1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 15(32)
Смежные математические вопросы

УДК 513.88

# О ГРАНИЦЕ ШОКЕ ДЛЯ НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

В.Н.Дятлов, С.С.Кутателадзе

Хорошо известно, что существуют конусы, значениями на которых операторы однозначно восстанавливаются как в классе положительных операторов, так и в классе операторов с абстрактной нормой [1]. Такие операторы во многом аналогичны максимальным операторам, и, следовательно, их "носители" должны быть связаны с фиксированной границей типа границы Шоке для операторов [2]. Цель настоящей заметки - описать такую компоненту для нерастягивающих операторов, действующих из $K$-линеалов ограниченных элементов.

1. Пусть $X$ - некоторый $K$-линеал ограниченных элементов, $Y$ - некоторое $K$-пространство и $T$ - регулярный оператор $T: X \to Y$ *). Заметим, что в рассматриваемом случае класс $H_r(X,Y)$ регулярных операторов из $X$ в $Y$ совпадает с классом операторов из $X$ в $Y$, имеющих абстрактную норму [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Абстрактным ростком оператора $T$ на конусе $H$ в $X$ называется множество

$$_a Spr(T,H) = \{T' : X \to Y \mid T'h \geq Th \ (h \in H), |T'| \leq |T|\}.$$

Оператор $T$ называется $_a H$ -максимальным, если $_a Spr(T,H) = \{T\}$.

Известно [1], что оператор $T$ является $_a H$ -максимальным в том и только в том случае, если $_a Spr(T,H) = \{T\}$.

*) Все используемые понятия из теории полуупорядоченных пространств можно найти в [3], [4].

Поскольку положительные максимальные операторы исследованы более полно, естественно связать с $T \in H_r(X,Y)$ некоторый положительный оператор так, чтобы наследовалось свойство максимальности.

Пусть $(T_+, T_-)$-оператор из $X \times X$ в $Y$, действующий по формуле

$$(T_+, T_-) : (x,y) \mapsto T_+ x + T_- y.$$

Заметим, что оператор $(T_+, T_-)$ положителен.

Определим далее для конуса $H$ в $X$ конус ${}^aH$ соотношением

$${}^aH = \{(h - \alpha \mathbb{1}, -h - \alpha \mathbb{1}) \in X \times X : h \in H, \alpha \geq 0\},$$

где $\mathbb{1}$ - (сильная) единица в $X$.

Напомним, что линейный положительный оператор $U : X \to Y$ максимален относительно конуса $H$ ($H$-максимален), если

$$Spr(U,H) = \{V : X \to Y \mid Uh \leq Vh, h \in H\} = \{U\}.$$

ТЕОРЕМА I. Оператор $T \in H_r(X,Y)$ является ${}_aH$-максимальным в том и только том случае, если оператор $(T_+, T_-)$ максимален относительно конуса ${}^aH$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Longrightarrow$ Пусть $A : X \times X \to Y$ входит в $Spr((T_+,T_-), {}^aH)$, то есть $A \geq 0$ и, кроме того, $Az \geq (T_+,T_-)z$ для всех $z \in {}^aH$. Подробнее, последнее неравенство означает, что

$$A((h - \alpha \mathbb{1}, -h - \alpha \mathbb{1})) \geq T_+(h - \alpha \mathbb{1}) + T_-(-h - \alpha \mathbb{1}) \quad (h \in H, \alpha \in R^+). \quad (*)$$

Определим на $X$ операторы $T_1, T_2$ соотношениями $T_1 : x \mapsto A(x,0)$, $T_2 : x \mapsto A(0,x)$. Ясно, что $T_1, T_2 \geq 0$. Рассмотрим регулярный оператор $T' = T_1 - T_2$ и покажем, что при высказанных предположениях $T' \in {}_aSpr(T,H)$. Имеем прежде всего

$$T'h = (T_1 - T_2)h = T_1 h + T_2(-h) = A(h,0) + A(0,-h) = A(h,-h).$$

Полагая в неравенстве ( * ) $\alpha = 0$, получаем

$$A(h,-h) \geq T_+ h + T_-(-h) = T_+ h - T_- h = Th,$$

откуда $T'h \geq Th$ ( $h \in H$ ). Кроме того,

$$|T'| = |T_1 - T_2| \le |T_1| + |T_2| = T_1(\mathbb{1}) + T_2(\mathbb{1}) = A(\mathbb{1},\mathbb{1})$$

и, рассмотрев в ( ж ) элементы с $h = 0$, получаем

$$A(\mathbb{1},\mathbb{1}) = -A(-\mathbb{1},-\mathbb{1}) \le -(T_+(-\mathbb{1}) + T_-(-\mathbb{1})) = T_+(\mathbb{1}) + T_-(\mathbb{1}) = |T|,$$

то есть $|T'| \le |T|$.

Таким образом, $T' \in_a Spr\,(T,H)$ и $T' = T$, откуда $T_1 \ge T_+$, $T_2 \ge T_-$. Из неравенства

$$0 \le (T_1 - T_+)\mathbb{1} + (T_2 - T_-)\mathbb{1} = (T_1 + T_2)\mathbb{1} - |T|\mathbb{1} \le 0$$

получаем $T_1 = T_+$, $T_2 = T_-$. Таким образом,

$$A(x,y) = A(x,0) + A(0,y) = T_+x + T_-y = (T_+,T_-)(x,y),$$

и, следовательно, оператор $(T_+,T_-)$ является ${}^aH$ -максимальным.

$\Longleftarrow$ Пусть $T' \in_a Spr\,(T,H)$. Рассмотрим оператор $(T'_+,T'_-)$ и проверим, что $(T'_+,T'_-) \in Spr((T_+,T_-),{}^aH)$. Действительно, для $h \in H$ имеем

$$(T'_+,T'_-)(h,-h) = T'h \ge Th = (T_+,T_-)(h,-h)$$

и, кроме того,

$$|T'| = (T'_+,T'_-)(\mathbb{1},\mathbb{1}) \le |T| = (T_+,T_-)(\mathbb{1},\mathbb{1}).$$

Следовательно, $T'_+ = T_+$ и $T'_- = T_-$. Значит, $T' = T$. Теорема доказана полностью.

II. Как обычно в теории Шоке, рассмотрим $K$-пространство $\mathcal{Z}_0$, содержащее $X \times X$, и положительный оператор $S$ из $\mathcal{Z}_0$ в $Y$. Имеем схему

$$\begin{tikzcd}
{}^aH \subset X \times X \arrow[rr, "o"] \arrow[dr, "S_0"'] & & \mathcal{Z}_0 \arrow[dl, "S"] \\
& Y &
\end{tikzcd},$$

где $(o)$ – тождественное (положительное) вложение и диаграмма, естественно, коммутативна.

Как известно [2], существует наибольший (в булевой алгебре проекторов $\mathcal{Z}_0$) проектор $P_{ch}({}^aH, X \times X, \mathcal{Z}_0)$ в множестве проекторов $P$, сужение $P_0$ которых ${}^aH$ -максимально. При этом компонента существенной положительности любого положительного вполне линейного оператора $S$ такого, что его сужение на

$X\times X$ максимально относительно ${}^aH$, содержится в компоненте $Ch({}^aH, X\times X, \mathcal{Z}_0)$. Займёмся детализацией этого утверждения в случае, когда $X$ вложено в $K$-пространство $\mathcal{Z}$ и роль $\mathcal{Z}_0$ играет пространство $\mathcal{Z}\times\mathcal{Z}$. Эта ситуация обладает некоторой спецификой, которую отражает

ТЕОРЕМА 2. Пусть $S_1$, $S_2$ – положительные операторы из $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{Z}$. Пусть, далее,

$$<S_1, S_2>: (z_1, z_2) \longmapsto (S_1 z_1, S_2 z_2) \quad ((z_1, z_2)\in \mathcal{Z}\times\mathcal{Z}).$$

Если $<S_1, S_2>$ является ${}^aH$-максимальным, тогда

$$S_1 x = \sup_{h\in H}(S_1 h - |S_1|\cdot\|x-h\|), S_2 x = \sup_{h\in H}(-S_2 h - |S_2|\cdot\|x+h\|)$$
$$(x\in X),$$

то есть $S_1$ является ${}_aH$-максимальным оператором, а $S_2$ – ${}_a(-H)$-максимальным оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу ${}^aH$-максимальности $<S_1,S_2>$, для $(x,-x)\in X\times X$ имеем

$$<S_1,S_2>(x,-x) = \sup_{\substack{(h',h'')\in {}^aH\\ (h',h'')\leq(x,-x)}} <S_1, S_2> (h', h'') =$$

$$= \Big(\sup_{\substack{\alpha\geq 0, h\in H\\ h-\alpha 1\leq x\\ -h-\alpha 1\leq -x}}(S_1 h - \alpha |S_1|), \quad \sup_{\substack{\alpha\geq 0, h\in H\\ h-\alpha 1\leq x\\ -h-\alpha 1\leq -x}}(-S_2 h - \alpha |S_2|)\Big).$$

Так как неравенства $h-\alpha 1\leq x$, $-h-\alpha 1\leq -x$ $(h\in H, \alpha\geq 0)$ равносильны неравенству $\|x-h\|\leq\alpha$, последнее равенство можно продолжить:

$$<S_1, S_2>(x,-x) = \Big(\sup_{\substack{\alpha\geq 0, h\in H\\ \|x-h\|\leq\alpha}}(S_1 h - \alpha|S_1|), \sup_{\substack{\alpha\geq 0, h\in H\\ \|x-h\|\leq\alpha}}(-S_2 h - \alpha|S_2|)\Big).$$

Поскольку абстрактная норма оператора неотрицательна, замена $\alpha$ меньшим числом не уменьшает границы, поэтому

$$<S_1,S_2>(x,-x)\leq \Big(\sup_{h\in H}(S_1 h - \|x-h\||S_1|), \sup_{h\in H}(-S_2 h - \|x-h\||S_2|)\Big).$$

Так как $S_1(h-x)\le |S_1(x-h)|\le \|S_1\|\|x-h\|$, то $S_1(h-x)-$
$-\|x-h\|\cdot\|S_1\|\le 0$ или $S_1h-\|x-h\|\cdot\|S_1\|\le S_1x$, следовательно,

$$\sup_{h\in H}(S_1h-\|x-h\|\cdot\|S_1\|)\le S_1x.$$

Рассуждая аналогично для $S_2$, получим

$$(S_1x, S_2(-x))\le(\sup_{h\in H}(S_1h-\|x-h\|\cdot\|S_1\|), \sup_{h\in H}(-S_2h-\|x-h\|\cdot\|S_2\|))\le(S_1x, S_2(-x)).$$

Поскольку последнее равенство верно для всех $x\in X$, то

$$(S_1(-x), S_2x)\le(\sup_{h\in H}(S_1h-\|x+h\|\cdot\|S_1\|), \sup_{h\in H}(-S_2h-\|x+h\|\cdot\|S_2\|))\le(S_1(-x), S_2x),$$

что и требовалось.

Рассмотрим проектор Шоке $P_{ch}({}^aH, X\times X, \mathcal{Z}\times\mathcal{Z})$ и заметим, что оператор $(x,0)\mapsto P_{ch}(x,0)$ действует в $\mathcal{Z}\times\{0\}$, а оператор $(0,x)\mapsto P_{ch}(0,x)$ – в $\{0\}\times\mathcal{Z}$. Пусть теперь оператор $P^1_{ch}:\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$ таков, что $(P^1_{ch}z, 0)=P_{ch}(z,0)$ и $P^2_{ch}:\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$ таков, что $(0, P^2_{ch}z)=P_{ch}(0,z)$. Ясно, что $P^1_{ch}$ и $P^2_{ch}$ – проекторы в $\mathcal{Z}$, причём $P_{ch}=\langle P^1_{ch}, P^2_{ch}\rangle$.

Как обычно, условимся называть оператор $S:\mathcal{Z}\to Y$ $aH$-надмаксимальным, если сужение $S_0$ оператора $S$ на $X$ является ${}_aH$-максимальным.

ТЕОРЕМА 3. Проектор $P^1_{ch}$ является наибольшим ${}_aH$-надмаксимальным проектором, а проектор $P^2_{ch}$ – наибольшим ${}_a(-H)$-надмаксимальным проектором (в булевой алгебре проекторов $\mathcal{Z}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведём только для проектора $P^1_{ch}$. В силу теоремы 2, $(P^1_{ch})_0$ является ${}_aH$-максимальным. Пусть теперь $P:\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$ – произвольный проектор, у которого сужение $P_0$ ${}_aH$-максимально. По теореме I, оператор $(P_0, 0):(X, X)\to\mathcal{Z}$, действующий по формуле $(P_0,0)(z_1,z_2)=P_0z_1$ ($z_1, z_2\in X$), является ${}^aH$-максимальным. Пусть, далее, $i:\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}\times\mathcal{Z}$ – вложение в первую координату, то есть $i: z\mapsto(z,0)$. Заметим, что оператор $i$ сохраняет грани. Поскольку $\langle P,0\rangle_0=$
$=i_0(P_0,0)$ и $(P_0,0)$ ${}^aH$-максимален, а $i$ сохраняет грани, то $\langle P,0\rangle_0$ ${}^aH$-максимален, следовательно, $\langle P,0\rangle\le$
$\le P_{ch}({}^aH, X\times X, \mathcal{Z}\times\mathcal{Z})$, откуда $P\le P^1_{ch}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $H$ - подпространство. Тогда $P^1_{ch} = P^2_{ch}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3, имеем

$$P^1_{ch}x = \sup_{h\in H}(P^1_{ch}h - \|x-h\|\cdot\|P^1_{ch}\|) = \sup_{-h\in H}(-P^1_{ch}h - \|x+h\|\cdot\|P^1_{ch}\|),$$

следовательно, $P^1_{ch} \le P^2_{ch}$. Аналогично проверяется, что $P^2_{ch}$ является ${}_aH$ -надмаксимальным, то есть что $P^2_{ch} \le P^1_{ch}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Обозначим

$H\ominus\mathbb{1} = \{h - \alpha\mathbb{1} : h\in H, \alpha \ge 0\}$, $-H\ominus\mathbb{1} = \{-h-\alpha\mathbb{1} : h\in H, \alpha\ge 0\}$.

Тогда

$$P^1_{ch} \le P_{ch(H\ominus\mathbb{1},X,Z)},\quad P^2_{ch} \le P_{ch(-H\ominus\mathbb{1},X,Z)}.$$

Укажем доказательство первого неравенства. Именно, докажем, что если проектор $P$ ${}_aH$ -максимален, то он максимален и относительно конуса $H\ominus\mathbb{1}$. Действительно, $H$-максимальность $P$ равносильна соотношению $Px = \sup_{h\in H}(Ph - \|x-h\|\|P\|)$. Но

$$\sup_{h\in H}(Ph - \|x-h\|\|P\|) = \sup_{h\in H}P(h - \|x-h\|\cdot\mathbb{1}) = P(\sup_{h\in H}(h - \|x-h\|\cdot\mathbb{1})).$$

С другой стороны, $h - \|x-h\|\mathbb{1} \le co_{H\ominus\mathbb{1}}x$, поэтому $Px \le Pco_{H\ominus\mathbb{1}}x$. Так как $co_{H\ominus\mathbb{1}}x \le x$, то $Pco_{H\ominus\mathbb{1}}x \le Px$, следовательно, $Px = Pco_{H\ominus\mathbb{1}}x$ и $P$ максимален относительно конуса $H\ominus\mathbb{1}$.

Второе неравенство доказывается аналогично.

Приведем простой пример, показывающий, что обратные неравенства не имеют места. Пусть $H$ - пространство сужений линейных вещественных функций на отрезок $[-1,1]$ числовой прямой, $X = C_{[-1,1]}$, $Y = \mathbb{R}^{[-1,1]}$. Проектор $P_{ch(H\ominus\mathbb{1},X,Z)}$ порождён множеством $\{-1,1\}$. Обозначим через $P_{-1}, P_1$ проекторы, порождённые множествами $\{-1\}$, $\{1\}$ соответственно. Тогда для $h\in H$ имеем $P_1h = h(1) = -h(-1) = -P_{-1}h$, кроме того, $\|P_1\| = \|-P_{-1}\|$, откуда $-P_{-1} \in {}_aSpr(P_1, H)$, следовательно, $P$ не является ${}_aH$ -максимальным. Аналогично $P_{-1}$ также не является ${}_aH$ -максимальным, и проектор $P^1_{ch}$ $(= P^2_{ch})$ нулевой.

Литература

1. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Супремальные генераторы относительно операторов. - В кн.: Оптимизация. Вып. 8(25), Новосибирск, 1970, с. 23-41.

2. ДЯТЛОВ В.Н. Граница Шоке и максимальные операторы. - В кн.: Оптимизация. Вып. 12(29), Новосибирск, 1973, с.42-51.

3. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. ГИФМЛ, М., 1961.

4. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

Поступила в ред.-изд. отд.
3. VI. 1974 г.