УДК 338.45:63:330.115

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ПОСТОЯННО ЗАНЯТЫХ РАБОЧИХ И СТРУКТУРЫ ПРОИЗВОДСТВА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Ц.Е.Бочварова

Задача определения оптимальной структуры сельскохозяйственного производства сводится к задаче линейного программирования при допущении, что все экономико-технические параметры считаются детерминированными величинами. Рассмотрим постановку, когда необходимо вместе с оптимальной структурой производства определить и число постоянно занятых рабочих. Обычно в такие модели включаются ограничения по использованию трудовых ресурсов только для ряда напряженных периодов.

Обозначим через x_1 число постоянно занятых рабочих в данном предприятии. Тогда наличное количество трудовых ресурсов в i-й период выразится через $a_{i1}(w)x_1$, где $a_{i1}(w)$ - число рабочих дней i-го периода. Величины $a_{i1}(w)$ случайные, так как они зависят от случайного состояния природы (т.е. от случайно складывающихся погодных условий).

Пусть x_j означает размер j-й отрасли (вида деятельности) сельскохозяйственного предприятия, $j = 2,\dots,n$, а a_{ij} - нормы затрат труда, необходимого единице j-й отрасли в i-й период.

В этих обозначениях условие

$$\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}(w)x_1; \quad i = 1,\dots,m, \tag{1}$$

выражает баланс по использованию трудовых ресурсов в i-ый период.

При реализации случая возникают невязки

$$y_i^+(w) > 0 \quad, \text{ если } \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j \leq a_{i1}(w) x_1 \quad,$$

и

$$y_i^-(w) > 0 \quad, \text{ если } \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j > a_{i1}(w) x_1 \quad.$$

Невязки $y_i^+(w)$ и $y_i^-(w)$ показывают, на сколько число реализованных человеко-дней $a_{i1}(w)x_1$ соответственно больше или меньше необходимых человеко-дней $\sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j$. При этом ущерб, который понесет хозяйство, естественно принять пропорциональным величине неудовлетворенной потребности в человеко-днях:

$$q_i^- \, y_i^-(w) \quad,$$

где q_i^- - ущерб (штраф), связанный с нехваткой одного человеко-дня (q_i^- можно истолковать как плату дополнительному рабочему, привлеченному со стороны за один человеко-день).

Если сельскохозяйственное предприятие имеет возможность использовать избыточное количество человеко-дней $y_i^+(w)$ (например, в побочном каком-либо производстве), то выгоду от этого можно выразить как

$$q_i^+ \, y_i^+(w) \quad,$$

где q_i^+ - прибыль от одного человеко-дня, использованного в побочном производстве.

Тогда естественно включить в показатель качества плана (например, чистый доход) суммарные математические ожидания выгоды и ущерба от невыполнения условия (I) :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{M}\,[q_i^+ \, y_i^+(w)] - \sum_{i=1}^{m} \mathrm{M}\,[q_i^- \, y_i^-(w)] \;,$$

где c_j - оценка единицы отрасли сельскохозяйственного предприятия, $j = 2,\ldots, n$, c_1 - оценка труда одного рабочего, $\mathrm{M}[S]$ - математическое ожидание случайной величины S .

Пусть

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} x_j \le b_i^{(1)} \qquad i=m+1,\dots,m^{(1)} ,$$

-остальные ограничения экономико-математической задачи (ограничения по земельным, материальным и денежным ресурсам, ограничения на объем некоторых видов сельскохозяйственной продукции, балансовые соотношения между различными отраслями предприятия и другие), в которых параметры $a_{ij}^{(1)}$ и $b_i^{(1)}$, - детерминированные величины. Тогда приходим к следующей модели определения оптимальной структуры сельскохозяйственного предприятия:

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M\left[\sum(q_i^+ y_i^+(w) - q_i^- y_i^-(w))\right]\right\} ; \tag{2.1}$$

$$-a_{i1}(w)x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j + y_i^+(w) - y_i^-(w) = 0; \quad i=1,\dots,m ; \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} x_j \le b_i^{(1)} ; \quad i=m+1,\dots,m^{(1)} ; \tag{2.3}$$

$$x_j \ge 0 ; \qquad j=1,\dots,n; \tag{2.4}$$

$$y_i^+(w) \ge 0, \quad y_i^-(w) \ge 0 ; \quad i=1,\dots,m. \tag{2.5}$$

Очевидно, что при любых w, удовлетворяющих условиям (2.3) и (2.4), множество планов $y(w)=\{y_i^+(w), y_i^-(w)\}$ (планы второго этапа) не пусто при всех w, т.е. задача (2.1) - (2.5) является задачей с простой рекурсией. Этому классу задач посвящен ряд работ (см., например, [1 - 5]). Для решения таких задач, важных для приложений, предложен общий метод - метод стохастических градиентов [6]. Однако этот метод громоздок в реализации.

Рассмотрим задачу второго этапа

$$P(x,w) = \{\max \sum_{i=1}^{m} [q_i^+ y_i^+(w) - q_i^- y_i^-(w)] /$$

$$/ y_i^+(w) - y_i^-(w) = a_{i1}(w)x_1 - x_i , \; y_i^+(w) \ge 0, \; y_i^-(w) \ge 0, \; i=1,\dots,m\},$$

где $x_i = \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j$, $i = 1,\dots,m$.

По теореме двойственности

$$P(x,w)=Q(x,w)=\{min \sum_{i=1}^{m} z_i [a_{i1}(w)x_1 - x_i] /$$
$$/ q_i^+ \le z_i \le q_i^-, \ i=1,\dots,m\} . \qquad (3)$$

Очевидно, что условие разрешимости задачи второго этапа будет $q_i^+ \le q_i^-$, $i = 1,\dots,m$.

Решение задачи (3) будет следующее :

$$z_i^* = \begin{cases} q_i^+, \text{ если } a_{i1}(w)x_1 - x_i > 0, \\ q_i^-, \text{ если } a_{i1}(w)x_1 - x_i < 0; \end{cases}$$

$$Q(x,w) - \sum_{i=1}^{m} z_i^* [a_{i1}(w)x_1 - x_i] .$$

Обозначим

$$Q_i = z_i^* [a_{i1}(w)x_1 - x_i]$$

Тогда следующая задача является детерминированным эквивалентом задачи (2.I) - (2.5) :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} MQ_i \longrightarrow max , \\ &x_i = \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j , \quad i=1,\dots,m, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} x_j \le b_i^{(1)} , \quad i=m+1,\dots,m^{(1)}, \\ &x_j \ge 0 , \quad j=1,\dots,n. \end{aligned} \qquad (4)$$

При некоторых предположениях, которые мы примем в дальнейшем, покажем, что (4) можно свести к задаче линейного программирования.

Если F_i —функция распределения $a_{i1}(w)$, то

$$MQ_i = q_i^+ \int_{x_i \le a_{i1}(w)x_1} [a_{i1}(w)x_1 - x_i] dF_i + q_i^- \int_{x_i > a_{i1}(w)x_1} [a_{i1}(w)x_1 - x_i] dF_i =$$

$$= q_i^+ \{M[a_{i1}(w)]x_1 - x_i\} + (q_i^- - q_i^+) \int_{x_i > a_{i1}(w)x_1} [a_{i1}(w)x_1 - x_i] dF_i .$$

Пусть $a_{i1}(w)$ - число рабочих дней i-ого периода - дискретная случайная величина со следующим законом распределения:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} a_{i1}(w) & d_{i1} & d_{i2} & \cdots & d_{ir_i} \\ \hline p_i & p_{i1} & p_{i2} & & p_{ir_i} \end{array}, \qquad (5)$$

где $d_{i1} < d_{i2} < \cdots d_{ir_i}$ и $d_{iк} > 0$; $к = 1, \ldots, r_i$.

Тогда если

$$x_1 > \varepsilon , \quad \varepsilon > 0 , \qquad (6)$$

то

$$\int\limits_{x_i > a_{i1}(w) x_1} [a_{i1}(w) x_1 - x_i] dF_i = -x_1 \sum_{s=1}^{r_i+1} x_{is} F_{is} ,$$

где переменные x_{is} , $i = 1, \ldots, m$; $s = 1, \ldots, r_i + 1$, удовлетворяют условиям;

$$x_i = x_1 \sum_{s=1}^{r_i+1} x_{is} , \quad i = 1, \ldots, m ; \qquad (7.1)$$

$$0 \leq x_{i1} \leq d_{i1} ; \qquad (7.2)$$

$$0 \leq x_{iк} \leq d_{iк} - d_{iк-1} , \quad к = 2, \ldots, r_i ; \qquad (7.3)$$

$$0 \leq x_{ir_i+1} \qquad (7.4)$$

и

$$F_{i1} = 0 , F_{iк} = p_{i1} + \cdots + p_{iк-1} , \quad к = 2, \ldots, r_i , F_{ir_i+1} = 1 .$$

Следовательно,

$$MQ_i = q_i^+ \{M[a_{i1}(w)] x_1 - x_i\} + (q_i^+ - q_i^-) x_1 \sum_{s=2}^{r_i+1} x_{is} F_{is} ,$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} MQ_i = \sum_{j=1}^{n} H_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=2}^{r_i+1} N_{is} x_1 x_{is} , \qquad (8)$$

где

$$H_1 = c_1 + \sum_{i=1}^{m} \{q_i^+ M[a_{i1}(w)]\} ,$$

$$H_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} q_i^+ a_{ij} , \quad j = 2, \ldots, n ,$$

$$N_{is}=(q_i^+-q_i^-)F_{is}\,,\quad i=1,\ldots,m\,,\quad s=2,\ldots,r_i+1\,.$$

Сделаем замену переменных

$$x_1 x_{is}=x'_{is}$$

в (8) и (7.I) - (7.4).

Тогда следующая задача линейного программирования является эквивалентной задаче (4):

$$\sum_{j=1}^{n} H_j x_j+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{r_i+1} N_{is} x'_{is}\to max\ ; \tag{9.I}$$

$$\sum_{s=1}^{r_i+1} x'_{is}=\sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j\,,\qquad i=1,\ldots,m\,; \tag{9.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} x_j\le b_i^{(1)}\,,\qquad i=m+1,\ldots,m^{(1)}\,; \tag{9.3}$$

$$0\le x'_{i1}\le d_{i1} x_1\,,\qquad i=1,\ldots,m\,; \tag{9.4}$$

$$0\le x'_{is}\le (d_{is}-d_{is-1})x_1\,,\ s=1,\ldots,r_i\,,\ i=1,\ldots,m\,; \tag{9.5}$$

$$x'_{ir_i+1}\ge 0\,,\qquad i=1,\ldots,m\,; \tag{9.6}$$

$$x_1\ge\varepsilon\,,\ x_j\ge 0\,,\qquad j=2,\ldots,n. \tag{9.7}$$

Применение детерминированного эквивалента (9.I) - (9.7) задачи (2.I) - (2.5) при допущениях (5) и (6) проиллюстрируем на следующем примере.

Требуется определить число постоянно занятых рабочих и структуру производства подразделения сельскохозяйственного предприятия, при которых получился бы максимальный чистый доход. Сельскохозяйственное подразделение располагает 4000 га земли. Имеются условия для производства пшеницы, подсолнечника, сахарной свеклы, табака, помидоров и винограда. Хозяйство должно иметь не менее 600 структурных голов свиней и обеспечить их кормами, выращивая ячмень и кукурузу. Кроме того, оно должно производить не меньше 2200 т пшеницы. Самые напряженные трудовые месяцы в условиях данного хозяйства -это июль, сентябрь и октябрь. Для этих месяцев будем контролировать выполнение баланса по использованию трудовых ресурсов.

В этом подразделении должны работать постоянно не меньше 120 человек. Обозначим через x_1 число постоянно занятых рабочих. Следовательно, $x_1 > 120$. В сентябре и октябре в подразделении работают дополнительно еще 100 человек. Количества рабочих дней $a_{11}(w)$ и $a_{21}(w)$ в июле и в октябре являются случайными величинами из-за погодных условий. Их распределение дано в таблице 1. Наличные трудовые ресурсы в июле и октябре будут соответственно $a_{11}(w)x_1$ и $a_{21}(w)\ (x_1 + 100)$. Так как $a_{11}(w)$ и $a_{21}(w)$ — случайные величины, то в ограничениях по использованию труда (количество необходимых трудовых ресурсов в человеко-днях равно количеству наличных трудовых ресурсов в человеко-днях) могут возникнуть невязки. Дано, что ущерб от нехватки одного человеко-дня в июле и октябре (q_1^-, q_2^-) равен 20 лв, т.е. допускается, что можно нанять рабочую силу со стороны, выплачивая по 20 лв за человеко-день. Если окажется, что трудовые ресурсы не могут быть использованы полностью в сельскохозяйственном производстве, то они могут быть использованы в каком-либо побочном производстве. Дано, что прибыль, получаемая при этом, от одного человеко-дня для июля и октября (q_1^+, q_2^+) равна 5 лв. Число рабочих дней в сентябре считается постоянным, и оно равно 25. Тогда наличные трудовые ресурсы в сентябре будут $2500 + 25x_1$.

Предполагается, что остальные производственные ресурсы могут быть предоставлены подразделению в необходимом количестве, и поэтому в модели они не будут учитываться. В модель включены ограничения по земельным ресурсам, по выполнению кормового баланса, по севообороту, по минимальному числу структурных голов свиней, по производству пшеницы и по трудовым ресурсам в напряженные месяцы.

С учетом условий поставленной задачи, с помощью соответствующих нормативных данных составлена расширенная матрица условий модели (9.1) - (9.7). Она приводится в таблице 2. В последней строке таблицы 2 даны значения параметров c_j модели (2.1) - (2.5). Сумма $\sum_j c_j x_j$ означает условный чистый доход, который не учитывает штрафов от невыполнения трудовых балансов в июле и октябре. Значения параметров c_j, выраженные в левах, означают следующее: $-c_1 = 1800$ — годовая оплата труда одного рабочего, $c_2 = 200$; $c_5 = 360$; $c_6 = 680$; $c_7 = 1500$; $c_8 = 3100$; $c_9 = 1200$ — чистая продукция с одного га под соответствующую культуру; $-c_3 = 165$; $-c_4 = 255$ — мате-

Таблица I.

Вероятности и математические ожидания числа рабочих дней в июле и октябре.

Июль	Число рабочих дн.	2I	22	23	24	25	мат.ожидание
	вероятность	0,30	0,25	0,25	0,I5	0,05	22,4
Октябрь	Число рабочих дн.	20	2I	22	23	24	мат. ожидание
	вероятность	0,30	0,25	0,25	0,I5	0,05	2I,4

риальные расходы соответственно для ячменя и кукурузы, необходимые для получения корма с одного га; C_{10} = 780 - условная чистая продукция одной структурной головы животных (условная в том смысле, что она включает материальные расходы для корма).

Задача решалась на ЭВМ БЭСМ-6. Полученный в результате решения задачи оптимальный план и его ожидаемый чистый доход приведены в таблице 3. В этой таблице приводится и решение той же самой задачи в предположении, что трудовые ресурсы в человеко-днях в напряженные месяцы фиксированы и равны их математическим ожиданиям.

Результаты показывают, что оптимальная структура производства подразделения, полученная с учетом случайного характера количества рабочих дней в напряженные периоды, и структура, полученная при их средних значениях, различаются. В первой постановке свиноводство оказывается неэффективной отраслью, так как для нее в оптимальном плане определяется минимальный объем, при котором выполняется поставленное задание.

Оптимальное число постоянно занятых рабочих в обеих постановках существенно различается. Оптимальное число рабочих в первой постановке, определенное при допущении возможности восполнения недостатка рабочей силы наймом ее по более высокой цене (20 лв за человеко-день вместо 5 лв), равно 197. Во второй постановке нельзя нанимать рабочих со стороны, и поэтому ограничения по использованию трудовых ресурсов будут выполняться только тогда, когда количество рабочих дней в напряженные периоды окажется не меньше среднего. Случай, при котором имеет место недостаток трудовых ресурсов, в этой постановке не рассматривается . Полученное оптимальное число постоянно занятых рабочих равняется 285, т.е. на 88 больше, чем в первой постановке.

В первой постановке математическое ожидание оптимального чистого дохода равняется 622429 лв, что на 7% больше оптимального чистого дохода второй постановки. Кроме того, надо отметить, что при второй постановке оптимальный чистый доход будет достигнут только тогда, когда реализуемое количество рабочих дней в напряженные периоды будет не меньше среднего. Применение оптимального плана в первой постановке дает возможность ожидать, что средний чистый доход в 622429лв за ряд лет будет достигнут.

Таблица 3

Оптимальная структура производства и число постоянно занятых рабочих предприятия

Структура плана	При случайном числе рабочих дней	При учете среднего числа рабочих дней
Количество постоянно занятых рабочих	197	285
Посевная площадь под культурами в га		
пшеница	2400	2400
ячмень	0	0
кукуруза	707	800
подсолнечник	800	800
сахарная свекла	93	0
табак	0	0
помидоры	0	0
виноград	0	0
Поголовье с/х животных:		
Свиней, структурных голов	600	679
Чистый доход (лв)	622429	580620

Таблично-матричное представление условий задачи

Таблица 2

Переменные / Ограничения	Единицы измерения	Число пост. зан. рабочих x_1	Пшеница x_2	Ячмень x_3	Кукуруза x_4	Подсолнечник x_5	Сах. свекла x_6	Табак x_7	Помидоры x_8	Виноград x_9	Свиноводство x_{10}	Дополнительные переменные, июль x'_{11}	x'_{12}	x'_{13}	x'_{14}	x'_{15}	x'_{16}	октябрь x'_{21}	x'_{22}	x'_{23}	x'_{24}	x'_{25}	x'_{26}	Тип ограничений
площадь посева	га	1	1	1	1	1	1	1	1	1														$\leqslant$ 4000
тр. рес. в УШ	ч.д.		1,7	1,4	0,5	0,6	0,8	70	90	6	1,5	-1	-1	-1	-1	-1	-1							= 0
тр. рес. в IX	ч.д.	-25	0,4	0,6	4	2,5	8	70	50	30	1,5													$\leqslant$ 2500
тр. рес. в X	ч.д.		0,7	0,5	4		13	20	30	40	1,5							-1	-1	-1	-1	-1	-1	= 0
корм	тыс. корм.ед.			-3,5	-5,6						6,6													$\leqslant$ 0
ограничения	га		0,6	0,6	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4															$\geqslant$ 0
по	га		0,4	0,4	-0,6	-0,6	-0,6	-0,6	-0,6															$\leqslant$ 0
севообороту	га		-1	-1	-1	4	-1	-1	-1															$\leqslant$ 0
пшеница	т.		2,7																					$\geqslant$ 2200
поголовье	стр.г.										1													$\geqslant$ 600
ограничения	ч.д.	21										-1												$\geqslant$ 0
сверху пере-	ч.д.	1											-1											$\geqslant$ 0
менных x'_{1k}	ч.д.	1												-1										$\geqslant$ 0
$k=1,\dots,6$	ч.д.	1													-1									$\geqslant$ 0
	ч.д.	1														-1								$\geqslant$ 0
ограничения	ч.д.	20																-1						$\geqslant$ 2000
сверху пере-	ч.д.	1																	-1					$\geqslant$ 100
менных x'_{2k}	ч.д.	1																		-1				$\geqslant$ 100
$k=1,\dots,6$	ч.д.	1																			-1			$\geqslant$ 100
	ч.д.	1																				-1		$\geqslant$ 100
ограничение снизу числа пост.зан.раб.	число	1																						$\geqslant$ 120
мат. ожидание чистого дохода	лева	-1581	188	-1745	-277,5	357	611	1050	2500	970	765		-4,5	-8,25	-12	-14,25	-15		-4,5	-8,25	,2	-14,25	-15	
c_j $j=1,\dots,10$	лева	-1800	200	-165	-255	360	680	1500	3100	1200	780													

Модели с учетом случайного характера параметров более адекватны реальной действительности.

Литература

1. WETS R. Programming under uncertainty: The complete program. Z. Wahrscheilichkeitstheorie verw. Leb. 4, 1966.
2. WETS R. Programming under uncertainty: The Equivalent Convex Program. J. SIAM Appl. Math., v.14, 1966.
3. MARTEL AL., AL NUAIMI AHMAD. Tactical manpaver planning via programming under uncertainty. Oper. Res. Quart., 24, N 4, 1973.
4. BARON D. Information in two-stage programming under uncertainty. Naval Res. Logistics Quarterly, June 1971, vol. 18, N 2.
5. LARSTKA ST.J., RUTENBERG D.P. Computation in Discrete Stochastic Programs with Recourse Operations Research, 21, N 1, 1973.
6. ЕРМОЛЬЕВ Ю.М., ШОР Н.З. Метод случайного поиска для двухэтапной задачи стохастического программирования и его обобщение. "Кибернетика", 1968, №1.

Поступила в ред.-изд. отд.
20. XII. 1974 г.