1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 14(31)
Численные методы

УДК 512.25/26

АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Н.В.Шмырёва

В работе рассматривается задача дробно-линейного параметрического программирования. Для случая, когда параметр входит в числитель целевой функции задачи, она исследовалась в работе [3]. В настоящей статье рассматривается случай, когда параметр входит линейно в правую часть ограничений задачи, причем многогранник допустимых решений не предполагается ограниченным, вследствие чего не исключается возможность асимптотических лучевых решений. Для решения такой задачи излагается алгоритм, в основу которого положены некоторые модификации процедур прямого и двойственного методов последовательного улучшения. Исследуются вопросы вырождения.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу дробно-линейного программирования : Найти вектор $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, минимизирующий функцию $f(x)=\frac{\sum_j c_j x_j}{\sum_j d_j x_j}$ при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i^1 + t b_i^2,\ i=1,\ldots,m, \qquad (1)$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,\ldots,n. \qquad (2)$$

Здесь a_{ij}, b_i^1, b_i^2, c_j, d_j - заданные вещественные числа, а t - вещественный параметр. Требуется определить решение этой задачи при всех значениях параметра t, при которых она разрешима.

Прежде всего исключим из рассмотрения все те значения параметра, при которых задача заведомо не имеет решений, т.е. при которых система ограничений (I) - (2) несовместна или функция $f(x)$ не ограничена снизу на множестве допустимых решений. Подобное исследование для случая задачи дробно-линейного программирования без параметра проводилось в работе [2].

Обозначим через $\Omega(t)$ множество решений системы (I)-(2) при фиксированном значении t. Как отмечалось в [2], если знаменатель $(d,x)=\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$ принимает в $\Omega(t)$ значения разных знаков, то функция $f(x)$ в общем случае не ограничена снизу на $\Omega(t)$. Для того чтобы определить такие значения t, можно воспользоваться методом линейного параметрического программирования для решения задач о минимизации и максимизации (d,x) на $\Omega(t)$. При этом попутно будет определено множество T значений t, где $\Omega(t)\neq\phi$.

Пусть $\tilde{T}\subset T$ - множество тех значений параметра, при которых функция (d,x) принимает на $\Omega(t)$ значения разных знаков. Поскольку функция $\varphi(t)=\min\limits_{x\in\Omega(t)}(d,x)$ выпуклая, а функция $\psi(t)=\max\limits_{x\in\Omega(t)}(d,x)$ вогнутая, то $\tilde{T}$ - открытый в T интервал.

Как легко показать, для $t\in\tilde{T}$ решение исходной задачи существует лишь в том случае, когда $(c,x)=0$ на $\bar{\Omega}(t)=$ $=\Omega(t)\cap\{x\,|\,(d,x)=0\}$, т.е. когда обращаются в нуль функции

$$\eta(t)=\max_{x\in\bar{\Omega}(t)}(c,x) \quad \text{и} \quad \xi(t)=\min_{x\in\bar{\Omega}(t)}(c,x).$$

Рассмотрим те значения $t\in\tilde{T}$, при которых значения этих функций совпадают.

Так как функция $\xi(t)$ выпуклая, а $\eta(t)$ вогнута и $\eta(t)\geqslant\xi(t)$, значения этих функций могут совпадать либо в граничных точках $\tilde{T}$, либо в том случае, когда они линейны и совпадают на всем $\tilde{T}$. Заметим, что ввиду открытости $\tilde{T}$ в T

граничные точки $\widetilde{T}$ включаются в него, лишь когда они являются граничными для T. Отметим также, что если η и ξ линейны и совпадают, значения их могут обращаться в нуль либо на всем $\widetilde{T}$, либо в одной точке.

Для каждого $t \in \widetilde{T}$, для которого значения функций $\eta(t)$ и $\xi(t)$ совпадают и равны нулю, значение функции $f(x)$ постоянно на всем множестве $\Omega(t)$ при $(d,x) \neq 0$, т.е. $f(x) = K(t)$.

Действительно, пусть x, $z \in \Omega(t)$ и такие, что $(d,x) > 0$, а $(d,z) < 0$. Ввиду выпуклости $\Omega(t)$ точка

$$w = x + \alpha(z - x), \tag{4}$$

при

$$\alpha = \frac{(d,x)}{(d,x)-(d,z)} \tag{5}$$

лежит в $\Omega(t)$ и $(d,w) = 0$. Но тогда и $(c,w) = 0$, т.е. $(c,x) + \alpha((c,z)-(c,x)) = 0$, откуда, если подставить значение α, следует

$$\frac{(c,x)}{(d,x)} = \frac{(c,z)}{(d,z)}. \tag{6}$$

Покажем теперь, что в том случае, когда $\eta(t) = \xi(t) = 0$ на всем $\widetilde{T}$, значение упомянутой константы $K(t)$ не зависит от t.

Пусть t_1, $t_2 \in \widetilde{T}$ и $x \in \Omega(t_1)$, а $z \in \Omega(t_2)$, причем выберем x и z так, чтобы было $(d,x) > 0$, а $(d,z) < 0$. Легко проверить, что точка w, определенная согласно (4), при $\alpha \in [0,1]$ принадлежит множеству $\Omega(t_1 + \alpha(t_2 - t_1))$. Определяя, как и выше, α по формуле (5), получаем $(d,w) = 0$. Так как $\widetilde{T}$ - интервал, то $t = t_1 + \alpha(t_2 - t_1)$ принадлежит $\widetilde{T}$, а тогда из $(d,w) = 0$ следует $(c,w) = 0$, откуда, как и выше, получаем равенство (6). Следовательно, $K(t_1) = K(t_2)$, что и требовалось.

В случае, когда $\widetilde{T} = \emptyset$, функции φ и ψ принимают на T значения одного знака. Пусть, для определенности,

$$\varphi(t) \geq 0, \ t \in T.$$

В этом случае можно исключить из рассмотрения множество

$$T_\varphi^\circ = \{t \in T \mid \varphi(t) = 0, \ \xi(t) < 0\},$$

так как для $t \in T_\varphi^\circ$ функция f не ограничена снизу на $\Omega(t)$.

Аналогично, если $\psi(t) \leq 0$, $t \in T$, то исключается множество

$$T_\psi^\circ = \{t \in T \mid \psi(t) = 0,\ \eta(t) > 0\}.$$

Заметим, что ввиду выпуклости φ, η и вогнутости ψ, ξ множества T_ψ° и T_φ° связные.

Таким образом, исключая из множества T одно из множеств $\tilde{T}$, T_φ° или T_ψ°, в зависимости от того, какой из рассмотренных случаев реализуется, мы получаем не более двух замкнутых отрезков (возможно, бесконечных). На каждом из этих отрезков можно применить описываемый ниже алгоритм.

Пусть S - какой-либо из этих отрезков. Для определенности будем считать в дальнейшем, что $\varphi(t) \geq 0$, $t \in S$.

§ 2. Признаки оптимальности

Если точка x° доставляет минимум функции f на $\Omega(t)$, $t \in S$, то для любой точки $x \in \Omega(t)$, $(d,x) \neq 0$, выполняется неравенство

$$\frac{(c,x)}{(d,x)} \geq \frac{(c,x^\circ)}{(d,x^\circ)} = \lambda,$$

т.е. $(c,x) - \lambda(d,x) \geq 0$. Это означает, что точка x° является точкой минимума функции $u(x) = (c,x) - \lambda(d,x)$ на $\Omega(t)$, причем $u(x^\circ) = 0$.

Легко видеть, что справедливо и обратное: если $x^\circ \in \Omega(t)$, $(d,x^\circ) \neq 0$ и x° является точкой минимума функции u, то она доставляет минимум функции f на $\Omega(t)$. Таким образом, если воспользоваться признаком оптимальности линейного программирования, получим следующий

<u>Признак оптимальности I.</u> Для того чтобы $x^\circ \in \Omega(t)$, $t \in S$, доставляла минимум функции f на $\Omega(t)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа y_1, $y_2, \ldots,$ y_m такие, что выполняются условия:

1. $\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \leq c_j - \lambda d_j$, $j = 1, \ldots, n$,

2. $\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = c_j - \lambda d_j$, если $x_j^0 > 0$,

где $\lambda = \dfrac{(c, x^0)}{(d, x^0)} = f(x^0)$.

В задаче дробно-линейного программирования, в отличие от задач линейного программирования, возможна такая ситуация, когда минимизируемая функция ограничена снизу на допустимом множестве, однако точки минимума не существует. В этом случае, как показано в [2], существует луч, целиком лежащий в допустимой области, такой, что инфимум функции f на этом луче совпадает с ее инфимумом на всем допустимом множестве.

Пусть при $t \in S$ имеет место описанная ситуация, т.е. существует луч

$$\Lambda(x^0, g) = \{x(\tau) = x^0 + \tau g \mid \tau \geq 0\} \tag{7}$$

такой, что $\Lambda(x^0; g) \in \Omega(t)$, функция f строго убывает вдоль Λ и

$$\inf_{x \in \Lambda} f(x) = \inf_{x \in \Omega(t)} f(x) > -\infty. \tag{8}$$

Будем считать, что при таком t задача дробно-линейного программирования разрешима, и под ее решением понимать указанный луч $\Lambda(x^0; g)$, который назовём оптимальным.

Заметим, что в этом случае $(d, g) > 0$. Действительно, при $t \in S$

$$\min_{x \in \Omega(t)} (d, x) \geq 0,$$

а так как $(d, x(\tau)) = (d, x^0) + \tau(d, g) \geq 0$ при любом $\tau \geq 0$, то $(d, g) \geq 0$. Однако при $(d, g) = 0$ и $(c, g) < 0$ нарушается (8), а если $(c, g) \geq 0$, то $\inf_{x \in \Lambda} f(x) = f(x_0)$, что противоречит предположению о несуществовании точки минимума функции f на $\Omega(t)$.

Луч $\Lambda(z^0; g) \subset \Omega(t)$, исходящий из некоторой точки z^0 в направлении вектора g, таком, что $(d, g) \neq 0$, будем называть <u>нижним</u>, если для любого другого луча $\Lambda' \subset \Omega(t)$ выполняется следующее условие:

если $x \in \Lambda(z^0; g)$, $x' \in \Lambda'$ и $(d, x) = (d, x')$, то $(c, x) \leq (c, x')$.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы луч $\Lambda(z^\circ, g) \subset \Omega(t)$, $(d,g)>0$ был нижним, необходимо и достаточно, чтобы z° являлось точкой минимума функции $u(x)=(c,x)-\lambda(d,x)$ на $\Omega(t)$, где $\lambda=\frac{(c,g)}{(d,g)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть луч $\Lambda(z^\circ, g)$ является нижним. Прежде всего, заметим, что на любом луче с направляющим вектором g значение функции u постоянно. Действительно. если $x=x'+\tau g$, то

$$u(x)=(c,x'+\tau g)-\lambda(d,x'+\tau g)=(c,x')-\lambda(d,x')-$$
$$-\tau[(c,g)-\lambda(d,g)]=u(x').$$

Пусть теперь z' - произвольная точка из $\Omega(t)$. Тогда луч

$$\Lambda'=\{z(\theta)=z'+\theta g \mid \theta \geqslant 0\}$$

также будет лежать в $\Omega(t)$. Так как $(d,g)>0$, то найдутся такие точки $x(\tau)\in\Lambda$ и $z(\theta)\in\Lambda'$, что $(d,x(\tau))= =(d,z(\theta))$. Но луч Λ - нижний, а потому $(c,x(\tau))\leqslant(c,z(\theta))$ и, следовательно, $(c,x(\tau))-\lambda(d,x(\tau))\leqslant(c,z(\theta))-\lambda(d,z(\theta))$. Таким образом, $u(x^\circ)=u(x(\tau))\leqslant u(z(\theta))=u(z^\circ)$, т.е. x° - точка минимума функции u на $\Omega(t)$.

Достаточность. Пусть точка x° доставляет минимум функции u на $\Omega(t)$, а Λ' - некоторый луч из $\Omega(t)$. Пусть $x\in\Lambda$ и $z\in\Lambda'$ такие, что $(d,x)=(d,z)$. Тогда

$$u(x^\circ)=(c,x)-\lambda(d,x)\leqslant(c,z)-\lambda(d,z),$$

так как $u(x^\circ)$ - минимум. Отсюда следует, что $(c,x)\leqslant(c,z)$, т.е. луч Λ нижний.

СЛЕДСТВИЕ I. Если при $t\in S$ существует оптимальный луч, то существует и нижний луч.

Действительно, пусть оптимальный луч определяется согласно (7). Тогда для любого $x\in\Omega(t)$ и такого, что $(d,x)\neq 0$,

$$\frac{(c,x)}{(d,x)}>\lambda=\frac{(c,g)}{(d,g)},$$

т.е. $(c,x)-\lambda(d,x)>0$. Поэтому на $\Omega(t)$ существует точка минимума z^{0} функции $u(x)=(c,x)-\lambda(d,x)$. А тогда, согласно теореме, луч $\Lambda'=\{x(\tau)=z^{0}+\tau g \mid \tau \geq 0\}$ является нижним. Заметим, что Λ' будет и оптимальным лучом.

СЛЕДСТВИЕ 2. Нижний луч $\Lambda(x^{0};g)$ является оптимальным тогда и только тогда, когда $u(x^{0})>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Λ - оптимальный луч, то для любой точки $z\in\Omega(t)$, для которой $(d,z)\neq 0$,

$$\frac{(c,z)}{(d,z)}>\inf_{x\in\Lambda}\frac{(c,x)}{(d,x)}=\frac{(c,g)}{(d,g)}=\lambda.$$

Поэтому $(c,z)-\lambda(d,z)>0$, т.е. $u(z)>0$, в частности, и $u(x^{0})>0$.

Обратно, если Λ - нижний луч и $u(x^{0})>0$, то, поскольку $u(x^{0})$ - минимум функции u на $\Omega(t)$, для любой точки $z\in\Omega(t)$, при которой $(d,z)>0$, выполняется неравенство

$$u(z)=(c,z)-\lambda(d,z)>0.$$

Следовательно, $f(z)>\lambda=\inf\limits_{x\in\Lambda} f(x)$, что и доказывает оптимальность Λ.

Таким образом, для того чтобы луч $\Lambda(x^{0};g)$ был нижним оптимальным лучом, необходимо и достаточно, чтобы x^{0} была точкой минимума функции $u(x)=(c,x)-\lambda(d,x)$ на $\Omega(t)$ при $\lambda=\frac{(c,g)}{(d,g)}$ и $u(x^{0})>0$. Если воспользоваться признаком оптимальности для задач линейного программирования, то приведенный признак оптимальности нижнего луча можно сформулировать следующим образом:

Признак оптимальности 2. Для того чтобы луч $\Lambda(x^{0};g)\subset\Omega(t)$, $t\in S$, был нижним оптимальным лучом, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа $y_1, y_2, \ldots, y_m$, такие, что выполняются условия:

1. $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \leq c_j-\lambda d_j$, $j=1,\ldots,n$,

2. $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = c_j-\lambda d_j$, если $x_j^{0}>0$,

3. $\sum_{i=1}^{m} y_i b_i(t) \geq 0,$

где $\lambda = \frac{(c,g)}{(d,g)}$, а $b_i(t) = b_i^1 + t b_i^2$.

§ 3. Алгоритм

Из признака оптимальности I и теории линейного программирования следует, что в задаче дробно-линейного программирования в том случае, когда решение достигается в конечной точке, среди оптимальных решений имеются базисные, которые однозначно определяются некоторым базисным множеством. Под базисным множеством понимается такое множество $J \subset \{1,2,\dots,n\}$, что векторы A^j , $j \in J$, образуют базис в R^m . Если задано базисное множество J , то соответствующее ему решение x однозначно определяется из уравнений задачи и дополнительных условий :

$$x_j = 0, \quad j \bar{\in} J.$$

Базисное множество J будем называть оптимальным, если оптимален соответствующий ему вектор x , и при этом условие 2 признака оптимальности I выполняется в таком виде:

$$2'. \ \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = c_j - \lambda d_j , \ j \in J.$$

Пусть при некотором $t \in S$ рассматриваемая задача дробно-линейного программирования имеет конечное решение и J - соответствующее базисное множество. Легко видеть, что тогда те значения $t \in S$, при которых оптимальное базисное множество будет совпадать с J , образуют некоторый интервал. Действительно, для того чтобы множество J было оптимальным при некотором t , необходимо и достаточно, чтобы для векторов $x(t)$ и $y(t)$, являющихся решениями следующих систем линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} A^j x_j(t) = b^1 + t b^2, \\ x_j(t) = 0, \qquad j \bar{\in} J, \end{cases} \tag{9}$$

$$(y(t), A^j) = c_j - \lambda(t) d_j, \ j \in J, \tag{10}$$

где $\lambda(t) = \dfrac{(c, x(t))}{(d, x(t))}$, выполнялись неравенства:

$$x_j(t) \geq 0, \quad j \in J, \tag{11}$$

$$(y(t), A^j) \leq c_j - \lambda(t) d_j, \ j \bar{\in} J. \tag{12}$$

Так как $x(t)$ линейно зависит от t, то система (II) представляет собой систему линейных неравенств. Из (I0) следует, что $y(t)$ будет линейно зависеть от λ, так что (I2) является системой линейных неравенств относительно λ. Ввиду того, что для оптимального вектора $x(t)$ значение $(d, x(t))$ положительно, то, домножив каждое из неравенств системы (I2) на $(d, x(t))$, мы получим систему линейных неравенств относительно t. Следовательно, решения системы (II) - (I2) образуют интервал.

Таким образом, каждое оптимальное базисное множество будет оптимальным на некотором интервале значений t и, как и в линейном параметрическом программировании, мы можем переходить от одного интервала t к другому, изменяя подходящим образом базисное множество J. При этом, в зависимости от того, какое из неравенств системы (II) - (I2) нарушается, будет применяться процедура прямого или двойственного метода последовательного улучшения (симплекс-метода). Особенностью задачи дробно-линейного программирования является возможность получения при некоторых значениях t лучевых решений. Мы покажем, что те же процедуры, с некоторыми изменениями, применимы и для этого случая. Перейдем к описанию алгоритма.

I. Рассмотрим сначала случай конечного решения.

I А. Пусть базисное множество $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ оптимально для значений t из интервала $[\underline{t}, \bar{t}]$, причем $\bar{t}$ получено из системы (I2) и не совпадает с границей S, т.е. при некотором $j_0 \bar{\in} J$ для $t > \bar{t}$ будет

$$(y(t), A^{j_0}) > c_{j_0} - \lambda(t) d_{j_0},$$

тогда как $x(\bar{t}) \geq 0$. Для получения решения задачи при $t > \bar{t}$ зафиксируем $t = \bar{t}$ и выполним итерацию метода последовательного улучшения (прямого). Пусть $g_i^{j_0}$ – коэффициенты разложения вектора A^{j_0} по базису $\{A^{j_1}, \ldots, A^{j_m}\}$.

I. Если среди коэффициентов $g_i^{j_0}$ имеются положительные, то мы придем к новому базисному множеству J', которое получается из J заменой некоторого номера j_k номером j_0. При этом $g_k^{j_0} > 0$. Покажем, что это базисное множество оптимально на некотором интервале (возможно, вырождающемся в точку), примыкающем справа к интервалу $[\underline{t}, \bar{t}]$.

Пусть $x(t)$ – решение, соответствующее базисному множеству J, а $x'(t)$ – базисному множеству J'. Прежде всего, отметим, что $x'(t)$ является оптимальным решением задачи, по крайней мере, для $t = \bar{t}$. Действительно, вектор $x(\bar{t})$ в соответствии с признаком оптимальности доставляет минимум функции $u(x) = (c, x) - \lambda(\bar{t})(d, x)$ на $\Omega(t)$, где $\lambda(\bar{t}) = \dfrac{(c, x(\bar{t}))}{(d, x(\bar{t}))}$. Так как $(y(\bar{t}), A^{j_0}) = c_{j_0} - \lambda(\bar{t}) d_{j_0}$, то известно, что включение j_0 в базисное множество приведет снова к оптимальному вектору для функции $u(x)$. Но тогда $\lambda(\bar{t}) = \dfrac{(c, x'(\bar{t}))}{(d, x'(\bar{t}))}$, а вектор $x'(\bar{t})$ будет оптимальным в задаче дробно-линейного программирования при $t = \bar{t}$. Остается показать, что множество J' не будет оптимальным ни при каком $t < \bar{t}$. Предположим противное: при $t_0 < \bar{t}$ оба множества J и J' являются оптимальными. Тогда задача дробно-линейного программирования имеет два решения: $x(t_0)$ и $x'(t_0)$. На этих решениях совпадают значения целевой функции, т.е. $\dfrac{(c, x(t_0))}{(d, x(t_0))} = \dfrac{(c, x'(t_0))}{(d, x'(t_0))} = \lambda(t_0)$. Следовательно, множества J и J' будут оптимальными и для функции $u_{t_0}(x) = (c, x) - \lambda(t_0)(d, x)$. Обозначим через $y'(t_0)$ решение системы (10), соответствующее множеству J' и $\lambda = \lambda(t_0)$. Оптимальность множеств J и J' означает, что величины

$$\Delta_j(t_0) = (y(t_0), A^j) + \lambda(t_0) d_j - c_j$$

и

$$\Delta'_j(t_0) = (y'(t_0), A^j) + \lambda(t_0) d_j - c_j$$

неположительны при всех $j=1,\dots,n$. Однако множество J' получено из множества J при выполнении одной итерации метода последовательного улучшения, и величины $\Delta'_j(t_0)$ получаются из величин $\Delta_j(t_0)$ по следующим формулам преобразования:

$$\Delta'_j(t_0)=\Delta_j(t_0)-\frac{g^j_k}{g^{j_0}_k}\,\Delta_{j_0}(t_0),$$

где g^j_k - k-й коэффициент разложения вектора A^j по базису $\{A^{j_1},\dots,A^{j_m}\}$. В частности, так как $j_k\in J$ и, следовательно, $\Delta_{j_k}(t_0)=0$, то

$$\Delta'_{j_k}(t_0)=-\frac{1}{g^{j_0}_k}\,\Delta_{j_0}(t).$$

Однако j_0 выбиралось так, что при $t>\bar{t}$ нарушалось соответствующее неравенство системы (I2) и, следовательно, при $t<\bar{t}$ оно выполняется как строгое, т.е. $\Delta_{j_0}(t_0)<0$. Но $g^{j_0}_k>0$, и поэтому $\Delta'_{j_k}(t_0)>0$, что противоречит оптимальности множества J' при $t=t_0$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда среди коэффициентов $g^{j_0}_i$ нет положительных. В этом случае луч с вершиной в точке $x(\bar{t})$ и направляющим вектором h с компонентами:

$$h_{j_i}=-g^{j_0}_i,\quad i=1,\dots,m,$$

$$h_{j_0}=1,$$

$$h_j=0,\quad j\bar{\in} J\cup\{j_0\},$$

будет целиком лежать в допустимой области $\Omega(t)$ при условии, что $x(\bar{t})$ - допустимый вектор. Этот луч однозначно определяется заданием множества J и номера j_0. Совокупность базисного множества J и номера j_0 будем называть лучевой парой и обозначать $<J,j_0>$. Лучевую пару будем называть оптимальной, если ей соответствует оптимальный нижний луч, и условие 2 признака оптимальности выполняется в виде:

$$(y,A^j)=c_j-\lambda d_j,\ j\in J, \tag{I3}$$

где $\lambda = \dfrac{(c,h)}{(d,h)}$.

В рассматриваемом случае лучевая пара $\langle J, j_0 \rangle$ является оптимальной на некотором интервале, примыкающем к интервалу $[\underline{t}, \bar{t}]$. Действительно, для оптимальности лучевой пары необходимо и достаточно выполнения двух условий:

а) $x_j(t) \geq 0$, $j \in J$;

б) для вектора y , являющегося решением системы уравнений (I3), выполняются неравенства:

$$(y, A^j) \leq c_j - \lambda d_j, \; j \bar{\in} J, \tag{I4}$$

$$(y, b(t)) \geq 0. \tag{I5}$$

Условие а) при $t = \bar{t}$ выполняется по предположению. Покажем, что условия (I4), (I5) выполнены, по крайней мере, при $t = \bar{t}$, а при $t < \bar{t}$ условие (I5) нарушается. Для этого докажем следующее утверждение.

ЛЕММА. Пусть $\langle J, j_0 \rangle$ - допустимая лучевая пара при некотором $t \in S$, $(d, x(t)) > 0$ и $(d, h) > 0$. Тогда условие

$$\Delta_{j_0} = (y(t), A^{j_0}) + \lambda(t) d_{j_0} - c_{j_0} \geq 0, \tag{I6}$$

где вектор $y(t)$ является решением системы (I0), эквивалентно условию (I5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая первое из равенств (9) на y , получаем, ввиду (I3),

$$(y, b(t)) = (c - \lambda d, x). \tag{I7}$$

С другой стороны, если переписать равенства (I0) в виде

$$\Delta_j = (y(t), A^j) + \lambda(t) d_j - c_j = 0, \; j \in J, \tag{I8}$$

то, умножая (I8) на соответствующие h_j и прибавляя к (I6), получаем

$$\Delta_{j_0}(t) = (y(t), (\sum_{j \in J} A^j h_j + A^{j_0})) + \lambda(t)(\sum_{j \in J} d_j h_j + d_{j_0}) - (\sum_{j \in J} c_j h_j + c_{j_0}),$$

или, учитывая тот факт, что h_j - коэффициенты разложения вектора A^{j_0} по базису $\{A^j, j\in \mathcal{J}\}$, взятые с противоположным знаком, можем записать:

$$\Delta_{j_0}(t)=\lambda(t)(d,h)-(c,h). \tag{19}$$

Если в (17) и (19) подставить значения λ и $\lambda(t)$, то будет ясно, что

$$\Delta_{j_0}(t)=(y,b(t))\cdot\frac{(d,h)}{(d,x(t))}, \tag{20}$$

что и доказывает утверждение леммы.

Вернемся теперь к доказательству условий (14) и (15). По условию, $\Delta_{j_0}>0$ при $t>\bar{t}$, а тогда из (19) следует, что $(d,h)\neq 0$. С другой стороны, из допустимости лучевой пары $\langle \mathcal{J}, j_0\rangle$ следует $(d,h)\geqslant 0$. Таким образом, $(d,h)>0$, и если $t>\bar{t}$ такое, что еще $(d,x(t))>0$, то мы находимся в условиях леммы и, следовательно, условие (15) выполняется при $t\geqslant\bar{t}$ и нарушается при $t<\bar{t}$.

Далее, так как $\Delta_{j_0}(\bar{t})=0$, то из (19) следует, что

$$\lambda(\bar{t})=\frac{(c,h)}{(d,h)}=\lambda,$$

а тогда условия (14) эквивалентны условиям (12) при $t=\bar{t}$ и поэтому выполняются.

I B. Случай, когда величина $\bar{t}$ получена из системы (11), аналогичен случаю I A. Если для $t>\bar{t}$ величина $x_{j_k}(t)$ отрицательна, то для получения решения задачи при $t>\bar{t}$ вектор A^{j_k} исключается из базиса и заменяется некоторым вектором $A^{j'}$ в соответствии с правилами двойственного метода последовательного улучшения, т.е.

$$\frac{\Delta_{j'}(\bar{t})}{g_k^{j'}}=\min_{g_k^j<0}\frac{\Delta_j(t)}{g_k^j},$$

где $\Delta_j(\bar{t})=(y(\bar{t}),A^j)+\lambda(\bar{t})d_j-c_j$

Несложно показать, что новое базисное множество $\mathcal{J}'=\{j'\}\cup\mathcal{J}\setminus\{j_k\}$ будет оптимальным, по крайней мере, при $t=\bar{t}$ и не будет допустимым при $t<\bar{t}$. Заметим, что если $\bar{t}$ не является границей области S, то упомянутый вектор $A^{j'}$ всегда найдется (если бы такого вектора $A^{j'}$ не нашлось, это означало бы, что при $t > \bar{t}$ множество $\Omega(t)$ пусто).

П. Пусть теперь у нас имеется некоторая лучевая пара $<J, j_0>$, оптимальная на интервале $[\underline{t}, \bar{t}]$ и $\bar{t}$ не граница S. Как уже отмечалось, для оптимальности лучевой пары необходимо и достаточно, чтобы для векторов $x(t)$ и y, являющихся решениями систем (9) и (I3) соответственно, выполнялись условия (II), (I4), (I5). От параметра t зависят условия (II) и (I5), и, следовательно, границы $\underline{t}$, $\bar{t}$ определяются из этих условий.

П А. Если $\bar{t}$ определено из условий (II), то, как и в случае I В, применяется процедура двойственного метода последовательного улучшения. Из базисного множества J исключается номер j_k такой, что $x_{j_k}(t) < 0$ при всех $t > \bar{t}$, и заменяется номером j', который определяется из условия

$$\frac{\Delta_{j'}}{g_k^{j'}} = \min_{g_k^j < 0} \frac{\Delta_j}{g_k^j}, \qquad (21)$$

где

$$\Delta_j = (y, A^j) + \lambda d_j - c_j \le 0.$$

При этом если $g_k^{j_0} < 0$, то, так как $\Delta_{j_0} = 0$, в качестве j' принимаем номер j_0 (даже если имеются другие нулевые отношения $\frac{\Delta_j}{g_k^j}$).

I. Если $j' \neq j_0$, мы приходим к новому базисному множеству $J' = \{j'\} \cup J \setminus \{j_k\}$. Отметим, что при изменении базисного множества коэффициенты разложения вектора A^{j_0} по новому базису останутся прежними, так как $g_k^{j_0} = 0$. Поэтому $<J', j_0>$ является лучевой парой.

Легко видеть, что эта лучевая пара является оптимальной при $t = \bar{t}$ и не будет таковой при $t < \bar{t}$.

Действительно, условия (I4) признака оптимальности лучевой пары выполнены, поскольку проводилась итерация двойственного метода. Функция $(y, b(\bar{t}))$ является целевой функцией задачи, двойственной к задаче минимизации функции $(c - \lambda d, x)$ на $\Omega(\bar{t})$, и, следовательно,

$$(y, b(\bar{t})) = (c - \lambda d, x). \qquad (22).$$

Так как $x_{j_k}(\bar{t})=0$, то при выполнении итерации двойственного метода эта функция не изменится и, следовательно, значение функции $(y, b(\bar{t}))$ останется неотрицательным, т.е. выполнено и условие (I5) признака оптимальности.

При $t<\bar{t}$ базисное множество J' не будет допустимым, так как $x'_{j'}(t)=\dfrac{x_{j_k}(t)}{g_k^{j'}}<0$ при $t<\bar{t}$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда $j'=j_o$. В этом случае номера j_k и j_o меняются ролями. В базисном множестве J номер j_k заменяется номером j_o, и мы приходим к новому базисному множеству $J'=\{j_o\}\cup J\setminus\{j_k\}$; при этом коэффициенты разложения $\bar{g}_i^{j_k}$ вектора A^{j_k} по новому базису будут неположительными, а именно:

$$\bar{g}_i^{j_k}=-\frac{g_i^{j_o}}{g_k^{j_o}},\quad i\neq k,$$

$$\bar{g}_k^{j_k}=\frac{1}{g_k^{j_o}},$$

а коэффициенты $g_i^{j_o}$, $i=1,\dots,m$, неположительны, по предположению. Таким образом, мы получаем новую лучевую пару $\langle J', j_k\rangle$. Несложно проверить, что значение величины λ не изменится. Как и выше, показывается, что интервал оптимальности этой лучевой пары примыкает к интервалу $[\underline{t}, \bar{t}]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку $(y, b(t))=\min\limits_{x\in\Omega(t)}(c-\lambda d, x)$ является выпуклой функцией параметра t, то множество тех значений $t\in S$, при которых $(y, b(t))\geqslant 0$, не более чем двусвязно. Отсюда следует, что множество тех $t\in S$, для которых существует конечное решение рассматриваемой задачи, односвязно.

II B. Пусть теперь $\bar{t}$ определяется из условия (I5), т.е. при $t>\bar{t}$ величина $(y, b(t))$ отрицательна. Покажем, что в этом случае базисное множество J будет оптимальным, по крайней мере, в точке $\bar{t}$.

Действительно, из (22) следует, что $\lambda=\lambda(\bar{t})$, так как $(y, b(\bar{t}))=0$. Поэтому $y(\bar{t})=y$, и условия (I4) критерия оптимальности лучевой пары эквивалентны условиям оптимальности конечного решения. На основании леммы заключаем, что из условия

$(y, b(t)) < 0$ при $t > \bar{t}$ следует, что условие

$$(y(t), A^{j_0}) + \lambda(t) d_{j_0} - c_{j_0} \le 0$$

дает $\bar{t}$ в качестве левого конца интервала оптимальности базисного множества J.

§ 4. Вопросы вырождения

Поскольку каждому оптимальному базисному множеству и каждой оптимальной лучевой паре отвечает некоторый интервал оптимальности, то, если на каждом шаге процесса мы получаем интервалы, не вырождающиеся в точку, через конечное число шагов мы исследуем всю область S. Однако, если на некотором шаге интервал оптимальности представляет собой точку, возникает опасность зацикливания процесса.

Пусть для некоторого базисного множества J оказалось $\underline{t} = \bar{t} = t_0$ и t_0 не является правым концом области S. Для определенности предположим, что t_0 в качестве верхней границы получается из условий (I2). Это означает, что при $t = t_0 + \delta$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, чтобы $(d, x(t_0+\delta))$ оставалось положительным, нарушается критерий оптимальности множества J для задачи минимизации на $\Omega(t_0)$ функции $(c - \mu d, x)$, где $\mu = \frac{(c, x(t_0+\delta))}{(d, x(t_0+\delta))}$. В соответствии с описанным алгоритмом в рассматриваемом случае мы должны выполнить итерацию прямого метода последовательного улучшения. Если при этом отсутствует вырождение, т.е. $x_j(t_0) > 0$ при всех $j \in J$, то на вновь полученном векторе $x'_j(t_0)$ значение упомянутой функции строго уменьшится. Следовательно, при многократном последовательном повторении описанной ситуации, зацикливание процесса может возникнуть лишь в том случае, когда присутствует вырождение. Для борьбы с зацикливанием в этом случае можно воспользоваться обычными приемами, основанными на применении лексикографической упорядоченности векторов (см. [I]).

Однако могут возникнуть более сложные случаи, когда $\bar{t}$ получается одновременно из условий (II) и (I2). В таких ситуациях борьбу с вырождением можно вести следующим образом. Сначала применяется процедура двойственного метода с использованием соответствующего приема борьбы с зацикливанием до тех пор, пока не окажется, что $\hat{t}$ получается лишь из условий (12). Это означает, что будет получено такое множество $\mathcal{J}$, что если $x_j(t_0)=x_j^1+t_0x_j^2=0$, то $x_j^2\geqslant 0$. Затем при проведении итераций прямого метода последовательного улучшения для исключения зацикливания будем, как обычно, считать величины x_j, $j\in\mathcal{J}$, линейно-независимыми полиномами переменной τ:

$$x_j=x_j(t_0)+p_j^1\tau+p_j^2\tau^2+\ldots,\ j\in\mathcal{J},$$

причем вектор коэффициентов каждого полинома лексикографически положителен. Ввиду отмеченного свойства величин x_j^2, мы можем применять их в качестве коэффициентов p_j^1. Тогда при проведении итераций, не нарушающих лексикографическую положительность упомянутых векторов, условия (11) будут всегда давать t_0 разве лишь в качестве границы снизу.

Так как теперь зацикливание невозможно, то через конечное число шагов будет получено базисное множество или лучевая пара, оптимальные при $t>t_0$.

Преодоление вырождения в случае лучевого решения осуществляется по несколько более сложной схеме, чем в обычном двойственном методе последовательного улучшения, поскольку нужно обеспечить единственность выбора номера j_0 в качестве j', когда $g_k^{j_0}<0$.

Пусть $<\mathcal{J},j_0>$ - оптимальная лучевая пара, интервал оптимальности которой вырождается в точку $\hat{t}$, причем $(y,b(\hat{t}))>0$ (в случае $(y,b(\hat{t}))=0$ существовало бы конечное оптимальное решение).

Для борьбы с вырожденностью проведем вариацию функции $(c-\lambda d,x)$, заменяя компоненты c_j, $j\bar{\in}\mathcal{J}$, вектора c и величину λ некоторыми полиномами переменной τ, которые мы будем обозначать $c(\tau)$ и $\mu(\tau)$ соответственно. При этом $c_j(0)=c_j$ и $\mu(0)=\lambda$. Тогда величины Δ_j, определяемые согласно (21), будут также некоторыми полиномами от τ, которые мы будем обозначать $\Delta_j(\hat{t},\tau)$. Коэффициенты полиномов $c(\tau)$ нужно выбрать так, чтобы векторы коэффициентов полиномов $\Delta_j(\hat{t},\tau)$, $j\bar{\in}\mathcal{J}$, были лексикографически отрицательными, что обеспечивает при малых $\tau>0$ выполнение неравенств

$$\Delta_j(\hat{t},\tau)<0,\ j\bar{\in}\mathcal{J}\cup\{j_0\}, \tag{23}$$

а полином $\mu(\tau)$ определим из условия $\Delta_{j_0}(\hat{t},\tau)=0$. Считая $J=\{j_1,\ldots,j_m\}$, введем в рассмотрение векторы $\bar{c}=(c_{j_1},\ldots,c_{j_m})$ и $\bar{d}=(d_{j_1},\ldots,d_{j_m})$, а также величины

$$\Delta_j^c=\bar{c}g^j-c_j \quad \text{и} \quad \Delta_j^d=\bar{d}g^j-d_j.$$

Легко проверить, что $\Delta_j=\Delta_j^c-\lambda\Delta_j^d$. Тогда $\Delta_{j_0}(\hat{t},\tau)=$ $=\Delta_{j_0}^c(\tau)-\mu(\tau)\Delta_{j_0}^d$ и для $\mu(\tau)$ имеем

$$\mu(\tau)=\frac{\Delta_{j_0}^c(\tau)}{\Delta_{j_0}^d}.$$

Пусть $c_j(\tau)=c_j+p_{1j}\tau+p_{2j}\tau^2+\ldots,\ j\in J$. Тогда $\mu(\tau)=$ $=\lambda+\frac{1}{\Delta_{j_0}^d}(p_{1j_0}\tau+p_{2j_0}\tau^2+\ldots)$, а для полинома $\Delta_j(\hat{t},\tau)$ получаем представление

$$\Delta_j(\hat{t},\tau)=\Delta_j+\left(p_{1j}-\frac{\Delta_j^d}{\Delta_{j_0}^d}p_{1j_0}\right)\tau+\left(p_{2j}-\frac{\Delta_j^d}{\Delta_{j_0}^d}p_{2j_0}\right)\tau^2+\ldots$$

Если коэффициенты p_{ij} выбраны таким образом, что обеспечивается единственность выбора номера j', для которого достигается при малых $\tau>0$

$$\min_{g_k^j<0}\frac{\Delta_j(\hat{t},\tau)}{g_k^j},$$

то условие (23) будет выполняться на каждом шаге. Кроме того, если $g_k^{j_0}<0$, то $j'=j_0$, что соответствует правилам изложенного алгоритма.

Таким образом, при указанной вариации вектора c и значения λ процесс в точности будет совпадать с процедурой двойственного метода последовательного улучшения для минимизации функции $(c(\tau)-\mu(\tau)d,x)$ на $\Omega(\hat{t}+\delta)$, где $\delta>0$ достаточно мало. Теперь ввиду (23), если $j'\neq j_0$, то при выполнении итераций эта функция будет строго убывать. Если же $j'=j_0$, то, так как $\Delta_{j_0}(\hat{t},\tau)=0$, значение этой функции не изменится. Однако в этом случае на векторе $x(t_0+\delta)$ будет строго убывать значение функции $\frac{(c,x)}{(d,x)}$. Действительно, в рассматриваемом случае $(y,b(t))>0$, $(d,h)>0$, кроме того, естественно считать, что $\hat{t}$ не является границей S, а тогда $(d, x(\hat{t})) > 0$. Поэтому, применяя лемму предыдущего параграфа, получим, что на векторе A^{j_0} будет нарушаться критерий оптимальности базисного множества J для задачи минимизации функции $\frac{(c,x)}{(d,x)}$ на $\Omega(\hat{t})$. Несложно показать, что ввиду этого при выполнении итерации будет строго убывать величина $\frac{(c, x(\hat{t}+\delta))}{(d, x(\hat{t}+\delta))}$. Таким образом, описанное правило выбора j' полностью исключает возможность зацикливания процесса.

Коэффициенты p_{ij} можно выбрать, например, следующим образом:

$$p_{1j} = -1, \quad j \in J \cup \{i_0\},$$

$$p_{1j_0} = 0,$$

$$p_{ij} = g^j_{i-1}, \; i = 2, \ldots, m+1, \; j \in J.$$

Легко видеть, что при этом условие (23) выполняется. Единственность выбора j' будет обеспечена, если потребовать, чтобы среди векторов A^j любые три вектора были линейно-независимы. Действительно, если для j, $l \in J$ при малых $\tau > 0$ выполняется

$$\frac{\Delta_j(\hat{t}, \tau)}{g^j_k} = \frac{\Delta_l(\hat{t}, \tau)}{g^l_k},$$

то это означает, что

$$\frac{1}{g^j_k}\left(g_{ij} - \frac{\Delta^d_j}{\Delta^d_{j_0}} g_{ij_0}\right) = \frac{1}{g^l_k}\left(g_{il} - \frac{\Delta^d_l}{\Delta^d_{j_0}} g_{ij_0}\right), \; i = 1, \ldots, m.$$

Отсюда следует линейная зависимость векторов A^j, A^l, A^{j_0}.

Литература

I. ДАНЦИГ Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. М., "Прогресс", 1966.

2. MARTOS BELA. Hyperbolic programming, Naval Research Logistic Quaterly, 1964, v. II, No. 2, 3.

3. ЧЕРНОВ Ю.П. Некоторые задачи параметрического дробно-линейного программирования. – В кн.: Оптимальное планирование. Вып. 16, Новосибирск, 1970, с. 98–111.

Поступила в ред.-изд. отд.
2.VII.1974 г.