1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Численные методы

УДК 512.25/26

О РЕШЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С РАСШИРЯЮЩИМСЯ ПРОИЗВОДСТВОМ

Р.А.Звягина

Рассматривается динамическая транспортная задача на p периодов с m пунктами потребления, n пунктами производства и со способами расширения имеющихся пунктов производства. Требуется найти такой план расширения производства в пределах заданного для каждого пункта объема и такой план перевозок производимого продукта, чтобы в каждом периоде удовлетворялись все потребности и суммарные затраты по всем периодам на строительство и перевозки были минимальными. Задача такого типа [I], поставленная как задача линейного программирования, обладает рядом особенностей, которые позволяют отнести её в класс задач, имеющих ранг сложности (см. [2]) не больше n , независимо от числа периодов. Доказательство этого утверждения основано на разложении базисной матрицы в произведение двух блочно-треугольных матриц специального вида. При этом для удобства изложения предполагается, что вновь создаваемый пункт производства уже имеется (с нулевым объемом), для каждого пункта производства в каждый период существует ровно один способ расширения и эти способы в различные периоды для фиксированного пункта отличаются разве лишь капитальными затратами.

I. Предположим, что рассматриваемая задача линейного программирования приведена к каноническому виду: минимизация линейного функционала при ограничениях типа равенств и при условиях неотрицательности переменных. Множество M номеров

строк в матрице A системы уравнений этой задачи естественным образом распадается на подмножества

$$M_k=\{1,2,\ldots,m+n\}+(m+n)(k-1),\ k=1,2,\ldots,p,$$

$$M_{p+1}=\{1,\ldots,n\}+(m+n)p,$$

где M_k $(1\leq k\leq p)$ - множество номеров пунктов в k-й период, а M_{p+1} - множество номеров заданных объемов для расширения производства. Множества R и T номеров столбцов в матрице A распадаются на подмножества $R_k=\{1,2,\ldots,n\}+n(k-1)$ $(1\leq k\leq p+1)$ и T_k $(1\leq k\leq p)$ соответственно, где R_k $(1\leq k\leq p)$ - множество номеров столбцов, задающих способы расширения производства, начиная с k-го периода, R_{p+1} - номера способов сокращения заданных объемов для расширения, а T_k $(1\leq k\leq p)$ - множество номеров столбцов, задающих способы перевозки в k-м периоде.

Для каждого $k=1,2,\ldots,p$ выделим в множестве M_k подмножество S_k номеров пунктов производства (можно считать, что $S_k=\{m+1,m+2,\ldots,m+n\}+(m+n)(k-1)$). В этих обозначениях матрица A имеет следующую структуру (см., например, рис. I при $p=3$).

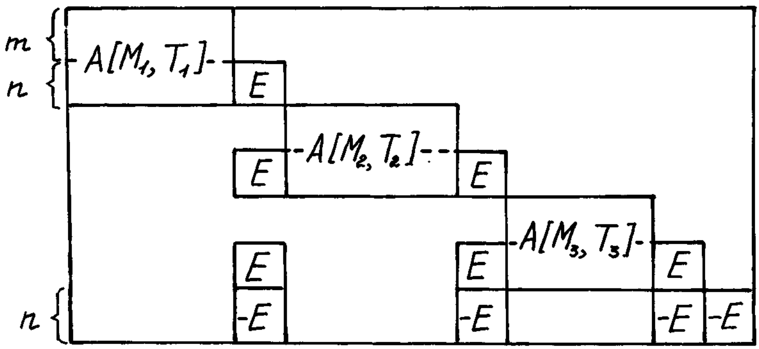

Рис. 1.

Для любого $k=1,2,\ldots,p$ в подматрице $A[M,T_k]$ блок $A[M_k,T_k]$ транспортного типа (т.е. каждый его столбец равен разности двух столбцов матрицы, составленной из единичной порядка $m+n$ и нулевого столбца размерности $m+n$), а остальные блоки нулевые:

$$A[M_t,T_k]=\mathbf{0}, \quad t=1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,p+1. \qquad (1)$$

Для любого $k=1,2,\dots,p+1$ в подматрицах $A[M,R_k]$ блоки $A[S_t,R_k]$ $(k\le t\le p)$ равны единичной матрице E порядка n, блок $A[M_{p+1},R_k]$ равен $-E$, а остальные блоки нулевые. Таким образом, для любого $k>1$ $(k\le p+1)$ имеем

$$A\Big[\bigcup_{k\le s\le p+1} M_s, R_t\Big]=A\Big[\bigcup_{k\le s\le p+1} M_s, R_k\Big], \quad t=1,2,\dots,k-1, \qquad (2)$$

$$A[M_t,R_k]=\mathbf{0}, \quad t=1,2,\dots,k-1. \qquad (3)$$

2. **Используя свойства (I)-(3) и "транспортность" блоков $A[M_k,T_k]$, $1\le k\le p$, можно доказать следующее утверждение.**

Если матрица $A[M,I]$ $(I\subset T\cup R)$ квадратная и неособенная, то перестановкой строк и столбцов ее можно привести к такому виду, что она отличается от нижней треугольной не более чем n диагоналями, расположенными над главной. Это равносильно тому, что любую систему с матрицей $A[M,I]$ можно решить, принимая одновременно не более n неизвестных в качестве параметров.

Действительно, пусть I_k $(1\le k\le p+1)$ - разбиение множества I, однозначно определяющее разложение

$$A[M,I]=B[M,I]\cdot\Lambda[I,I], \qquad (4)$$

в котором $B[M,I]$ - нижняя блочно-треугольная матрица с квадратными неособенными подматрицами $B[M_k,I_k]$ $(1\le k\le p+1)$ на диагонали, а $\Lambda[I,I]$ - верхняя треугольная матрица с единичными подматрицами $E[I_k,I_k]$ $(1\le k\le p+1)$ на диагонали. Из условия (I) и неособенности матрицы $A[M,I]$ следует, что для каждого $k=1,2,\dots,p$ в множестве $I\cap T_k$ не более $m+n$ элементов и столбцы $A[M_k,j]$, $j\in I\cap T_k$, линейно независимы. Поэтому можно считать, что

$$(I\cap T_k)\subset I_k, \quad k=1,2,\dots,p. \qquad (5)$$

Из условия (3) следует, что $(I_k\setminus T_k)\subset(\bigcup_{1\le t\le k} R_t)$ для любого $k=1,2,\dots,p$. Обозначим через R'_k при $k\ge 1$ $(k\le p)$ множество номеров $j\in(\bigcup_{1\le t\le k} R_t)\cap I$, не вошедших ни в одно из множеств I_t, $t=1,2,\dots,k$, т.е., полагая $R'_0=\varnothing$, имеем

$$R'_k = [R'_{k-1} \cup (R_k \cap I)] \setminus I_k, \quad k=1,2,\dots,p. \qquad (6)$$

Рассмотрим процесс последовательного построения разложения (4). Прежде всего заметим, что $B[M, I_1] = A[M, I_1]$, и матрица $B[M, I_1]$ - транспортного типа. Следовательно, перестановкой строк и столбцов её можно привести к треугольному виду [3]. Далее, число элементов в множестве $R_1 \cap I$, обозначаемое через $|R_1 \cap I|$, не более n (поскольку $|R_1| \le n$).

Вообще, для любого $t \ge 1$ $(t < k \le p+1)$ блок $B[M, I_t]$, отличается от $A[M, I_t]$ лишь столбцами с номерами $j \in I_t \cap R'_{t-1}$. Так как матрица $B[M_t, I_t \setminus R'_{t-1}]$ транспортного типа, то в ней можно выделить неособенную треугольную подматрицу $B[M'_t, I_t \setminus R'_{t-1}]$ порядка $|I_t \setminus R'_{t-1}|$. Тогда решение любой системы с матрицей $B[M_t, I_t]$ получается введением не более $|I_t \cap R'_{t-1}|$ параметров (рис. 2), которые вычисляются из "последних" $|M_t \setminus M'_t|$ уравнений. Далее, блок $B[M, I_t \setminus T_t]$ набирается из столбцов матрицы $A[M, R_t]$ и столбцов

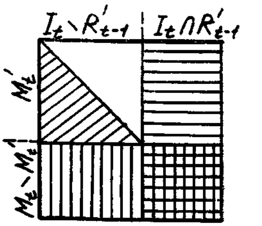

Рис. 2.

$$B_t[M, j] = A[M, R_t] \cdot x[R_t, j], \quad j \in R'_{t-1}, \qquad (7)$$

где $x[R_t, j]$ - некоторый столбец. В силу (7) и неособенности матрицы $B[M, I]$ в множестве $R'_{t-1} \cup (R_t \cap I)$ не более n элементов.

Для завершения доказательства достаточно показать, что число элементов в множестве $R'_{k-1} \cup (R_k \cap I)$ $(k > t \ge 1)$ не превосходит n. Для этого достаточно показать, что ранг матрицы, составленной из столбцов $A[M, j]$, $j \in R_k$, и столбцов

$$B_k[M, j] = A[M, j] - \sum_{1 \le t < k} B[M, I_t] \cdot \Lambda[I_t, j], \quad j \in R'_{k-1},$$

из которых набирается блок $B[M, I_k \setminus T_k]$, не превосходит n. В самом деле, $B_k[M_t, R'_{k-1}] = 0$ для $t = 1, 2, \dots, k-1$, поскольку столбец $\Lambda[I, j]$ является решением системы $B[M, I] \cdot \Lambda[I, j] = A[M, j]$, а по индуктивному предположению (7) столбцы $B[M, j]$, $j \in I_t \cap R'_{t-1}$ $(1 \le t < k)$, являются линейными ком-

бинациями столбцов матрицы $A[M, R_t]$. Отсюда и из (1)-(3) получаем, что столбцы $B_k[M, j]$, $j \in R'_{k-1}$, являются линейными комбинациями столбцов матрицы $A[M, R_k]$, следовательно, $|R'_{k-1} \cup (R_k \cap I)| \le n$.

3. В силу доказанного утверждения в матрице $\Lambda[I, I]$, не считая единиц на главной диагонали, отличны от нуля разве лишь блоки $\Lambda[I_k, R'_k]$ ($1 \le k \le p$). Следовательно, для каждого $k = 1, 2, \dots, p$ в блоках $\Lambda[I_k, R'_k]$ и $B[M_k, R'_{k-1} \cap I_k]$ в совокупности не более $(m+n) \cdot n$ элементов - это следует из определения (6) множеств R'_k ($1 \le k \le p$). В разложении (4) достаточно хранить лишь матрицу $\Lambda[I, I]$ и блоки $B[M_k, I_k]$ ($1 \le k \le p+1$) матрицы $B[M, I]$. Тогда решение любой системы с матрицей $A[M, I]$ сводится [4] к решению систем с матрицами $B[M_k, I_k]$ ($1 \le k \le p+1$) и $\Lambda[I, I]$ при использовании некоторой информации о самой матрице $A[M, I]$. Таким образом, число периодов p в оценку количества хранимой информации о разложении (4) входит линейно, и эта оценка равна $(m+n)np+n^2$. Хранение матрицы $A[M, I]$ в нашем случае такое же, как если бы она вся была транспортного типа.

При решении систем с матрицей $B[M_k, I_k]$ будем считать, что для каждого $k = 1, 2, \dots, p+1$ в её транспортной части $B[M_k, I_k \setminus R'_{k-1}]$ выделенная неособенная (треугольная) подматрица $B[M'_k, I_k \setminus R'_{k-1}]$ (см. рис.2) и матрица $B[M_k, I_k]$ представлена в виде произведения двух матриц:

$$B[M_k, I_k] =$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} B[M'_k, I_k \setminus R'_{k-1}] & 0 \\ \hline B[M_k \setminus M'_k, I_k \setminus R'_{k-1}] & V[M_k \setminus M'_k, I_k \cap R'_{k-1}] \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} E[I_k \setminus R'_{k-1}, I_k \setminus R'_{k-1}] & W[I_k \setminus R'_{k-1}, I_k \cap R'_{k-1}] \\ \hline 0 & E[I_k \cap R'_{k-1}, I_k \cap R'_{k-1}] \end{array}\right].$$

Вместо блока $B[M_k, I_k \cap R'_{k-1}]$ в этом случае удобно хранить матрицу $V^{-1}[I_k \cap R'_{k-1}, M_k \setminus M'_k]$ и блок $W[I_k \setminus R'_{k-1}, I_k \cap R'_{k-1}]$, который является решением системы

$$B[M'_k, I_k \setminus R'_{k-1}] \cdot W[I_k \setminus R'_{k-1}, I_k \cap R'_{k-1}] = B[M'_k, I_k \cap R'_{k-1}].$$

4. Прежде чем переходить к преобразованию матриц $B[M, I]$ и $\Lambda[I, I]$ в связи с заменой номера $j_0 \in I$ на $j' \in (T \cup R) \setminus I$,

рассмотрим вопрос о перестановке номеров $j_\alpha \in I_\alpha$ и $j_\omega \in I_\omega$ $(1 \le \alpha < \omega \le p+2)$ в множествах I_k $(1 \le k \le p+2)$, где $I_{p+2} = \{j'\}$.

Пусть $J = I \cup \{j'\}$ и матрица $A[M, J \setminus \{j_0\}]$ неособенная. Предположим, что в разложении $\Lambda[I, j_\omega]$ столбца $A[M, j_\omega]$ по базису $B[M, I]$ элемент $\Lambda[j_\alpha, j_\omega]$ отличен от нуля. По доказанному [4], существуют такие последовательности

$$\alpha = t_1 < t_2 < \ldots < t_r = \omega \quad (1 < r \le p+2), \tag{8}$$

$$j_s \in I_{t_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, r \quad (j_1 = j_\alpha, j_r = j_\omega), \tag{9}$$

что циклическая перестановка

$$\rightarrow j_1 \rightarrow j_2 \rightarrow \ldots \rightarrow j_{r-1} \rightarrow j_r \rightarrow \tag{10}$$

дает разбиение $\bar{I}_k$ $(1 \le k \le p+1)$ множества $J \setminus \bar{I}_{p+2}$, определяющее разложение

$$A[M, J \setminus \bar{I}_{p+2}] = \bar{B}[M, J \setminus \bar{I}_{p+2}] \cdot \bar{\Lambda}[J \setminus \bar{I}_{p+2}, J \setminus \bar{I}_{p+2}], \tag{11}$$

которое обладает теми же свойствами, что и разложение (4) по отношению к разбиению I_k $(1 \le k \le p+1)$. Переход от разложения (4) к (11) в связи с циклической перестановкой (10) проводится с помощью линейных преобразований [4], неособенность которых обеспечивается тем, что для любого $s = 1, 2, \ldots, r-1$ величины

$$\Delta^{\omega}_{t_s}(k) = 1 + v_k[I_k] \cdot \{\Lambda[I_k, j_\omega] - \Lambda[I_k, j_\alpha]\} \\ (k = t_s, t_s+1, \ldots, t_{s+1}-1) \tag{12}$$

отличны от нуля. Здесь строки $v_k[J]$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$v_{t_s}[J] = E[j_s, J] - E[j_\omega, J],$$

$$v_{k+1}[J] = \frac{1}{\Delta^{\omega}_{t_s}(k)} \{v_k[J] - v_k[I_k] \cdot \Lambda[I_k, J]\}, \\ t_s \le k < t_{s+1} \ (k \le p+1).$$

Поскольку $\Delta^{\omega}_{\alpha}(\alpha) = \Lambda[j_\alpha, j_\omega] \ne 0$, то в качестве t_1 можно выбрать номер α, а в качестве j_1 - номер j_α. Для остальных номеров $s > 1$ $(s < r)$ в качестве t_s выбирается наименьший из номеров $k > t_{s-1} \ge \alpha$, при котором $\Delta^{\omega}_{t_{s-1}}(k) = 0$,

а в качестве j_s в этом случае выбирается номер отличного от нуля элемента в столбце $\Lambda[I_{t_s}, j_\omega]$.

Если отказаться от требования (5), то, полагая $j_\alpha = j_0 \in I_{k_0}$ ($\alpha = k_0 \le p+1$) и выбирая в качестве $j_\omega \in I_\omega$ номер отличного от нуля (например, наибольшего по абсолютной величине) элемента строки $\Lambda[j_0, J] - E[j_0, J]$, через конечное число циклических перестановок (10) получаем разбиение J_k ($1 \le k \le p+2$) множества J, в котором $J_{p+2} = \{j_0\}$.

Если же требовать выполнения условия (5), то при замене номера $j_0 \in I$ номером $j' \in (T \cup R) \setminus I$ могут представиться два случая.

(а) Пусть $j' \in R_k$ ($1 \le k \le p+1$), $j_0 \in I_{k_0}$. Тогда при определении последовательностей (8), (9) достаточно выбирать в качестве j_s ($1 < s < r$) номер отличного от нуля элемента в столбце $\Lambda[I_{t_s} \cap R, j_\omega]$ (а не $\Lambda[I_{t_s}, j_\omega]$) при

$$\Delta^\omega_{t_{s-1}}(t_s) = 0, \ \Delta^\omega_{t_{s-1}}(k) \ne 0, \ k = t_{s-1}, t_{s-1}+1, \ldots, t_s - 1.$$

Такой элемент, очевидно существует, так как в противном случае (при $\Lambda[I_{t_s} \cap R, j_\omega] = 0$) из формулы (12) с заменой s на $s-1$ и из структуры строки $v_{t_s}[I_{t_s}]$, в которой $v_{t_s}[I_{t_s} \setminus R] = 0$, следовало бы, что $\Delta^\omega_{t_{s-1}}(t_s) = 1$, поскольку $\Lambda[I_k, j_{s-1}] = 0$ для $k > t_{s-1}$.

(б) Пусть $j' \in T_k$ ($1 \le k \le p$), $j_0 \in I_{k_0}$. Чтобы не нарушить требование (5), необходимо прежде всего номером j' заменить некоторый номер $j_\alpha \in I_k \cap (R \cup \{j_0\})$. Для этого достаточно положить $j_\omega = j' \in I_{p+2}$ и выбрать в качестве j_α номер отличного от нуля (например, наибольшего по абсолютной величине) элемента в столбце $\Lambda[I_k \cap (R \cup \{j_0\}), j']$. Такой элемент, очевидно, существует, так как в противном случае $\Lambda[I, j']$ является решением системы

$$A[M, I] \cdot \Lambda[I, j'] = A[M, j']$$

и $\Lambda[j_0, j'] = 0$, последнее же противоречит неособенности матрицы $A[M, J \setminus \{j_0\}]$. При построении (8), (9) в качестве j_s ($1 < s < r$) можно выбирать в этом случае номер отличного от нуля элемента в столбце $\Lambda[I_{t_s} \cap (R \cup \{j_0\}), j_\omega]$. После циклической перестановки (10) для номеров j_{r-1} и j_0 складывается ситуация случая (а).

В заключение заметим, что при циклической перестановке (IO) блоки транспортного типа могут измениться разве лишь в матрицах $B[M_k, I_k]$, $k = t_1, t_2, \ldots, t_r$ $(k \le p+1)$, причем эти изменения состоят в расширении или сужении транспортного блока на один столбец или в замене одного столбца. Выделение новой треугольной подматрицы в первых двух случаях сводится к соответствующим процедурам окаймления или усечения транспортного блока [5], а в последнем - к частичному переупорядочению строк и столбцов в этом блоке [3, 6]. Кроме того, заметим, что матрица $A[\tilde{M}_s, TUR]$ $(1 \le s \le \tilde{p})$, где

$$\tilde{M}_s = M_{2s-1} \cup M_{2s}, \; s = 1, 2, \ldots, \tilde{p} \; (\tilde{p} = [p/2] + 1, \; M_{p+2} = \phi), \qquad (I3)$$

транспортного типа: достаточно изменить знак на обратный у блоков $A[M_{2s}, TUR]$, $s = 1, 2, \ldots, [p/2]$. Поэтому разложение (4) можно строить, исходя из разбиения (I3) множества M. Это значительно повышает эффективность алгоритма [4], поскольку число иерархических ступеней в матрице A уменьшается.

Литература

I. МАКАРОВ В.Л. Динамическая транспортная задача. - В кн.: Математико-экономические проблемы (Труды межвузовской научной конференции "Применение математики и ЭВТ в экономике", январь 1964 г.), изд. ЛГУ, 1966, с. 191-193.

2. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О решении задач линейного программирования большого объема.-В кн.: Оптимальное планирование. Вып. 2, Новосибирск, 1964, с. 3-22.

3. БУЛАВСКИЙ В.А. Об одном алгоритме решения транспортной задачи. - В кн.: Оптимальное планирование. Вып. 2, Новосибирск, 1964, с. 41-49.

4. ЗВЯГИНА Р.А. Иерархическое упорядочение в линейном программировании. - В кн.: Оптимизация. Вып. 14(31), Новосибирск, 1974, с.28-54.

5. ЯКОВЛЕВА М.А. Транспортная задача с окаймлением. - В кн.: Оптимизация. Вып. 15(32), Новосибирск, 1974, с. 79-89.

6. БУЛАВСКИЙ В.А. О решении одной специальной транспортной задачи с дополнительными ограничениями. - В кн.: Оптимизация. Вып. I(18), Новосибирск, 1971, с. 7-21.

Поступила в ред.-изд. отд.
25. VI. 1974 г.