1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Выпуклый анализ

УДК 513.88

ВЫПУКЛОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНУСА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

С.С.Кутателадзе

Цель настоящей статьи – дать достаточно свободную качественную характеристику цикла исследований в области теории выпуклости в упорядоченных пространствах. Эту статью следует рассматривать как дополнение обзора [1].

Основным объектом исследования указанного цикла являются выпуклые элементы. Точнее, рассматривается полная решетка $\overline{Y}$, представляющая собой, как правило, пространство Канторовича Y с присоединенными наибольшим и наименьшим элементами, а в ней – подмножество H (как правило, конус), не содержащее элемента $\inf \overline{Y}$. Подмножество $\mathcal{U}$ множества H называется выпуклым относительно H (или H-выпуклым) – это записывается $\mathcal{U} \in \mathscr{H}(H, \overline{Y})$ – если $\mathcal{U}$ есть множество опорных $\mathcal{U}_p^H = \{h \in H : h \leq p\}$ для некоторого элемента p из $\overline{Y}$.

Вместе с выпуклыми множествами рассматриваются выпуклые элементы, т.е. элементы $p \in \overline{Y}$, допускающие представление $p = \sup \mathcal{U}_p^H$ в виде супремума опорного множества. Такие элементы заполняют конус, обозначаемый $P(H, \overline{Y})$. Существенно, что выпуклые элементы и выпуклые множества "склеиваются" двойственностью Минковского $\varphi : p \mapsto \mathcal{U}_p^H$. Эта функция позволяет вести одновременное исследование как выпуклых элементов, так и выпуклых множеств.

Хорошо известно (собственно, в этом состоят классические результаты Фенхеля и Хермандера), что важнейшие классы выпуклых функций и множеств суть $P(A(V), \overline{R}^V)$ и $\mathscr{H}(V', \overline{R}^{V})$. Здесь V – локально выпуклое пространство, V' – сопряженное пространство, а $A(V)$ - пространство аффинных на V функций (изоморфное $V' \times R$).

В первом случае при этом двойственность Минковского есть отображение $f \mapsto epi(f^*)$, где

$$f^*(y) = \sup_{x \in V} (\langle y, x \rangle - f(x))$$

- сопряженная функция в смысле теории Фенхеля-Моро. Во втором случае удобнее записать обратное к двойственности Минковского отображение, переводящее элемент $\mathcal{U}$ из $\mathcal{H}(V', \bar{R}^V)$ в стандартную опорную (калибровочную) функцию

$$\varphi^{-1}(\mathcal{U}) : x \mapsto \sup_{y \in \mathcal{U}} \langle y, x \rangle.$$

Здесь, разумеется, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - естественная двойственность V' и V.

Существенно, что по тому же принципу - по принципу H-выпуклости - устроены многие другие объекты анализа и геометрии. Среди них так называемые экономические множества (множества с паретовской границей), емкости, монотонные полунормы, различные классы функций и множеств, выпуклых в том или ином обобщенном смысле - по Буземану, Фаню и т.д.; пришедшая из теории функций выпуклость Линделефа и Фрагмена, возникающая в теории Шоке выпуклость Бауэра, Бобока и Корнеа и т.д. Любопытно, что существуют целые упорядоченные пространства, составленные из элементов, выпуклых относительно узкого конечного конуса.

Для того, чтобы решать задачи, в которых возникают выпуклые элементы и множества, с помощью методов функционального анализа, необходимо в известном смысле "линеаризовать" классы $P(H,\bar{Y})$ и $\mathcal{H}(H,\bar{Y})$, т.е. получить способы задания элементов этих классов на языке линейного анализа - в терминах функционалов и операторов. Иными словами, мы приходим к задаче изучения отношений порядка типа

$$\mu(f) \geq \nu(f) \qquad \forall f \in P$$

над положительными функционалами или операторами. Такие упорядоченности (точнее, предпорядки) называются упорядоченностями Шоке.

Таким образом, речь, в частности, идет об описании конуса P^*, двойственного к конусу выпуклых элементов. Нужно сказать, что эта задача носит нетривиальный характер в связи с тем, что даже в стандартных ситуациях конус P (и $\mathcal{H}$) устроен достаточно сложно. Например, если рассмотреть факторизованный по сдвигам конус n-мерных выпуклых поверхностей при $n \geqslant 3$, то любое его компактное (в топологии Хаусдорфа) основание совпадает со своей границей Шилова (этот факт - первопричина метода исчерпывания Архимеда). Иначе говоря, структура крайних лучей этого конуса весьма сложна.

В то же время существует значительное число задач, решение которых упирается в характер информации об упорядоченности Шоке.

Эти обстоятельства и определяют, собственно, замысел указанного цикла работ. В нем получаются достаточно общие результаты об устройстве указанных отношений порядка, т.е. теоремы о двойственном задании выпуклых элементов, и показывается, как такие теоремы работают в тех разделах анализа и геометрии, где используются нужные классы выпуклых элементов и множеств. В основном рассматриваются два круга приложений. Первый ориентирован на теорию выпуклых множеств, точнее, на интегральные характеристики классов поверхностей, а второй - на теорию аппроксимации, точнее, на ту ее часть, которая связана с теорией Шоке.

Исследование упорядоченности Шоке основывается на двух центральных результатах. Первый из них называется теоремой декомпозиции и показывает, как связаны упорядоченности, наведенные H и конусом H-выпуклых элементов. Второй результат называется принципом сохранения неравенств и характеризует выпуклость через росток тождественного оператора. Напомним, что для пространства Крейна X и пространства Канторовича Y через $\mathcal{L}^+(X,Y)$ обозначается множество положительных линейных операторов из X в Y. Для оператора $T \in \mathcal{L}^+(X,Y)$ и конуса H в X полагают

$$Spr(T,H) = \{T' \in \mathcal{L}^+(X,Y) : T'h \geqslant Th \ (h \in H)\}.$$

Это множество и называется положительным ростком оператора T на конусе H.

Пусть теперь X - локально выпуклая решетка Канторовича, $H_1,\dots,H_n$ - замкнутые конусы в X и $f,g \in \mathcal{L}^+(X,R)$. Теорема декомпозиции утверждает:

$$f(h_1 \vee \ldots \vee h_n) \geq g(h_1 \vee \ldots \vee h_n)\ (h_k \in H_k) \Longleftrightarrow \forall \hat{g}\ \exists \hat{f} : \hat{f} \in_r Spr(\hat{g}, H_1 \times \ldots \times H_n).$$

Здесь $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{L}^+(X^n, R)$ - разбиения f и g, т.е. функционалы, превращающие в коммутативные треугольники, составленные из f, g и диагонального вложения $\Delta : X \to X^n$, $\Delta : x \mapsto (x, \ldots, x)$. Точнее,

$$\hat{f}\Delta = f, \quad \hat{g}\Delta = g.$$

В частности, когда правая часть имеет место при всех n для одинаковых конусов, пишут $f \underset{H}{\gg} g$ и говорят, что f H-сильнее g. Таким образом, замкнутые конусы обладают свойством Решетняка-Люмиса.

Можно сказать, что понятие декомпозиции складывалось постепенно. Для поверхностей отношение $\underset{H}{\gg}$ было введено Решетняком, для выпуклых функций - Люмисом. Отдельные задачи декомпозиции рассматривались Бишопом, де Лю, Картье, Феллом, Мейе, Динджесом и др. В приведенном виде теорема носит окончательный характер и является более точной даже в классических ситуациях.

Существенно, что если H - конечный конус и f, g - конечные суммы дискретных элементов (например, меры Радона с конечными носителями), то проверка $f \underset{H}{\gg} g$ сводится, по сути дела, к задаче линейного программирования, т.е. счет можно провести до конца. Подобные ситуации бывают достаточно часто. Особенно они типичны в теории выпуклых поверхностей.

Второе центральное соображение - принцип сохранения неравенств, т.е. такое утверждение

$$x \in P(H, \bar{V}) \cap X \Longleftrightarrow \forall T \in_r Spr(E, H)\ \ Tx \geq x.$$

Для мер подобное свойство изучалось Кейдисоном, Бауэром, Бобоком, Корнеа, Карлиным и др.

В теории выпуклости существуют и другие способы задания элементов, занимающие промежуточное положение между декомпозицией и сохранением неравенств. Особенно важными в случае пространств непрерывных функций являются распространение мер, слабая выпуклость и выпуклость Бобока-Корнеа, подробно рассмотренные в указанном цикле работ.

Говорят, что меры Радона $\mu, \nu \in C'(Q)$ находятся в отношении H-распространения $\mu \underset{H}{\Rightarrow} \nu$, если найдется слабо измеримая функция $x \mapsto T_x$ такая, что

$$T_x \in Spr(\varepsilon_x, H) \qquad (\varepsilon_x : f \to f(x));$$

$$\mu(f) = \int_Q T_x(f)\,d\nu \qquad (f \in C(Q)).$$

Конус H в $C(Q)$ обладает своиством Харди-Литтлвуда-Полиа, если

$$\mu \underset{H}{\supset} \nu \Longleftrightarrow \mu \underset{H}{\gg} \nu.$$

Такие конусы описаны полностью (в случае метризуемого Q). Именно свойство Харди-Литтлвуда-Полиа эквивалентно коинициальности пространству $C(Q)$.

Выяснены также связи с выпуклостью Бобока-Корнеа и со слабой выпуклостью. Для коинициального конуса H выпуклость в смысле Бобока-Корнеа и принадлежность $P(H, \bar{R}^Q) \cap C(Q)$ - одно и то же. Различие между слабой выпуклостью (т.е. выпуклостью, определяемой переносом дискретных неравенств типа Иенсена) и H-выпуклостью не существенно с точностью до топологии простой сходимости.

Как уже отмечалось, последние типы выпуклости особенно естественны в теории выпуклых множеств. Прежде всего, это относится к задачам о представлении неравенств над поверхностями и к двойственным характеристикам классов множеств, замкнутых относительно решеточных операций.

В частности, $V(x_1,\dots,x_{n-1},z) \geq V(y_1,\dots,y_{n-1},z)$ для всякой поверхности z в плоскости H в R^n в том и только в том случае, если $\mu(x_1,\dots,x_{n-1}) \underset{H}{\gg} \mu(y_1,\dots,y_{n-1})$, где V, μ - соответственно, смешанный объем и смешанная поверхностная функция, а H рассматривается как подмножество $(R^n)'$.

По схеме "полигональности", использованной в теореме декомпозиции, построены разнообразные классы множеств. Например, если $H_1 = \{0\}$; H_2, H_3 - координатные лучи плоскости, то $h_1 \vee h_2 \vee h_3$, где $\vee$ - супремум при вложении плоскости в R^{R^2}, отождествляется с треугольником с вершиной в нуле. Таким же способом строятся конические пирамиды, полиэдроны и т.д. Интегральные характеристики таких классов получаются за счет биполярного тождества

$$S \in \overline{P(H)} \Longleftrightarrow \mu(S) \geq 0 \qquad (\forall \mu \in (P(H))^*)$$

и декомпозиционных признаков для $(P(H))^*$.

В качестве иллюстрации характера результатов приведем описание пинскеровской оболочки $\mathcal{T}(S_1, S_2)$ шаров Минковского S_1 S_2, т.е. наименьшего замкнутого конуса, содержащего S_1 и S_2 и замкнутого относительно операции взятия выпуклой оболочки объединения. Именно,

$$S \in \mathcal{T}(S_1, S_2) \Longleftrightarrow \forall_{x_1,\dots,x_p \in R^n} \frac{S}{\sum\limits_{k=1}^{p} S(x_k)} \leqslant \frac{S_1}{\sum\limits_{k=1}^{p} S_1(x_k)} \vee \frac{S_2}{\sum\limits_{k=1}^{p} S_2(x_k)}.$$

Последнее соотношение содержит на самом деле представление элементов $\mathcal{T}(S_1, S_2)$:

$$S \in \mathcal{T}(S_1, S_2) \Longleftrightarrow S = \bigwedge_{(x_1,\dots,x_p)} \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S^\circ} \left[\frac{S_1}{\sum\limits_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_1^\circ}} \vee \frac{S_2}{\sum\limits_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_2^\circ}} \right],$$

где S° - поляра S.

Ясно, что теоремы о двойственных конусах к конусам выпуклых множеств находят естественные приложения при исследовании экстремальных задач теории поверхностей. Некоторые новые задачи такого типа рассмотрены в цикле работ.

Хорошо известно, что анализ экстремальных задач вообще, и геометрических задач изопериметрического типа, в частности, существенно связан с выбором параметризации-векторного пространства, в которое погружаются исходные задачи. Такой выбор во многом определяет как класс поддающихся решению задач, так и качество критериев оптимальности - уравнений Эйлера-Лагранжа. Для выпуклых поверхностей наиболее естественными параметризациями являются структура Минковского, порожденная двойственностью Минковского (грубо говоря, структура пространства непрерывных функций) и структура Бляшке, порожденная отождествлением поверхности и ее поверхностной функции (т.е. грубо говоря, структура пространства мер).

В основном рассматриваются два типа экстремальных задач - задачи с ограничениями операторного типа в структуре Минковского (ранее в этом плане рассматривался только дискретный случай - случай многогранников) и задачи программирования в структуре Бляшке. Идея последнего метода возникла еще в начале века, однако ее техническое оформление стало возможным совсем недавно.

Итак, пусть $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}(R^n, \bar{R}^{\mathcal{Z}_n}) \cap C(\mathcal{Z}_n)$, где $\mathcal{Z}_n$ - единичная сфера, $\tilde{\mathcal{H}}_n = \mathcal{H}_n / R^n$ и $\mathfrak{A}_n$ - конус поверхностных функций.

Структура Минковского наводится пространством $C(\mathcal{Z}_n)/R^n$, а структура Бляшке - сопряженным $(C(\mathcal{Z}_n)/R^n)' \simeq \mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_n$.

Важнейшие соотношения видны из таблицы.

	Структура Минковского	Структура Бляшке
конус множеств	$\tilde{\mathcal{H}}_n$	$\mathfrak{A}_n$
двойственный конус	$\tilde{\mathcal{H}}^*$	$\mathfrak{A}_n^*$
положительный конус	$\mathfrak{A}_n^*$	$\mathfrak{A}_n$
типичный функционал	$V_1(\mathfrak{z}_n, \cdot)$ -ширина	$V_1(\cdot, \mathfrak{z}_n)$-площадь
вогнутый функционал	$V^{1/n}(\cdot)$	$V^{n-1/n}(\cdot)$
простейшая вогнутая программа	задача Урысона	изопериметрическая задача
ограничение операторного типа	$\mathfrak{x} \subset \mathfrak{x}_0$	$\mu(\mathfrak{x}) \leq \mu(\mathfrak{x}_0)$
цена	поверхность	положительная функция
дифференциал объёма в точке $\bar{\mathfrak{x}}$ ~	$f \mapsto \int_{\mathcal{Z}_n} f \, d\bar{\mathfrak{x}}$	$f^* \mapsto \int_{\mathcal{Z}_n} \bar{\mathfrak{x}} \, df^*$

Существенная особенность структуры Бляшке заключается в том, что в ней уже объем однородным полиномом (при $n \geq 3$) не является. Для получения уравнений Эйлера-Лагранжа в структуре Бляшке необходимо было описать субдифференциал объема. После получения двойственной формулы выписывание критериев оптимальности превращается в рутинную процедуру вариационного исчисления.

В качестве примера уравнений Эйлера-Лагранжа приведем один плоский результат (дело в том, что при $n = 2$ структуры Бляшке и Минковского изоморфны). Именно, для внутренней изопериметрической задачи в классе центрально-симметричных фигур допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением в том и только в том случае, если найдутся x и $\bar{\alpha}$ такие, что

$$\bar{\mathfrak{x}} = x^s + \bar{\alpha}\, \mathfrak{z}_2 \; ;$$

$$\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \qquad (z \in s(\mathfrak{x})).$$

Здесь $\varkappa^s$ - симметризация Минковского $\varkappa$ и $s(\varkappa)$ - носитель поверхностной функции $\varkappa$.

Существенно, что если ограничения $V_1(y_k, x) \le b_k \ (k=1,\dots,m)$ наложены на произвольные смешанные площади, то в первом уравнении добавится лишь сумма $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k$. Ясно, что в ряде случаев найти критическую фигуру несложно.

Приложения, основанные на сохранении неравенств, связаны главным образом, с задачами аппроксимации. Поясним суть дела. Пусть H - коинициальный конус в подпространстве X пространства Канторовича Y . Тогда равносильны следующие утверждения:

$$(1) \qquad x_, - x \in P(H, \bar{Y});$$

$$(2) \quad (T_n) \subset \mathcal{L}^+(X,Y),\ \varliminf_n T_n h \geq h\ (h \in H) \Rightarrow T_n x \xrightarrow{(o)} x;$$

$$(3) \qquad Tx = x \qquad (T \in Spr(E, H)).$$

Таким образом, H - аффинные элементы определяются тем свойством, что на них сохраняют сходимость процессы аппроксимации, хорошо устроенные на H .

В связи с этим обстоятельством естественно применить выпуклость к известной задаче о пробных функциях. Именно, если есть класс операторов G и оператор $T \in G$, то говорят, что множество H в X есть множество пробных функций (для оператора T в классе G), если всякая последовательность (или сеть) операторов из G , аппроксимирующая T (в смысле той или иной сходимости) на H , аппроксимирует (в том же смысле) T на всем пространстве X .

В литературе имеется большое число достаточных признаков пробных функций в основном для тождественного оператора в классе положительных операторов (дело при этом, как правило, ограничивается пространствами непрерывных и измеримых функций). В общей ситуации - произвольные положительные операторы, нерастягивающие операторы и т.д. - окончательных результатов почти не было. Между тем именно эти случаи представляют особенный интерес с точки зрения теории Шоке и геометрии банаховых сфер.

Дальнейшие результаты (в связи со сложившейся в литературе традицией) относятся к случаю, когда эффекты типа (*) имеют место во всем пространстве. В этой ситуации (т.е. $P(H,\overline{Y})\supset X$) говорят, что H является супремальным генератором X относительно пространства Канторовича Y. Оказывается, что конечные генераторы бывают лишь в решетках ограниченных элементов (реализуемых, как правило, как плотные подрешетки в $C(Q)$). Особенное внимание поэтому уделено конечным генераторам $C(Q)$ относительно пространства $B(Q)$ ограниченных на Q функций.

Такие конусы характеризуются тем свойством, что их граница Шоке совпадает со всем компактом. Существенно, что при генерировании $C(Q)$ относительно $B(Q)$ речь может идти не только о слабой, но и сильной операторной топологии. В описанных ситуациях оказывается возможным подсчитать размерность минимального генератора. Именно, наименьшее число функций, обладающих тем свойством, что натянутый на -1 и эти функции конус генерирует $C(Q)$ в точности на единицу превышает размерность наименьшего числового пространства, в которое Q топологически вкладывается.

Можно отметить, что переход от подпространств к конусам существенен не только тем, что уменьшается число проверок, необходимых для установления сходимости, но и тем, что характеристики типа приведенной, которые ранее строились по подпространствам, не отличают куба от сферы.

Конечные генераторы находят приложение не только в задачах, связанных со сходимостью. В частности, получено использующее генераторы обобщение метода квазилинеаризации уравнений Беллмана и Калабы.

Дальнейшие результаты связаны с общей задачей о сходимости к максимальному оператору. В этом направлении в теории аппроксимации имелись лишь отдельные продвижения, связанные с работами Красносельского и др.

Напомним, что оператор $T\in\mathcal{L}^+(X,Y)$ называется максимальным относительно H, если $Spr(T,H)=\{T\}$.

Оказывается, что для коинициального конуса

$$(T\text{ - максимален})\Longleftrightarrow(Tx=\sup TU_x^H\ \ (x\in X)).$$

В этой ситуации говорят, что H генерирует X относительно T (типичный пример на эту теорему - теорема Келдыша о задаче Дирихле).

Последний факт естественно применяется и для исследования операторов $T: V \to Y$, где V - нормированное пространство, Y - пространство Канторовича, для которых определена абстрактная норма

$$|T| = \sup_{\|x\| \le 1} |Tx|.$$

Редукция к положительному случаю проводится с помощью порядковой надстройки. Так называется пространство $V \times R$, упорядоченное телесным конусом - надграфиком нормы в V. Справедлива, например, следующая теорема. Имеют место эквивалентности:

(1) $H \times (-R_+)$ - генератор надстройки V относительно

$\Updownarrow$ оператора $(T, |T|): (x,t) \to Tx + t|T|$;

(2) $Tx = \sup_{h \in H} (Th - |T| \|x - h\|) \quad (x \in V)$;

$\Updownarrow$

(3) $\overline{\lim_n} |T_n| \le |T|, \ \underline{\lim_n} T_n h \ge Th \ (h \in H) \Rightarrow T_n x \xrightarrow{(o)} Tx \quad (x \in X)$;

$\Updownarrow$

(4) $(T'h \ge Th \quad (h \in H); \ |T'| \le |T|) \Rightarrow T' = T$.

Эквивалентность $(3) \Longleftrightarrow (4)$ можно рассматривать как обобщение теоремы Шмульяна о дифференцируемости нормы.

Разумеется, что приведенная теорема справедлива и в предельно общих ситуациях, то есть в случае, когда нормирование векторного пространства V производится с помощью произвольной решетки Канторовича (а не обязательно при помощи решетки вещественных чисел).

Из теорем указанного типа можно получить ряд результатов о строении сфер.

В ряде случаев желательно говорить не об абстрактной, а об обычной норме операторов. Этот вопрос также исследован. Оказалось, что дело обстоит так, что в общем случае говорить об обычной норме нельзя, за исключением операторов со значениями в пространствах Канторовича с сильной единицей (например, в L^∞). В известном смысле ("с точностью до ε") исключение составляют и компактные операторы со значениями в $C(Q)$. К сожалению, для исследования последнего случая приходится использовать не совсем естественную в данной ситуации технику непрерывных селекторов Майкла.

В заключение можно сделать следующий вывод. Приведенные результаты, основанные на единой концепции, свидетельствуют о целесообразности развития теории выпуклости на основе упорядоченных пространств.

Литература

I. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и её приложения. - "Успехи мат. наук", т. 27, № 3, 1972, с. 127-176.

Поступила в ред.-изд. отд.
26. X. 1973 г.