1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Модели динамики и равновесия

УДК 51.330 : 115

О ХАРАКТЕРИСТИКЕ ТРАЕКТОРИЙ МОДЕЛЕЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ МНОГОГРАННЫМИ КОНУСАМИ

А.Ж.Жафяров

В работе доказана теорема о структуре всех характеристик[ж)] данной траектории моделей Неймана. Кроме того, здесь указаны необходимые и достаточные условия, при которых в моделях Неймана для бесконечно оптимальных траекторий имеет место теорема о магистрали в сильнейшей форме. В конце статьи рассмотрены модели Неймана, для конечных оптимальных траекторий которых справедлива теорема о магистрали в сильнейшей форме. Эта форма теорем о магистрали впервые была доказана В.Л.Макаровым, причем для базисных оптимальных траекторий модели Неймана. Здесь же базисность оптимальной траектории не требуется, однако на модель налагается сильное ограничение.

1. В работе [1] указаны необходимые и достаточные условия, при которых существует характеристика данной траектории модели Неймана-Гейла, в частности модели Неймана. Однако эта теорема не описывает устройство этих характеристик. Приводимая ниже теорема 1 восполняет этот пробел.

Пусть $\mathcal{Z}=\{(Au,Bu): u\in R_+^m\}$ – модель Неймана (здесь R_+^m – неотрицательный ортант m-мерного евклидова пространства, A и B – неотрицательные матрицы порядка $n\times m$). Далее, пусть $X=(x_t)$ – некоторая траектория этой модели. Тогда для любого t ($t=0,1,2,\ldots$) имеем: $x_t=Au_t$, $x_{t+1}=Bu_t$, $u_t\in R_+^m$.

ж) Здесь и в дальнейшем будем пользоваться терминологией и обозначениями, принятыми в [1].

Положим $\mathcal{J}_t=\{i\in\{1,\dots,m\},\ u_t^i>0\}$, где u_t^i – i-ая координата вектора u_t (множество $\mathcal{J}_t$ обычно называют носителем u_t). Пусть a^i и b^i – столбцы соответственно матриц A и B с номером i $(i\in\{1,2,\dots,m\})$. Через H_i обозначим гиперплоскость, определяемую вектором $(a^i,-b^i)\in R^{2n}$. Положим

$$\Gamma_{t,t+1}=\mathcal{Z}'\cap(\bigcap_{i\in\mathcal{J}_t}H_i),\ t=0,1,2,\dots.$$

Очевидно, $\Gamma_{t,t+1}$ есть некоторая грань конуса $\mathcal{Z}'$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\chi=(x_t)$ – некоторая траектория модели Неймана. Тогда любая характеристика $\varphi=(f_t)$ этой траектории удовлетворяет условию

$$(f_t,f_{t+1})\in\Gamma_{t,t+1},\ t=0,1,2,\dots. \qquad (\mathrm{I})$$

И, наоборот, любая последовательность $\varphi=(f_t)$, удовлетворяющая условию (I), является характеристикой данной траектории.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi=(f_t)$ – некоторая характеристика траектории $\chi=(x_t)$. Тогда $f_t(x_t)=f_{t+1}(x_{t+1})$, где $x_t=Au_t$, $x_{t+1}=Bu_t$, $t=0,1,2,\dots$. Так как для любого t $(t=0,1,2,\dots)$ верно неравенство $f_tA\geq f_{t+1}B$, то для всех номеров $i\in\mathcal{J}_t$ имеет место равенство $f_t(a^i)=f_{t+1}(b^i)$. Отсюда следует, что $(f_t,f_{t+1})\in\Gamma_{t,t+1}$, $t=0,1,2,\dots$, т.е. условие (I) выполнено.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $\varphi=(f_t)$ – некоторая последовательность, удовлетворяющая (I). Покажем, что $\varphi=(f_t)$ есть характеристика траектории $\chi=(x_t)$, т.е. для любого $t=0,1,2,\dots$ справедливы соотношения:

а) $f_t(x_t)=f_{t+1}(x_{t+1})$; б) $f_t(\bar{x}_t)\geq f_{t+1}(\bar{x}_{t+1})$,

где пара $(\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$ составлена из членов траектории $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$ модели $\mathcal{Z}$, отличной от $\chi=(x_t)$. Так как $(f_t,f_{t+1})\in\Gamma_{t,t+1}\subset\mathcal{Z}'$, то условие б) выполнено. Далее, из того, что $(f_t,f_{t+1})\in\Gamma_{t,t+1}$, следует справедливость равенства $f_t(a^i)=f_{t+1}(b^i)$ для любого $i\in\mathcal{J}_t$. Тогда имеют место следующие равенства:

$$f_t(a^i)u_t^i = f_{t+1}(b^i)u_t^i, \quad \sum_{i \in J_t} f_t(a^i)u_t^i = \sum_{i \in J_t} f_{t+1}(b^i)u_t^i,$$

$$f_t(Au_t) = f_{t+1}(Bu_t), \quad f_t(x_t) = f_{t+1}(x_{t+1}),$$

где $x_t = Au_t$, $x_{t+1} = Bu_t$, $t = 0,1,2,\ldots$. Теорема доказана.

Из этой теоремы можно сделать ряд важных следствий. Предварительно введем одно определение.

Пусть $\mathcal{U} = (u_t)$ есть $\mathcal{U}$ -траектория траектории $\chi = (x_t)$, т.е. $x_t = Au_t$, $x_{t+1} = Bu_t$, $t = 0,1,2,\ldots$. Последовательность $\mathcal{J}_\chi = (\mathcal{J}_t)$ назовем носителем траектории $\chi = (x_t)$.

СЛЕДСТВИЕ I. Характеристика траектории $\chi = (x_t)$ зависит только от носителя $\mathcal{J}_\chi$, т.е. она зависит только от базисных процессов, участвующих в образовании траектории $\chi = (x_t)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Все характеристики траектории $\chi = (x_t)$ определяются одной и той же последовательностью граней $\Gamma = (\Gamma_{t,t+1})$.

Заметим, что число различных граней в последовательности $\Gamma = (\Gamma_{t,t+1})$ — лишь конечное число, так как число всех граней конуса $\mathcal{Z}$ конечно.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если какая-нибудь траектория модели Неймана имеет характеристику, то характеристику имеет любая другая траектория, использующая те же базисные процессы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Все сказанное выше имеет место и для моделей с переменной технологией $\mathcal{Z}_t$, если $\mathcal{Z}_t$ задается многогранным конусом.

2. Знание характеристики очень важно для изучения асимптотических свойств самой траектории. В терминах характеристик можно указать необходимые и достаточные условия принадлежности траектории неймановской грани (см. приводимую ниже теорему 2).

Прежде чем оформулировать эти условия введем следующие определения.

Будем говорить, что траектория $\chi=(x_t)$ модели $\mathcal{Z}$ почти всюду допускает характеристику, если найдется траектория $\varphi=(f_t)$ модели $\mathcal{Z}'$ такая, что для любого t (t =0,1,2,..) справедливы неравенства: 1) $f_t(x_t)\geq f_{t+1}(x_{t+1})$, причем строгое неравенство допустимо лишь для конечного числа значений t ; 2) $f_t(\bar{x}_t)\geq f_{t+1}(\bar{x}_{t+1})$ для любой траектории $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$ модели $\bar{Z}$.

Траекторию $\varphi=(f_t)$, о которой говорится в этом определении, будем называть обобщенной характеристикой траектории $\chi=(x_t)$. Заметим, что любая характеристика траектории является её обобщенной характеристикой. Наоборот, вообще говоря, не верно.

Теперь несколько обобщим понятие φ -оптимальности траектории. Предварительно введем следующие обозначения. Положим

$$Q_\alpha=\{(f,g)\in\mathcal{Z}'\mid f(a^i)=g(b^i),\ i\in\bar{J}_\alpha\},\ \bar{J}_\alpha=\{1,2,\dots,m\}\setminus J_\alpha,$$

где J_α - множество номеров образующих неймановской грани N_α , причем для простоты считаем α = 1.

Траекторию $\chi=(x_t)$ модели $\mathcal{Z}$ назовем квази (φ)-оптимальной, если она почти всюду допускает характеристику $\varphi=(f_t)$ такую, что все предельные точки последовательности $\{(f_t,f_{t+1})\}$ принадлежат множеству Q_α .

Заметим, что φ -оптимальные траектории заведомо являются квази (φ)-оптимальными. Обратное, вообще говоря, неверно .

ТЕОРЕМА 2. Пусть модель Неймана $\mathcal{Z}$ такая, что $(\bar{x},\bar{x})\in\mathcal{Z}$ и $\bar{x}\gg 0$. Траектория $\chi=(x_t)$ модели $\mathcal{Z}$ принадлежит неймановской грани N_α за исключением, быть может, конечного числа значений t (t = 0,1,2,...) тогда и только тогда, если она квази-(φ)-оптимальна.

<u>Необходимость.</u> Если траектория $\chi=(x_t)$ почти для всех значений t (t = 0,1,2,...) принадлежит неймановской грани N_α, то для неё обобщенной характеристикой является последовательность $\varphi=(f_t)$, где $f_t=p$, $p\in int\,\Pi_\alpha$, Π_α - множество всех равновесных векторов, соответствующих темпу роста $\alpha=1$. Пара

$(p,p)\in Q_\alpha$ для всех $p\in \operatorname{int}\Pi_\alpha$. Следовательно, траектория $\chi=(x_t)$ квази (φ)-оптимальна.

<u>Достаточность.</u> Пусть $\chi=(x_t)$ – квази (φ)-оптимальная траектория и $\varphi=(f_t)$ – её обобщенная характеристика. Заметим, что последовательность (f_t) ограничена. Теперь покажем, что любой процесс (a^k, b^k), $k\in \mathcal{I}_\alpha$, используется в состоянии (x_t, x_{t+1}), t = I,2,..., с положительной интенсивностью не более чем конечное число раз. Предположим противное. Тогда, не вдаваясь в подробности, можно считать, что найдется подпоследовательность (t_ℓ) такая, что I) $f_{t_\ell}(x_{t_\ell})=f_{t_\ell+1}(x_{t_\ell+1})$; 2) процесс (a^k, b^k) используется в состоянии $(x_{t_\ell}, x_{t_\ell+1})$ с положительной интенсивностью. Выделим подпоследовательность последовательности (t_ℓ) (для простоты рассуждений будем считать её совпадающей с (t_ℓ)) такую, что $f_{t_\ell}\to f$, $f_{t_\ell+1}\to g$. По условию, $(f,g)\in Q_\alpha$. Далее, так как $f_{t_\ell}(a^k)=f_{t_\ell+1}(b^k)$, то $f(a^k)=g(b^k)$, т.е. $(f,g)\notin Q_\alpha$. Противоречие. Теорема доказана.

3. В этом пункте рассмотрим теорему о магистрали для конечных оптимальных траекторий модели Неймана. Большой интерес представляют оптимальные траектории, которые, попав в неймановскую грань, остаются в ней сколь угодно долго и выходят из неё разве лишь для достижения конечной цели. Ниже приводится класс моделей Неймана, отличных от моделей, рассмотренных в [2] и [4], для конечных оптимальных траекторий которых выполняется указанная выше теорема о магистрали в сильнейшей форме.

Пусть модель Неймана $\mathcal{Z}$ обладает следующими свойствами:
I) существует состояние равновесия $(\alpha,(\bar{x},\bar{y}),\bar{p})$ такое, что $\bar{x}\gg 0$, $\bar{p}\gg 0$ (по-прежнему считаем $\alpha=1$);
2) одна из проекций неймановской грани N'_α модели $\mathcal{Z}'$ совпадает с лучом $(\lambda\bar{p})_{\lambda\geq 0}$. Напоминаем, что, по определению [3],

$$N'_\alpha=\{(f,g)\in \mathcal{Z}' \mid f(a^i)=g(b^i)\quad \forall i\in \mathcal{I}_\alpha\}.$$

Приведем пример модели Неймана, удовлетворяющий условиям I) и 2).

Пусть модель $\mathcal{Z}$ задана матрицами A и B, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 2/3 & 4/3 & 0 & 0\\ 4/3 & 2/3 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Состояние равновесия определяется тройкой (α, $(\bar{x},\bar{y})$, $\bar{p}$), где $\alpha=1$, $\bar{x}=\bar{y}=(1,1)$, $\bar{p}(1,1)$. Неймановская грань N'_α является конической оболочкой образующих (f^1,g^1) и (f^2,g^2), где $g^1=g^2=(1,1)$, $f^1=(0,2)$, $f^2=(2,0)$. Здесь $Pr_2(N'_\alpha)=(\lambda\bar{p})_{\lambda\geq 0}$. Заметим, что эта модель отлична от моделей, рассмотренных в [2] и [4].

ТЕОРЕМА 3. Пусть модель Неймана $\mathcal{Z}$ удовлетворяет ограничениям 1) и 2). Далее, пусть $\chi=(x_t)_{t=0}^{T}$ есть (x_0,f,T) - оптимальная траектория такая, что $f\gg 0$. Тогда найдется натуральное число τ такое, что для всех t, $\tau\leq t\leq T-\tau-1$, справедливо включение $(x_t,x_{t+1})\in N_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью приводить не будем, укажем только основные моменты.

(1) Так же, как и в [1], доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для того чтобы траектория $\varphi=(f_t)$ модели $\mathcal{Z}'$ стремилась к неймановской грани N'_α, необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал $\bar{u}\in int\, \mathcal{U}_\alpha$ (где $\mathcal{U}_\alpha=\{u\in R^m_+ \mid Au\leq Bu\}$ такой, что $\frac{1}{\|f_t\|}(A\bar{u}(f_t)-B\bar{u}(f_{t+1}))\to 0$.

Так как $\bar{p}\gg 0$ и $\alpha=1$, то $A\bar{u}=B\bar{u}=\bar{x}$.

(2) Так же, как и в [1] (см. лемму 13.1), доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого $\varepsilon>0$ и любого вектора $\bar{u}\in int\,\mathcal{U}_\alpha$ найдется $\delta\in(0,1)$ такое, что $g(B\bar{u})<(1-\delta)f(A\bar{u})$ для любой пары $(f,g)\in\mathcal{Z}'$, удовлетворяющей условию $\rho(\frac{(f,g)}{\|f\|},N'_\alpha)\geq\varepsilon$.

(3) Пусть $\varphi=(f_t)_{t=0}^{T}$ - характеристика траектории $\chi=(x_t)_{t=0}^{T}$ такая, что $f_T=f$. Так же, как и в [3] (см. лемму 2), доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. По любому $\varepsilon>0$ для любой оптимальной траектории $\varphi=(f_t)_{t=0}^{T}$ мо-

дели $\mathcal{Z}'$ найдется натуральное число τ, не зависящее от T и такое, что число пар (f_t, f_{t+1}), удовлетворяющих условию $\rho\left(\frac{(f_t, f_{t+1})}{\|f_t\|}, N_\alpha'\right) \geq \varepsilon$, не превосходит τ.

(4) Так как $f \gg 0$, то найдется $k > 0$, такое, что $f \geq k\bar{p}$. Выберем число ε, о котором говорится в предложениях 2 и 3, так, чтобы имело место неравенство $0 < \varepsilon < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, где ε_1 и ε_2 – числа, удовлетворяющие условиям: $0 < \varepsilon_1 < \frac{\gamma}{n(r_1 + r_2)}$,

$\gamma = \min_{i \in \bar{\mathcal{I}}_\alpha} (\rho(a^i) - \rho(b^i)) > 0$, r_1 и r_2 – наибольшие элементы соответственно столбцов a^i и b^i с номерами $i \in \bar{\mathcal{I}}_\alpha$;

$$0 < \varepsilon_2 < \frac{k \cdot c}{2(1+c)} \cdot \frac{m \cdot \bar{x}(\bar{p})}{\bar{x}(f_0)} \gamma, \; c = \min_{1 \leq i \leq n} \bar{p}^i; \; m = \min_{1 \leq i \leq n} \bar{x}^i; \; \|\bar{x}\| = \|\bar{p}\| = 1.$$

(5) Так же, как и в [5], доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего условию $\varepsilon < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, найдется натуральное число τ такое, что для всех t, $\tau \leq t \leq T - \tau$, справедливо неравенство $\left\| \frac{f_t}{\|f_t\|} - \rho \right\| < \varepsilon$.

(6) Теперь покажем, что для любого t, $\tau \leq t \leq T - \tau - 1$, пара $(x_t, x_{t+1}) \in N_\alpha$. В самом деле, если предположить противное, для некоторого t_0, $\tau \leq t_0 \leq T - \tau - 1$, пара $(x_{t_0}, x_{t_0+1}) \notin N_\alpha$, то найдется номер $i \in \bar{\mathcal{I}}_\alpha$, такой, что базисный процесс (a^i, b^i) используется в состоянии (x_{t_0}, x_{t_0+1}) с положительной интенсивностью. Так как для t_0, $t_0 + 1$ верно неравенство $\left\| \frac{f_t}{\|f_t\|} - \bar{p} \right\| < \varepsilon$ то, считая $\|f_{t_0}\| = 1$, получим $f_{t_0} = \bar{p} + \xi$, $f_{t_0+1} = \|f_{t_0+1}\|(\bar{p} + \eta)$, где $|\xi^i| < \varepsilon$, $|\eta^i| < \varepsilon$. Положим $\|f_t\| = \bar{x}(f_t)$. Так как $\bar{x}(f_{t_0}) \geq \bar{x}(f_{t_0+1})$, то верны следующие соотношения:

$$0 = f_{t_0}(a^i) - f_{t_0+1}(b^i) = (\bar{p} + \xi)(a^i) - \|f_{t_0+1}\|(\bar{p} + \eta)(b^i);$$

$$\bar{p}(a^i) - \|f_{t_0+1}\| \bar{p}(b^i) = -\xi(a^i) + \|f_{t_0+1}\| \eta(b^i).$$

Покажем, что полученное равенство неверно. В самом деле, из

неравенств $\bar{p}(a^i)-\bar{p}(b^i)\geq\gamma$, $\|f_{t+1}\|\leq 1$ следует $\bar{p}(a^i)-\|f_{t_0+1}\|\bar{p}(b^i)\geq\gamma$. Теперь оценим правую часть равенства

$$-\xi(a^i)+\|f_{t_0+1}\|\eta(b^i)\leq n\varepsilon\gamma_1+n\varepsilon\gamma_2=\varepsilon n(\gamma_1+\gamma_2)<\gamma.$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\varphi=(f_t)_{t=0}^{T}$ - траектория модели $\mathcal{Z}'$ такая, что для любого t, $\tau\leq t\leq T-\tau$, выполняется неравенство $\left\|\frac{f_t}{\|f_t\|}-\frac{\bar{p}}{\|\bar{p}\|}\right\|<\varepsilon$, где $0<\varepsilon<\frac{\gamma}{n(\gamma_1+\gamma_2)}$. Тогда любая траектория $\chi=(x_t)_{t=0}^{T}$ модели $\mathcal{Z}$, для которой $\varphi=(f_t)_{t=0}^{T}$ является характеристикой, принадлежит неймановской грани N_α для всех моментов времени t, $\tau\leq t\leq T-\tau-1$.

Автор выражает благодарность А.М.Рубинову и В.Л.Макарову за обсуждение и ценные советы.

Литература

1. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. "Наука", М., 1973, с.141-273.
2. ЖАФЯРОВ А.Ж. Теорема о магистрали в сильнейшей форме. - В кн.: Оптимизация, Новосибирск, 1972, вып. 7(24), с.14-25.
3. ЖАФЯРОВ А.Ж. Двойственный подход к одной из форм теорем о магистрали.-В кн.: Оптимизация, Новосибирск, 1972, вып. 7(24), с. 5-13.
4. МОРИШИМА М. Равновесие, устойчивость, рост. "Наука", М., 1972, с. 196-217.
5. NIKADO H. Persistence of continual growth near the von Neumann rey: A strong version of the Radner turnpike theorem, Econometrika, 1964, No 32, 1-2, p. 151-163.

Поступила в ред.-изд. отд.

23. IX. 1974 г.