1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск I4(3I)
Численные методы

УДК 512.25/26

ОБ АЛГОРИТМАХ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ СХЕМЫ СОПРЯЖЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

В.И.Шмырёв

В работе [I] была изложена общая схема метода последовательного улучшения для задачи минимизации квазивыпуклой функции при линейных ограничениях.*) На каждом шаге этого метода необходимо решать вспомогательную задачу минимизации рассматриваемой функции на некотором аффинном многообразии (которое меняется от шага к шагу). Для случая, когда минимизируемая функция квадратичная, решение этой вспомогательной задачи сводится к рассмотрению некоторой системы линейных алгебраических уравнений. Получающаяся на этом пути конкретизация общей схемы метода рассматривалась в работе [2]. В предложенном алгоритме для решения упомянутой системы линейных уравнений хранится и подправляется от шага к шагу матрица, обратная к матрице коэффициентов системы (или ее подсистемы на единицу меньшей размерности). Этот алгоритм естественно также рассматривать как компактную реализацию метода Вулфа [4].

В настоящей работе рассматриваются вопросы построения алгоритмов метода последовательного улучшения, в которых для решения вспомогательной задачи минимизации на каждом шаге процесса используется схема сопряженных направлений. Принципиальная возможность такого подхода отмечалась в [2].

---

*) Для случая выпуклой функции эта схема независимо рассматривалась У.И.Зангвиллом [3].

Для частной постановки задачи квадратичного программирования вопрос о применении схемы сопряженных градиентов рассматривался в [6]. Следует отметить также, что на идеях сопряженных направлений основан известный метод Била [5]. Предлагаемый в настоящей работе алгоритм, по-видимому, более экономен по объему вычислений и требуемой оперативной памяти ЭВМ.

I^0. Будем рассматривать задачу квадратичного программирования в следующей постановке:

Определить вектор $x=(x_1,\dots,x_n)$, минимизирующий функцию

$$f(x)=(p,x)+\frac{1}{2}(x,cx)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b, \tag{1}$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,\dots,n, \tag{2}$$

где b и A^j, $j=1,\dots,n$, - m-мерные векторы, p - n-мерный вектор, а C - симметричная неотрицательно определенная матрица порядка n.

Для такой постановки задачи аффинное многообразие, на котором необходимо минимизировать функцию f при выполнении k-го шага процесса последовательного улучшения, определяется некоторым подмножеством J_k множества $\{1,2,\dots,n\}$ и имеет вид:

$$L(J_k)=\{x\in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b,\ x_j=0,\ j\notin J_k\}.$$

Поиск минимума функции по схеме сопряженных градиентов требует многократного вычисления градиента функции [7, 8]. В данном случае для минимизации функции f на аффинном многообразии $L(J_k)$ необходимо вычислять градиент сужения функции f на аффинное многообразие, т.е. проекцию градиента функции f на подпространство $P(J_k)$, сдвигом которого является многообразие $L(J_k)$. Эта операция проектирования, являющаяся основной в известном методе Розена проекцией градиента, по трудоёмкости эквивалентна решению системы линейных уравнений порядка m.

Несложные выкладки, поясняющие это и приводимые здесь для полноты изложения, сводятся к следующему.

Задача проектирования состоит в определении вектора $u = (u_1,\dots,u_n)$, минимизирующего функцию $\rho(u)=\| grad\, f(x)-u \|$ при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} A^j u_j = 0,$$

$$u_j = 0, \quad j \notin J_k.$$

(Здесь и в дальнейшем под $\|a\|$ понимается евклидова норма: $\|a\|=(a,a)^{1/2}$) Введением вектора множителей Лагранжа $y = (y_1,\dots,y_m)$ приходим к следующей системе линейных уравнений:

$$\sum_{j\in J_k} A^j u_j = 0,$$

$$(y, A^j) + u_j = \frac{\partial f}{\partial x}(x), \quad j \in J_k.$$

Будем предполагать множество J_k каким-либо образом упорядоченным и введем в рассмотрение матрицу $A(J)=\{A^j\}_{j\in J_k}$, а также векторы

$$\nabla(J_k)=\{\frac{\partial f}{\partial x}(x)\}_{j\in J_k},$$

$$u(J_k)=\{u_j\}_{j\in J_k}.$$

Тогда последняя система уравнений запишется так:

$$A(J_k)u(J_k)=0, \tag{3}$$

$$A^T(J_k)y + u(J_k)=\nabla(J_k). \tag{4}$$

Умножая уравнение (4) на $A(J_k)$ и после этого вычитая из него (3), получаем следующую систему для определения компонент вектора y :

$$A(J_k)A^T(J_k)y = A(J_k)\nabla(J_k). \tag{5}$$

После определения вектора y требуемый вектор u получается из (4).

Таким образом, независимо от размерности аффинного многообразия $L(J_k)$ для реализации схемы сопряженных градиентов необходимо решать системы линейных уравнений лишь порядка m, т.е. такого же порядка, как при реализации метода последовательного улучшения для задачи линейного программирования с системой ограничений (I) и (2).

Не вдаваясь в детали реализации такого подхода к построению алгоритма для задачи квадратичного программирования, отметим лишь, что для решения систем (5) удобно хранить и преобразовывать от шага к шагу процесса последовательного улучшения обратную матрицу к матрице коэффициентов этой системы. Так как на одном шаге в множество J_k добавляется или исключается из него лишь один элемент, то матрица $A(J_k)A^T(J_k)$ будет меняться на матрицу единичного ранга. Поэтому матрица, обратная к ней, легко подправляется по формулам метода пополнения (см.[9, с. 198-204]).

2^0. Получающийся по описанной схеме алгоритм для решения задач квадратичного программирования является, по-видимому, наиболее экономным в сравнении с другими алгоритмами по объему требуемой памяти ЭВМ. Однако один шаг последовательного улучшения при этом весьма трудоемок. Причина этого заключается в том, что при переходе от аффинного многообразия $L(J_k)$ к аффинному многообразию $L(J_{k+1})$ процесс минимизации функции f по методу сопряженных градиентов приходится начинать сначала. От этого недостатка можно избавиться, если применять общую схему сопряженных направлений. В этом случае система сопряженных направлений для аффинного многообразия $L(J_{k+1})$, как будет показано далее, легко получается из таковой для аффинного многообразия $L(J_k)$.

I. Рассмотрим сначала ситуацию, возникающую на одном шаге метода последовательного улучшения в случае расширения множества J_k. Согласно общей схеме метода [I], в этом случае имеющаяся точка x^k доставляет минимум функции f на $L(J_k)$. Требуется определить точку минимума $\bar{x}^{k+1}$ на $L(J_{k+1})$ или направление лежащего в $L(J_{k+1})$ луча, на котором функция f строго убывает.

Пусть размерность аффинного многообразия $L(J_k)$ равна s и известна полная система сопряженных направлений $q^1, \dots, q^s$, лежащих в $P(J_k)$. Для определения точки минимума функции f в $L(J_{k+1}) \supset L(J_k)$ достаточно дополнить имеющуюся систему сопряженных направлений вектором q^{s+1}, лежащим в $P(J_{k+1})$ и сопряженным к $q^1, \ldots, q^s$. Этот вектор можно получить с помощью обычной процедуры C -ортогонализации, т.е., взяв произвольный вектор g, лежащий в $P(J_{k+1})$, но не лежащий в $P(J_k)$, будем искать вектор q^{s+1} в виде

$$q^{s+1} = g - \sum_{i=1}^{s} \beta_i q^i, \tag{6}$$

определяя коэффициенты β_i из условий сопряженности вектора q^{s+1} к векторам $q^1, \ldots, q^s$.

$$(q^{s+1}, Cq^i) = 0, \; i = 1, \ldots, s. \tag{7}$$

Предполагая векторы $q^1, \ldots, q^s$ C-нормированными, т.е. $(q^i, Cq^i) = 1$, $i = 1, \ldots, s$, получаем $\beta_i = (g, Cq^i)$, $i = 1, \ldots, s$.

α) Если оказалось $(q^{s+1}, Cq^{s+1}) = 0$, то $Cq^{s+1} = 0$ и в этом случае по направлению q^{s+1} функция f либо убывает в любой точке пространства, либо возрастает в любой точке пространства, т.е. на $L(J_{k+1})$ функция f не достигает минимума, и вектор q^{s+1} с точностью до множителя определяет направление требуемого луча. Действительно, вектор $\operatorname{grad} f(x^k)$ ортогонален векторам $q^1, \ldots, q^s$, ибо x^k - точка минимума f на $L(J_k)$, и $(\operatorname{grad} f(x^k), g) \neq 0$, ибо тогда точка x^k была бы точкой минимума f и на $L(J_{k+1})$, что противоречит общей схеме метода последовательного улучшения (при расширении множества J_k выполняется условие $\inf\limits_{x \in L(J_{k+1})} f(x) < f(x^k)$). Для определенности будем считать $(\operatorname{grad} f(x^k), g) < 0$, что ввиду (6), дает

$$(\operatorname{grad} f(x^k), q^{s+1}) < 0,$$

т.е.

$$(P + Cx^k, q^{s+1}) = (p, q^{s+1}) + (x^k, Cq^{s+1}) < 0.$$

Учитывая, что $Cq^{s+1} = 0$, получаем

$$(p, q^{s+1}) < 0.$$

Но тогда при любом x

$$(\operatorname{grad} f(x), q^{s+1}) = (p + Cx, q^{s+1}) = (p, q^{s+1}) + (x, Cq^{s+1}) = \\ = (p, q^{s+1}) < 0,$$

что и утверждалось.

β) Предположим теперь, что для найденного вектора q^{s+1} оказалось $(q^{s+1}, Cq^{s+1}) > 0$. В этом случае для определения точки $\bar{x}^{k+1}$ достаточно смещаться из точки x^k в направлении вектора q^{s+1} до точки минимума функции f по этому направлению, т.е.

$$\bar{x}^{k+1} = x^k + tq^{s+1},$$

где t определяется из условия

$$(q^{s+1}, \operatorname{grad} f(x^k + tq^{s+1})) = 0,$$

и, значит,

$$t = -\frac{(Cx^k + p, q^{s+1})}{(Cq^{s+1}, q^{s+1})}. \tag{8}$$

П. Рассмотрим теперь ситуацию, возникающую на одном шаге последовательного улучшения в случае сужения имеющегося аффинного многообразия. Для простоты предположим, что сужение происходит непосредственно после очередного расширения множества J_k, т.е. в условиях предыдущего рассмотрения, когда при движении в направлении q^{s+1} пересекается (в случае β прежде, чем достигается точка $\bar{x}^{k+1}$) часть границы множества допустимых векторов, определяемая каким-либо из ограничений $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть, для определенности, речь идет об ограничении $x_{j'} \geq 0$. Таким образом, получаемая точка $x^{k+1} = x^k + \alpha q^{s+1}$ такова, что $x_{j'}^{k+1} = 0$, а $q_{j'}^{s+1} < 0$. Аффинное многообразие, рассматриваемое на этом шаге процесса, будет определяться множеством $J_{k+2} = J_{k+1} \setminus \{j'\}$. Для анализа вспомогательной задачи минимизации функции f на $L(J_{k+2})$ требуется построить новую систему сопряженных направлений, лежащих в $P(J_{k+2})$. Покажем, как это можно сделать, не проводя процесс C-ортогонализации заново, а воспользовавшись тем фактом, что нам известна система сопряженных направлений для $P(J_{k+1})$.

Прежде всего заметим, что если $q_j^i = 0$ для всех $i=1,\dots,s$, то направления $q^1,\dots,q^s$ лежат в $P(J_{k+e})$ и, следовательно, образуют требуемую систему сопряженных направлений. Точка x^{k+e} в этом случае является искомой точкой минимума функции f на $L(J_{k+e})$. Действительно, так как x^k - точка минимума в $L(J_k)$, то вектор $grad\, f(x^k)$ ортогонален к векторам $q^1,\dots,q^s$. Но, как легко видеть,

$$grad\, f(x^{k+1}) = grad\, f(x^k) + \alpha C q^{s+1}, \qquad (9)$$

и, ввиду (7), получаем, что вектор $grad\, f(x^{k+1})$ также ортогонален к векторам $q^1,\dots,q^s$, т.е. x^{k+1} является точкой минимума функции f по каждому из направлений, определяемых этими векторами, а значит, и точкой минимума на $L(J_{k+e})$.

Немногим более сложен случай, когда среди компонент q_j^i, $i=1,\dots,s$, лишь одна ненулевая. В этом случае лишь один из векторов $q^i (i=1,\dots,s)$ не лежит в $P(J_{k+e})$ и, значит, уже имеется $s-1$ из требуемых s сопряженных направлений в $P(J_{k+e})$. Вопрос о получении недостающего сопряженного направления будет рассмотрен далее. Предварительно покажем, что общий случай, когда ненулевых компонент среди q_j^i, $(i=1,\dots,s)$ больше одной, сводится к этому простому случаю при помощи некоторого ортогонального преобразования.

Обозначим через Q матрицу из векторов q^i, т.е. $Q = \{q^i\}_{i=1}^s$. Тогда условие сопряженности и C-нормированности векторов $q^1,\dots,q^s$ эквивалентно равенству

$$Q^T C Q = E,$$

где E - единичная матрица порядка s. Очевидно, что при любой ортогональной матрице R порядка s, т.е. такой, что $R^T R = E$, матрица $\bar{Q} = QR$ также будет удовлетворять условию $\bar{Q}^T C \bar{Q} = E$:

$$\bar{Q}^T C \bar{Q} = R^T Q^T C Q R = R^T E R = E$$

а, следовательно, столбцы $\bar{q}^1,\dots,\bar{q}^s$ матрицы $\bar{Q}$ также будут сопряженными и C - нормированными векторами. Обозначим через v строку j матрицы Q. Эта строка образована из элементов q_j^i $(i=1,\dots,s)$ и, по предположению, ненулевая. Для того чтобы все векторы $\bar{q}^i$ $(i=1,\dots,s)$, кроме одного, лежали в $P(J_{k+e})$, нужно выбрать матрицу R так, чтобы вектор $\bar{v} = vR$

был пропорционален какому-либо из координатных ортов e_i $(i=1,\dots,s)$. Этот вопрос решается с помощью матриц отражения (см. [10], стр. 58-59). Для полноты изложения приводим соответствующие формулы.

Пусть для определенности

$$vR=\|v\|e_s \tag{10}$$

(R является ортогональным преобразованием и, следовательно, сохраняет евклидову норму). Тогда матрица R имеет вид:

$$R=E-2h^Th, \tag{11}$$

где h - однострочная матрица, определяемая формулой

$$h=\frac{v-\|v\|e_s}{\|v-\|v\|e_s\|} \tag{12}$$

$(v-\|v\|e_s\neq 0$, ибо в противном случае в строке v был бы лишь один ненулевой элемент, что противоречит предположению).

Вернемся теперь к вопросу о построении недостающего s-го сопряженного направления, лежащего в $P(J_{k+2})$, предположив, что имеет место общий случай и векторы $\bar{q}^1,\dots,\bar{q}^s$ уже получены (в случае, когда среди компонент $\bar{q}^i_{j'}$ лишь одна ненулевая, можно считать $\bar{q}^i=q^i$, $i=1,\dots,s$). Вектор этого направления можно определить, образовав подходящую линейную комбинацию векторов $\bar{q}^s$ и q^{s+1}. Действительно, вектор q^{s+1} сопряжен к векторам $q^1,\dots,q^s$, а значит, и к любым их линейным комбинациям, в частности к векторам $\bar{q}^1,\dots,\bar{q}^s$. Таким образом, каждый из векторов $\bar{q}^s$ и q^{s+1} сопряжен к векторам $\bar{q}^1,\dots,\bar{q}^{s-1}$. Но тогда этим свойством будет обладать и вектор

$$q(\lambda)=\bar{q}^s+\lambda q^{s+1}$$

при любом значении λ. Выбирая λ равным $-\bar{q}^s_{j'}/q^{s+1}_{j'}$, будем иметь $q_{j'}(\lambda)=0$, т.е. при таком λ вектор $q(\lambda)$ лежит в $P(J_{k+2})$ и, следовательно, определяет требуемое сопряженное направление.

Заметим теперь, что вектор $\operatorname{grad} f(x^{k+1})$ ортогонален к векторам $\bar{q}^1,\dots,\bar{q}^s$, ибо, как отмечалось, он ортогонален к векторам $q^1,\dots,q^s$. Это означает, что точка x^{k+1} доставляет минимум функции f по каждому из $s-1$ сопряженных направлений $\bar{q}^1,\dots,\bar{q}^{s-1}$. Поэтому для нахождения точки минимума функции f на $L(J_{k+2})$ нужно, как и в случае расширения множества J_k, смещаться из точки x^{k+1} лишь по одному сопряженному направлению – $q(\lambda)$ которое теперь играет роль направления q^{s+1}. При этом будем иметь

$$(q(\lambda), Cq(\lambda)) = (\bar{q}^s, C\bar{q}^s) + 2\lambda(\bar{q}^s, Cq^{s+1}) + \lambda^2(q^{s+1}, Cq^{s+1})$$

и так как $(\bar{q}^s, Cq^{s+1}) = 0$, то

$$(q(\lambda), Cq(\lambda)) = 1 + \lambda^2(q^{s+1}, Cq^{s+1}) > 0. \qquad (13)$$

Следовательно, минимум функции f по направлению $q(\lambda)$ достигается.

Если перемещению в точку минимума снова препятствует какое-либо из ограничений $x_j \geq 0$, т.е. происходит повторное сужение рассматриваемого аффинного многообразия, то описанная процедура повторяется: определяется новый вектор h, преобразуется система сопряженных направлений и т.д.

Ш. Укажем еще несколько иной способ организации алгоритма для случая, когда на сужаемом аффинном многообразии минимум функции f достигается. Заметим, что это будет всегда так при применении двойственной или комбинированной схем метода последовательного улучшения, рассмотренных в [I].

Пусть, как и в предшествующем изложении, переход происходит от многообразия $L(J_{k+1})$ к многообразию $L(J_{k+2})$ и $J_{k+2} = J_{k+1} \setminus \{j'\}$. При этом известна система сопряженных и C-нормированных векторов $q^1, \ldots, q^{s+1}$, лежащих в $P(J_{k+1})$, а также точка минимума $\bar{x}^{k+1}$ функции f на $L(J_{k+1})(\bar{x}_{j'}^{k+1} < 0)$. В этом случае определение точки $\bar{x}^{k+2}$, доставляющей минимум функции f на $L(J_{k+2})$, можно провести по более простой схеме, поступая следующим образом.

Объединив векторы $q^1, \ldots, q^{s+1}$ в матрицу, которую, как и выше, будем обозначать через Q (она отличается от рассматриваемой ранее матрицы Q добавленным столбцом q^{s+1}), можно аналогично вышеизложенному построить ортогональное преобразование R, переводящее вектор $v = (q_{j'}^1, \ldots, q_{j'}^{s+1})$ в вектор, пропорциональный орту e_{s+1}:

$$vR = \|v\| e_{s+1}.$$

Обозначая через $\bar{q}^1, \ldots, q^{s+1}$ столбцы матрицы $\bar{Q}=QR$, будем иметь, что $\bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^s$ образуют систему сопряженных и C -нормированных направлений для многообразия $L(J_{k+2})$, а для определения точки $\bar{x}^{k+2}$ достаточно смещаться из точки x^{k+1} в направлении вектора $\bar{q}^{s+1}$ до попадания на $L(J_{k+2})$, т.е.

$$\bar{x}^{k+2}=\bar{x}^{k+1}+\gamma\bar{q}^{s+1}, \tag{14}$$

где $\gamma=-\bar{x}^{k+1}_{j_1}/\bar{q}^{s+1}_{j_1}$. Действительно, так как $\bar{x}^{k+1}$ — точка минимума на $L(J_{k+1})$, то вектор $grad f(\bar{x}^k)$ ортогонален ко всем векторам $\bar{q}^i \ (i=1,\ldots,s+1)$. Но тогда, ввиду того, что $grad f(\bar{x}^{k+2})=grad f(\bar{x}^{k+1})+\gamma C\bar{q}^{s+1}$, а вектор $C\bar{q}^{s+1}$ ортогонален к векторам $\bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^s$, получаем

$$(grad f(\bar{x}^{k+2}), \bar{q}^i)=0, \ i=1,\ldots,s,$$

что и требуется для того, чтобы $\bar{x}^{k+2}$ являлась точкой минимума на $L(J_{k+2})$.

3^0. Отметим некоторые детали, касающиеся практической реализации описанного метода.

1) Чтобы определить вектор g, используемый при расширении множества J_k для определения вектора q^{s+1}, можно сохранять и подправлять от шага к шагу процесса матрицу D^{-1}, обратную к некоторой неособенной матрице $D=\{A^j\}_{j\in B_k}$, где B_k - некоторое подмножество множества J_k. Тогда если J_k пополняется элементом j_0, то в качестве вектора g можно принять вектор с компонентами g_j, определяемыми из условий

$$\sum_{j=1}^{n} A^j g_j=0,$$
$$g_{j_0}=1,$$
$$g_j=0, \ j\notin B\cup\{j_0\}.$$

Эта же матрица D^{-1} может быть использована и для определения вектора двойственных переменных при проверке критерия оптимальности.

2) При определении точки минимума функции f по заданному направлению величину шага t вычисляют по формуле (8), лишь расширяя рассматриваемое аффинное многообразие. При следующих после этого его сужениях величина шага может быть получена по

более простой формуле, не требующей вычисления дополнительных величин. Пусть при расширении имеем $x^{k+1}=x^k+\alpha q^{s+1}$. Тогда

$$(p+Cx^{k+1}, q(\lambda))=(p+C(x^k+\alpha q^{s+1}), \bar{q}^s+\lambda q^{s+1})=\lambda(p+Cx^k, q^{s+1})+(p+Cx^k, \bar{q}^{s+1})+\alpha(\bar{q}^s, Cq^{s+1})+\lambda\alpha(q^{s+1}, Cq^{s+1}).$$

Учитывая, что $(p+Cx^k, \bar{q}^s)=0$, $(\bar{q}^s, Cq^{s+1})=0$, а $(p+Cx^k, q^{s+1})=-t(q^{s+1}, Cq^{s+1})$, получаем

$$(p+Cx^{k+1}, q(\lambda))=\lambda(\alpha-t)(q^{s+1}, Cq^{s+1}). \qquad (15)$$

Таким образом, для величины шага t', определяемой формулой

$$t'=\frac{(Cx^{k+1}+p, q(\lambda))}{(q(\lambda), Cq(\lambda))},$$

учитывая (15) и (13), имеем

$$t'=-\frac{\lambda(\alpha-t)(q^{s+1}, Cq^{s+1})}{1+\lambda^2(q^{s+1}, Cq^{s+1})}.$$

3) Так как при выполнении k-го шага процесса компоненты q_j^i векторов q^i при $j\notin J_k$ будут нулевыми, то в целях экономии памяти ЭВМ эти векторы следует хранить в "сжатом" виде, т.е. хранить лишь компоненты q_j^i для $j\in J_k$. Это же относится к векторам x^k и $\bar{x}^k$. Легко видеть также, что можно обойтись хранением в оперативной памяти ЭВМ лишь части матрицы C, соответствующей строкам с номерами $j\in J_k$ и столбцам с номерами $l\in B_k$.

Литература

1. РУБИНШТЕЙН Г.Ш., ШМЫРЁВ В.И. Методы минимизации квазивыпуклой функции на многограннике. - В кн.: Оптимизация. Вып. 1, Новосибирск, 1971, с. 82-117.
2. ШМЫРЁВ В.И. Об алгоритмах метода последовательного улучшения для квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5, Новосибирск, 1972, с. 133-157.
3. ЗАНГВИЛЛ У.И. Нелинейное программирование. М., "Советское радио", 1973.

4. WOLFE PH. The simplex metod for quadratic programming, Econometrica, 1959, v.27, No. 3.

5. BEALE E.M.L. On quadratic programming, Nav. Res. Log. Qu., 1959, No.6.

6. ПОЛЯК Б.Т. Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум. - ЖВМ и МФ. 1969, т. 9, № 4, с. 807-821.

7. FLETCHER R. and REEVES C.M. Function Minimization by Conjugate Gradients, The Computer Journal, 1964, v.VII, No. 2, p. 149-154.

8. SHAH B.V., BUEHLER R.J. and KEMPTHORNE O. Some algorithms for minimizing a function of severel variables, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1964, v. 12, No. 1, p. 74-92.

9. ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.

10. УИЛКИНСОН Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., "Наука", 1970.

Поступила в ред.-изд. отд.
15.VI.1974 г.