau)\,r_{\nu\lambda}(T-\tau)}{r_{\nu x}(T-\tau)\,r_{\mu\lambda}(T-\tau)},$$
$$\alpha(R(T-\tau))=\frac{1-e^{-\delta(R(T-\tau))/2}}{1+e^{-\delta(R(T-\tau))/2}}\quad(\tau=k_2+1,\ldots,T-k_2-k_1)$$

($r_{ij}(T-\tau)$ - элемент матрицы $R(T-\tau)$; $i,j=1,\ldots,m$).

Как и в доказательстве теоремы I, показывается, что существует постоянная Δ_2 ($\Delta_2<+\infty$) такая, что $\delta(R(T-\tau))\leqslant\Delta_2$ ($\tau=1,\ldots,T-k_2-k_1$). Отсюда сразу следует, что при $\tau=k_2+1,\ldots;T-k_2-k_1$ имеем
$$\alpha(R(T-\tau))\leqslant 1-e^{-\delta(R(T-\tau))/2}\leqslant 1-e^{-\Delta_2/2}<1.$$

Положив $\alpha_2=1-e^{-\Delta_2/2}$, из (6) получим требуемое неравенство (5).

Теорема 2 доказана.

Аналогичная теорема имеет место для произвольных минимальных решений задачи 2.

3°. Полученные утверждения переносятся на максимальные и минимальные решения следующих сопряженных задач:

ЗАДАЧА I : максимизировать γ при условиях:
$$z_{(1)}(1)A_{(1)}+z_{(2)}(1)A_{(2)}(1)\leqq x',$$

$$z_{(1)}(t+1)A_{(1)}(t+1)+z_{(2)}(t+1)A_{2}(t+1)-z_{(1)}(t)B_{(1)}(t)-z_{(2)}(t)B_{(2)}(t)\leq 0$$
$$(t=1,2,\ldots,T-1),$$
$$\gamma x^{T+1}-z_{(1)}(T)B_{(1)}(T)-z_{(2)}(T)B_{(2)}(T)\leq 0,$$
$$\gamma\geq 0,\ z(t)=(z_{(1)}(t),z_{(2)}(t))\geqslant 0\quad(t=1,2,\ldots,T).$$

ЗАДАЧА 2: минимизировать $x^{1}p(1)$ при условиях:

$$A_{(1)}(t)p(t)-B_{(1)}(t)p(t+1)\geqq 0\ (t=1,2,\ldots,T),$$
$$A_{(2)}(t)p(t)-B_{(2)}(t)p(t+1)\geqq 0\ (t=1,2,\ldots,T),$$
$$x^{T+1}p(T+1)\geqslant 0,$$
$$p(t)\geqslant 0\quad(t=1,2,\ldots,T+1).$$

4^{0}. Случай, когда $m\geqslant n$, исследуется аналогично.

Литература

I. БУЗЕМАН Г. Геометрия геодезических. М., Физматгиз, 1962.

2. МОРИШИМА М. Равновесие, устойчивость, рост. М., "Наука", 1972.

3. BIRKHOFF G. Extensions of Jentzsch's Theorem, Transactions of the American Mathematical Society, 1957, v.85, №I, p.2I9--227.

4. KEELER E.B. A Twisted Turnpike Theorem, Contributions to the Von Neumann Growth Model, Wien New York, 197I, p.9I-98.

5. OSTROWSKI A.M. Positive Matrices and Functional Analysis, Recent Advances in Matrix Theory, 1964, p.8I-I0I.

Поступила в ред.-изд. отд.
19.IX.1974 г.