1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск I4(31)
Выпуклый анализ

УДК 513.88

НЕПРЕРЫВНЫЕ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ И CE-СВОЙСТВО

С.С.Кутателадзе

В теории Шоке особое место занимает случай стандартности конуса, порождающего упорядоченность Шоке, - симплициальность в смысле Бауэра. Дело в том, что в этом случае компонента граничных форм оказывается дополняемой в ослабленной топологии пространства форм. Основная цель настоящей заметки - показать, что и, наоборот, случай дополняемости по существу не отличается от случая стандартного конуса.

Начнем с основного мотивирующего примера - задачи о существовании достаточного множества непрерывных барицентрических координат. Для случая конечномерных полиэдров эта задача была решена Калманом [I].

Пусть H - адаптированный конус в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на метризуемом компакте Q. Говорят, что пара ($H, C(Q)$) обладает CE-свойством, если тройка (H, $C(Q), R^Q$) стандартна, то есть если для любой функции $f \in -H$ ее H-выпуклая оболочка $co_H f$ непрерывна. Отметим, что, в силу непрерывности суперлинейного оператора co_H, выпуклая оболочка любой непрерывной H-вогнутой функции непрерывна. Понятие CE-свойства ввел Лима [2]. Оказывается, что в данном случае компонента $\mathscr{B}(R)$ граничных функционалов является широко замкнутой и, более того, дополняемой в топологии $\sigma(C'(Q), C(Q))$. Точнее, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) пара $(H, C(Q))$ обладает CE-свойством;

(2) для всякой функции $f \in C(Q)$ выполняется $co_H(-co_H f) \in C(Q)$;

(3) компонента $\mathcal{B}(R)$ дополняема в широкой топологии и отображение

$$\Phi : x \mapsto Spr(\varepsilon_x, H) \cap \mathcal{B}(R)$$

непрерывно в широкой топологии Хаусдорфа;

(4) для каждой точки $x \in Q$ и максимальной меры μ_x такой, что $\mu_x \succ_H \varepsilon_x$ существует широко непрерывное аддитивное выметание $\psi(x, \mu_x)$ такое, что

$$\psi(x, \mu_x)(\varepsilon_x) = \mu_x .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность свойств (3) и (4) очевидна в силу теоремы Майкла о селекторах. Поэтому достаточно установить импликации (I)$\Longrightarrow$(3)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(I).

(I)$\Longrightarrow$(3). В силу теоремы Макободского множество максимальных мер широко замкнуто. Отсюда следует, что отображение Φ широко полунепрерывно сверху и, значит, оператор

$$P_\Phi : f \mapsto (x \mapsto \sup\{\mu(f) : \mu \in \Phi(x)\})$$

переводит $C(Q)$ в конус полунепрерывных сверху функций. Для доказательства непрерывности Φ следует, ввиду теоремы Линке [3], установить, что P_Φ действует в $C(Q)$. В силу леммы о выметании имеем

$$P_\Phi f(x) = \sup\{q_{H,\mu}(f) : \mu \succ_H \varepsilon_x, \mu \in \mathcal{B}(R)\} =$$

$$= \sup_{h \in \mathcal{U}_f^H} \sup\{\mu(h) : \mu \succ_H \varepsilon_x, \mu \in \mathcal{B}(R)\} = \sup_{h \in \mathcal{U}_f^H} \sup\{\mu(h) : \mu \succ_H \varepsilon_x\} =$$

$$= \sup_{h \in \mathcal{U}_f^H} (-\inf\{\mu(-h) : \mu \succ_H \varepsilon_x\}) = \sup_{h \in \mathcal{U}_f^H} (-q_{H,\varepsilon_x}(-h)) = \sup_{h \in \mathcal{U}_f^H} (-co_H(-h)(x)).$$

Таким образом, функция $P_\Phi f$ полунепрерывна снизу в силу непрерывности функций $co_H(-h)$, где $h \in \mathcal{U}_f^H$. Осталось проверить дополняемость $\mathcal{B}(R)$. Для этого достаточно выбрать широко

непрерывный селектор φ отображения Φ и рассмотреть оператор ψ, сопряженный к линейному оператору

$$f \mapsto (x \mapsto \varphi(x)(f)).$$

В силу замкнутости множества максимальных мер, оператор ψ является выметанием.

(3) $\Longrightarrow$ (2). Следует проверить, что

$$P_\Phi(f) = -co_H(-co_H f).$$

Поскольку для функции $h \in \mathcal{U}_f^H$ выполняется $h \leq co_H f$, то $P_\Phi f \leq -co_H(-co_H f)$. Осталось установить обратное неравенство. Проверим сначала, что функция $P_\Phi f$ является H-вогнутой. В силу ее непрерывности последнее свойство эквивалентно условию

$$\mu \succ_H \varepsilon_x \Rightarrow \mu(P_\Phi f) \leq P_\Phi f(x).$$

В силу монотонности оператора P_Φ имеем, что семейство

$$\{-co_H(-h) : h \in \mathcal{U}_f^H\}$$

фильтруется по возрастанию и лежит в $C(Q)$. Значит, если $\mu \succ_H \varepsilon_x$, то

$$\mu(P_\Phi f) = \sup_{h \in \mathcal{U}_f^H} \mu(-co_H(-h)) \leq \sup_{h \in \mathcal{U}_f^H} (-co(-h)(x)) = P_\Phi f(x).$$

По определению P_Φ, справедлива оценка

$$P_\Phi f = \sup_{h \in \mathcal{U}_f^H} (-co_H(-h)) \geq \sup_{h \in \mathcal{U}_f^H} co_H h = co_H f.$$

Значит, в силу вогнутости $P_\Phi f$ выполняется

$$-P_\Phi f = co_H(-P_\Phi f) \leq co_H(-co_H f),$$

что и требовалось.

(2) $\Longrightarrow$ (I). Для функции $h \in -H$ имеем $co_H h = co_H(-co_H(-h))$ и, значит, $co_H h \in C(Q)$. Предложение доказано полностью.

Заметим, что в силу этого предложения все широко непрерывные аддитивные выметания в данной ситуации порождаются линейными операторами $A : C(Q) \to C(Q)$, опорными к P_Φ, или, иными словами, широко непрерывными селекторами отображения Φ. Заметим, что множество $\mathcal{N}_R$ - общая часть ядер максимальных форм-и компонента $\mathcal{B}(R)$ являются полярами друг к другу. Более того, каждое из этих пространств дополняемо. При этом соответствующими проекторами в $C'(Q)$ могут служить широко

непрерывные аддитивные выметания, а проекторами на дополнение $\mathcal{N}_R$ в $C(Q)$ – опорные операторы к оператору P_Φ. Разумеется, что выметания и опорные операторы взаимно сопряжены. Существенно при этом подчеркнуть, что здесь речь идет о проекторах в смысле линейного анализа, то есть об идемпотентных операторах. Проектор на компоненту $\mathcal{Y}(R)$ в смысле теории K-пространств выметанием не является!

Селекторы отображения Φ называются <u>барицентрическими координатами</u>. Таким образом, (существует достаточное множество широко непрерывных барицентрических координат + граница Шоке $Ch(H)$ замкнута) $\Longleftrightarrow$ (пара $(H, C(Q))$ обладает CE-свойством) в предположении метризуемости Q.

Приведенное предложение наводит на мысль, что случай дополняемости компоненты $\mathcal{Y}(R)$ не сильно отличается от ситуации стандартного конуса. Действительно, первую ситуацию можно превратить во вторую "морфизмом" теории Шоке. Точнее, справедлива

ТЕОРЕМА о перестройке. *Пусть H – конус в K-линеале X, являющемся подлинеалом K-пространства Z. Пусть, далее, компонента граничных по Шоке относительно H форм монотонно дополняема в ослабленной топологии пространства регулярных форм и Ψ – соответствующий положительный проектор. Положим $\mathcal{D} = \Psi^*$ и $H_1 = \mathcal{D}\langle X\rangle$. Если наименьшая верхняя решетка $P(H_1)$, натянутая на H_1, конинициальна Z и $X = \overline{P(H_1) - P(H_1)}$, то*

(1) компоненты граничных операторов в упорядоченностях Шоке, наводимых H и H_1, совпадают;

(2) конус $P(H_1)$ является стандартным;

(3) оператор $\mathcal{D}$ совпадает с оператором Дирихле $\mathcal{D}_{P(H_1)}$ конуса $P(H_1)$;

(4) оператор Ψ совпадает с единственным выметанием $\Psi^{\varepsilon}_{P(H_1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (2) очевидно, так как $\mathcal{D}\langle X\rangle$ является K -линеалом в индуцированном порядке. Ясно, что для $h_1,\ldots,h_n\in H_1$ выполняется

$$\mathcal{D}_{P(H_1)}(h_1\wedge\ldots\wedge h_n)=\inf_{H_1}\{h_1,\ldots,h_n\}=\mathcal{D}(h_1\wedge\ldots\wedge h_n)$$

и, значит, $\mathcal{D}=\mathcal{D}_{P(H_1)}$. Таким образом, (3) выполнено, а значит, выполнено и (4), так как

$$\psi=\mathcal{D}^*=\mathcal{D}^*_{P(H_1)}=\psi^K_{P(H_1)}.$$

Для доказательства (I), как видно, следует установить, что оператор T максимален в упорядоченности Шоке $\succ_{P(H)}$ в том и только в том случае, если его нулевой линеал $\mathcal{N}(T)$ содержит нулевой линеал $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ оператора $\mathcal{D}$.

Заметим сначала, что если $T\in\mathcal{L}^+(X,Y)$, то $T\mathcal{D}$ максимален. Действительно, пусть $Ah\geqslant T\mathcal{D}h$ для $h\in P(H)$. Тогда для $f\in\mathcal{L}^+(Y,R)$ выполняется

$$A^*f\succ_{P(H)}\psi(T^*f),$$

то есть,по определению, $A^*f=\psi T^*f$. Следовательно, $A=T\mathcal{D}$.

Отметим также, что общая часть $\mathcal{N}$ ядер или нулевых решеток всех максимальных операторов содержится в $\mathcal{N}(\mathcal{D})$. Действительно, если $x\in\mathcal{N}$, то для $f\in\mathcal{L}^+(X,R)$ выполняется $\mathcal{D}^*f(|x|)=0$ и, значит, $\mathcal{D}|x|=0$, то есть $x\in\mathcal{N}(\mathcal{D})$.

Пусть теперь $\mathcal{N}(T)\supset Ker(\mathcal{D})$. Тогда

$$Tx=T\mathcal{D}x+T(x-\mathcal{D})=T\mathcal{D}x,$$

ибо $\mathcal{D}(x-\mathcal{D}x)=0$. Значит, по доказанному выше, T - максимальный оператор. Таким образом,

$$\mathcal{N}=\bigcap_T\mathcal{N}(T)\supset Ker(\mathcal{D})\supset\mathcal{N}(\mathcal{D})\supset\mathcal{N}.$$

Следовательно, $\mathcal{N}=Ker(\mathcal{D})=\mathcal{N}(\mathcal{D})$, что и завершает доказательство.

Нетрудно видеть, что условия, наложенные на "размеры" конуса $\mathcal{D}\langle X\rangle$, существенны. Отметим также, что в предположении коинициальности H в Z выполняется

$$Ch(H,X,Z)=\mathcal{N}(\mathcal{D})^d,$$

где Ch - соответствующая компонента Шоке.

Отметим, наконец, что каждое широко непрерывное аддитивное выметание ψ на адаптированном конусе, натянутом на допустимое подпространство H в $C(Q)$, удовлетворяет условиям теоремы о перестройке, поскольку $\psi^*\langle C(Q)\rangle \supset H$. Таким образом, если пара $(P(H), C(Q))$ обладает CE -свойством, то $(\psi^*\langle C(Q)\rangle, C(Q))$ - симплекс Бауэра. Эта ситуация достаточно типична. Например, пространство гармонических в открытом шаре и непрерывных в замкнутом шаре B^n функций есть перестройка пространства аффинных функций A с помощью барицентрических координат

$$x \longmapsto \text{(гармоническая мера с центром } x\text{)}.$$

Поскольку пара $(P(A), C(B^n))$, очевидно, обладает CE -свойством, то таких перестроек в симплексы Бауэра, грубо говоря, столько же, сколько мер на границе B^n.

Литература

1. KALMAN T.A. Continuity and convexity of projektions and barycentrik coordinates in convex polyhedra, "Pasif. T. Math",1961, v.11, p.1017-1022.
2. LIMA A. On continuous convex functions and split faces, "Proc. London Math. Soc.", 1972, v.25, p.27-41.
3. ЛИНКЕ Ю.Э. Об опорных множествах сублинейных операторов. "Докл. АН СССР", 1972, т. 207, № 3, с. 531-533.

Поступила в ред.-изд. отд.
5. IУ. 1974 г.