УДК 512.25/26

ПРИМЕР "ЗАЕДАНИЯ" В МЕТОДЕ ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

А.А.Каплан

Сходимость приближений, определяемых по методу возможных направлений [1,2], к решению задачи выпуклого программирования устанавливается в предположении, что используются специальные приёмы, предупреждающие "заедание" процесса. Под "заеданием" понимается сходимость последовательности приближенных решений (или её подпоследовательности) к точке, не являющейся решением исходной задачи.

Так как указанные приемы существенно увеличивают трудоёмкость процесса, представляет интерес исследование характера задач, в которых может иметь место "заедание".

Насколько известно автору, имеющиеся в литературе примеры на "заедание" не вполне соответствуют условиям задачи и метода[ж)], так как в них имеет место нарушение выпуклости или дифференцируемости некоторых функций. Тем не менее, помимо приводимого ниже, по всей вероятности, построены и другие примеры, свободные от указанного недостатка. Данный пример, в котором весь процесс решения легко анализируется, показывает, что "заедание" может проявляться в весьма естественных ситуациях.

ж) Исключением, возможно, является пример из научного отчета Вулфа [3], упоминаемый в ряде зарубежных изданий. Отметим, что пример Зангвилла [4], на который имеются ссылки в указанном плане, на самом деле описывает явление "заедания" в декомпозиционных алгоритмах при недостаточно осторожном осуществлении декомпозиции и для рассматриваемого случая непригоден.

Напомним схему метода возможных направлений (без использования приемов против "заедания"), упрощая её для случая, когда целевая функция $f: R^n \to R$ - линейная, а допустимое множество $\Omega \subset R^n$ - выпуклый компакт, что соответствует условию примера.

Итак, рассматривается задача максимизации функции $f(x) = (c, x)$ на множестве

$$\Omega = \{x : g^j(x) \geq 0, \; j \in J_1 \cup J_2\},$$

где $g^j : R^n \to R$ - аффинные функции при $j \in J_1$ и вогнутые дифференцируемые функции при $j \in J_2$.

Пусть, начиная из произвольной точки $x^0 \in \Omega$, к k-ому шагу мы имеем точку $x^{k-1} \in \Omega$. Обозначим

$$J_1(x^{k-1}) = \{j \in J_1 : g^j(x^{k-1}) = 0\},$$

$$J_2(x^{k-1}) = \{j \in J_2 : g^j(x^{k-1}) = 0\}.$$

Для отыскания направления сдвига на k-ом шаге решается следующая экстремальная задача:

$$(c, s) \geq \sigma;$$

$$(\nabla g^j(x^{k-1}), s) \geq d_j \sigma \quad \text{при } j \in J_2(x^{k-1});$$

$$(\nabla g^j(x^{k-1}), s) \geq 0 \quad \text{при } j \in J_1(x^{k-1});$$

$$(s, s) \leq 1$$

$$\sigma - max.$$

Здесь $(s, \sigma) \in R^{n+1}$ - переменный вектор, d_j - фиксированные положительные числа, условие $(s, s) \leq 1$ является одним из возможных способов нормализации векторов (s, σ).

Если (s^k, σ^k) - решение указанной задачи, то s^k определяет направление сдвига из точки x^{k-1} и точка x^k определяется по формуле $x^k = x^{k-1} + \lambda_k s^k$, где $\lambda_k = \max_{\lambda}\{\lambda : x^{k-1} + \lambda s^k \in \Omega\}$.

ПРИМЕР. Найти максимум функции

$$f(x) = -\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{a^2+1}} x_3$$

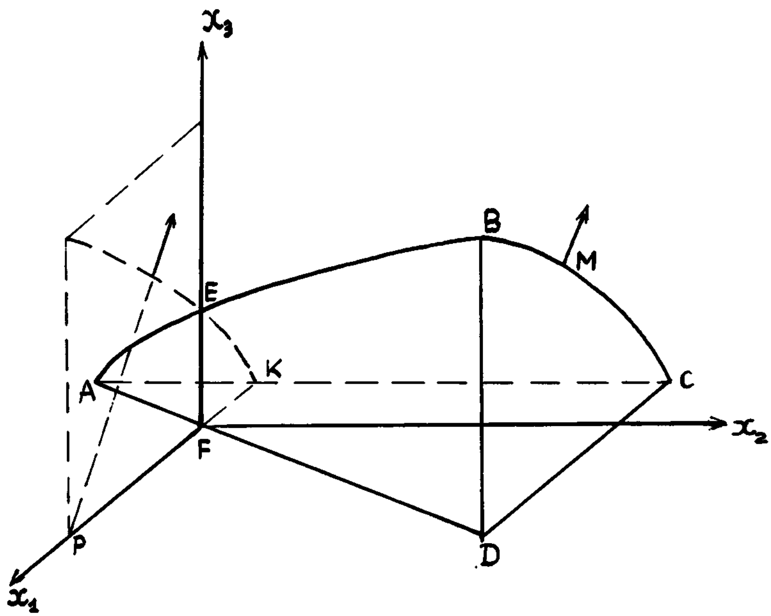

Рис. I.

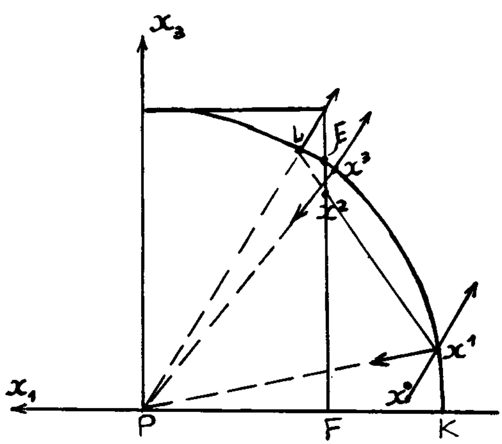

Рис. 2.

при ограничениях:

$$g^1(x) = -(a - x_1)^2 - x_3^2 + 1 \geq 0,$$
$$g^2(x) = -x_2 + 1 \geq 0,$$
$$g^3(x) = -x_1 + ax_2 \geq 0,$$
$$g^4(x) = x_3 \geq 0,$$

где a - фиксированное число, $0 < a < 1$. В принятых выше обозначениях здесь $J_2 = \{1\}$, d_1 полагаем равным I.

На рис. I - ABCD - допустимое множество, стрелками обозначены векторы, параллельные $q = \left(-\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}, 0, \frac{2}{\sqrt{a^2+1}}\right)$. Очевидно, что максимум f на Ω достигается в точке M.

Начиная процесс из произвольной допустимой точки x^0, лежащей в плоскости $x_2 = 0$ и отличной от E, мы, как нетрудно видеть, не выйдем из плоскости $x_2 = 0$, по крайней мере, до тех пор, пока не попадем в точку E. Действительно, из любой такой точки, не лежащей на дуге EK, делается сдвиг в направлении q, и мы попадаем во внутреннюю точку дуги EK, а если x^0 лежит на дуге EK, сдвиг осуществляется в направлении, определяемом векторами q и $\nabla g^1(x^0)$, лежащими в плоскости $x_2 = 0$.

С другой стороны, при $x^0 \neq E$, точка E не может быть достигнута, так как (рис. 2) из любой точки $x \neq E$ дуги EK мы движемся в направлении вектора $q + \nabla g^1(x)$, $\|q\| = \|\nabla g^1(x)\| = 2$ и получаем следующую точку на пересечении отрезков xL и EF, т.е. внутри EF.

Приведенные рассуждения показывают, что точка E является пределом последовательности приближений с началом в x^0 и в то же время значение функции f в точке E меньше, чем в точке M, т.е. налицо "заедание" процесса.

Подходящим выбором параметра a нетрудно добиться, чтобы в приведенном примере "заедание" имело место и при других употребляемых на практике способах нормализации.

Л и т е р а т у р а

I. ЗОЙТЕНДЕЙК Г. Методы возможных направлений (перев. с английского). М., ИЛ, 1963.

2. ЗУХОВИЦКИЙ С.И., ПОЛЯК Р.А., ПРИМАК М.Е. Алгоритм для решения задачи выпуклого чебышевского приближения. - "Докл. АН СССР", 1963, т. 151, № 1, с. 27-30.

3. WOLFE P. On the convergence of gradient method under constraints, JBM Research Rept. RC 204, JBM Zurich Research Laboratories, Ruschliket, Zurich, Switzerland, 1966.

4. ZANGWILL W.J. A decomposable nonlinear programming approach, Oper. Res., 1967, v.XV, No.6.

Поступила в ред.-изд. отд.
4.III.1974 г.