УДК 512.25/26

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЕ М.АЛЬТМАНА "БИЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ"

Е.Н.Сокирянская

Пусть $N=1:n$ ($M=1:m$) - множество последовательных натуральных чисел от 1 до n (m) включительно; $X[N]$ ж) $y[N]$, $p[N]$, $q[N]$ - n-мерные векторы, для которых N является множеством индексов их координат ($x[N]$ и $y[N]$ дальше для краткости иногда обозначаются просто x и y); $d[M]$, $h[M]$ - m-мерные векторы; $a[M,N]$, $b[M,N]$, $c[N,N]$ - матрицы размеров $m\times n$, $m\times n$ и $n\times n$, соответственно. Если $N_1\subset N$, то $x[N_1]$ — "частичный" по отношению к $x[N]$ вектор меньшей размерности, координаты которого суть координаты вектора $x[N]$ с индексами, принадлежащими множеству N_1. В частности, $x[j]$ - одна координата вектора $x[N]$. Если и $M_1\subset M$, то $a[M_1, N_1]$ - "частичная" матрица, $a[M,K]$ - столбец матрицы $a[M,N]$ с индексом k, $a[j,N]$ - j-ая строка, $a[j,k]$ - отдельный ее элемент. Скалярное произведение векторов $p[N]$ и $x[N]$ с общим множеством индексов координат обозначается $p[N]\times x[N]$; $a[M,N]\times x[N]$ - произведение матрицы $a[M,N]$ на вектор $x[N]$; $x[N]\times c[N,N]$ - произведение транспо-

ж) Используемые здесь обозначения векторов, матриц и действий над ними заимствованы из [1].

нированной по отношению к $c[N,N]$ матрицы на вектор $x[N]$;

$$x[N]\times c[N,N]\times y[N]=\sum_{[j,k]\in N\times N} c[j,k]x[j]\,y[k]$$

- билинейная форма; $\mathit{0}[N]$ - нулевой вектор.

Положим

$$X=\{x[N]/\,a[M,N]\times x[N]=d[M],\ \ x[N]\geq\mathit{0}[N]\}$$

В работе [2] поставлена следующая задача:

$$\left.\begin{aligned} F(x,y)=p[N]\times x[N]+q[N]\times y[N]+\\ +x[N]\times c[N,N]\times y[N],\\ \binom{x}{y}\in X\times Y\quad. \end{aligned}\right\}max$$

Вектор $\binom{x}{y}\in X\times Y$ называется допустимым базисным решением, если $x[j]=0$ при $j\bar{\in} N_1$ и $y[k]=0$ при $k\bar{\in} N_2$, где $N_1\subset N$ и $N_2\subset N$ - соответствующие базисные множества индексов координат, т.е. такие множества, для которых выполняются равенства:

$$rank\ a[M,N]=rank\ a[M,N_1]=|N_1|,$$

$$rank\ b[M,N]=rank\ b[M,N_2]=|N_2|.$$

Допустимое базисное решение $\binom{x}{y}$ называется невырожденным, если $x[j]>0$ при $j\in N_1$ и $y[k]>0$ при $k\in N_2$.

Пусть $\binom{x^\circ}{y^\circ}$ - фиксированное невырожденное допустимое базисное решение; N_1 и N_2 - соответствующие базисные множества индексов координат; $N'=N\setminus N_1$, $N^2=N\setminus N_2$; $a^-[N_1,M]$ и $b^-[N_2,M]$ - матрицы, обратные к $a[M,N']$ и $b[M,N_2]$, соответственно;

$$\delta[N,N]=a^-[N_1,N]\times a[M,N];$$

$$\varepsilon[N_2,N]=b^-[N_2,M]\times b[M,N];$$

$$\alpha[N']=p[N']+c[N',N_2]\times y^\circ[N_2]-$$
$$-(p[N_1]+c[N_1,N_2]\times y^\circ[N_2])\times\delta[N,N'];$$

$$B[N^2] = q[N^2] + x^0[N_1] \times c[N_1, N^2] -$$
$$- (q[N_2] + x^0[N_1] \times c[N_1, N_2]) \times \varepsilon[N_2, N^2];$$
$$\gamma[N', N^2] = c[N', N^2] + \delta'[N', N_1] \times c[N_1, N_2] \times \varepsilon[N_2, N^2] -$$
$$- \delta'[N', N_1] \times c[N, N^2] - c[N', N_2] \times \varepsilon[N_2, N^2]$$

($\delta'[N', N_1]$ - матрица, транспонированная по отношению к $\delta[N_1, N']$).

М.Альтман ([2], теорема 5) формулирует критерий оптимальности допустимого базисного решения поставленной задачи $\binom{x^0}{y^0}$ и утверждает его эквивалентность одновременному выполнению условий

$$\alpha[N'] \leqslant 0[N']; \tag{1}$$
$$\beta[N^2] \leqslant 0[N^2]; \tag{2}$$
$$\gamma[N', N^2] \leqslant 0[N', N^2]. \tag{3}$$

На самом деле выполнение неравенств (1) - (3) достаточно для оптимальности допустимого базисного решения $\binom{x^0}{y^0}$, однако при этом выполнение (3) не является необходимым даже для невырожденного оптимального решения.

ПРИМЕР

$$-x_1 - 11x_2 - 8y_1 - 4y_2 + 2x_1y_1 - x_1y_2 + 6x_2y_1 + 5x_2y_2 - max;$$

$$\begin{array}{llll} x_1 \quad + x_3 = 2 & & \\ \quad x_2 \quad + x_4 = 2, & & x \geqslant 0, \\ y_1 \quad + y_3 = 2 & & \\ \quad y_2 \quad + y_4 = 2, & & y \geqslant 0 \end{array}$$

Здесь

$$N = 1:4; \quad M = 1:2; \quad p[N] = \{-1, -11, 0, 0\};$$

$$q[N]=\{-8,-4,0,0\};$$

$$c[N,N]=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$a[M,N]=b[M,N]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$d[M]=h[M]=\{2,2\}.$$

Полным перебором допустимых базисных решений легко получить оптимальное $\binom{x_0}{y^0}$, в котором $x^0=y^0=\{2,2,0,0\}$. Для него $N_1=N_2=1:2$; $N'=N^2=3:4$;

$$a^-[N,M]=b^-[N_2,M]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\delta[N_1,N']=\varepsilon[N_2,N^2]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma[3,3]=0+2-0-0>0,$$

так что неравенство (3) не выполняется.

Алгорифм, предложенный М.Альтманом, предписывает в случае, когда одно из неравенств (1), (2) или (3) не выполняется, заменить по определенному правилу $\binom{x_0}{y_0}$ новым допустимым базисным решением. Однако для этого нового решения, уже не являющегося оптимальным, тем более не могут одновременно выполняться неравенства (1) - (3), так что и его, следуя предписаниям алгорифма, придется заменить другим. Применительно к рассматриваемому примеру алгорифм никогда не закончится, так как ни одно допустимое базисное решение не подчиняется условиям (1) - (3).

Пусть

$$\xi_j=\min\{x^0[s]/\delta[s,j]/s\in N_1,\ \delta[s,j]>0\};$$

$$\eta_k=\min\{y^0[s]/\varepsilon[s,k]/s\in N_2,\ \varepsilon[s,k]>0\}.$$

Действительно необходимое, но не достаточное условие оптимальности содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА I. Если $\binom{x^0}{y^0} \in X \times Y$ является невырожденным оптимальным решением, то справедливы неравенства (I), (2) и

$$\xi_j \alpha[j] + \eta_k \beta[k] + \xi_j \eta_k \gamma[j,k] \le 0, \qquad \forall \binom{j}{k} \in N' \times N^2 . \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть также и $\binom{x}{y} \in Y \times Y$. Тогда [3, лемма I]

$$F(x,y) - F(x^0,y^0) = \alpha[N']^{\times} x[N'] + \beta[N^2]^{\times} y[N^2] + x[N']^{\times} \gamma[N',N^2]^{\times} y[N^2]. \tag{5}$$

Рассмотрим векторы $x^j[N]$ и $y^k[N]$, определяемые следующим образом:

$$x^j[j] = \xi_j; \quad x^j[N' \setminus \{j\}] = 0[N' \setminus \{j\}]; \tag{6}$$
$$x^j[N_1] = x^0[N_1] - \xi_j\, \delta[N_1, j];$$

$$y^k[k] = \eta_k; \quad y^k[N^2 \setminus \{k\}] = 0[N^2 \setminus \{k\}]; \tag{7}$$
$$y^k[N_2] = y^0[N_2] - \eta_k\, \varepsilon[N_2, k].$$

На основании (5)

$$F(x^j,y^0) - F(x^0,y^0) = \alpha[j]\,\xi_j; \tag{8}$$

$$F(x^0,y^k) - F(x^0,y^0) = \beta[k]\,\eta_k, \tag{9}$$

$$F(x^j,y^k) - F(x^0,y^0) = \alpha[j]\xi_j + \beta[k]\eta_k + \xi_j \gamma[j,k]\,\eta_k, \tag{10}$$

откуда и следует справедливость теоремы.

Алгоритм Альтмана (см. [2]) можно исправить так: случай а) сохраняется, т.е. если существует $j \in N$, для

которого $\alpha[j]>0$, $\binom{x}{y}$ заменяется допустимым базисным решением $\binom{x^j}{y^0}$, где x^j определяется из равенств (6), а если существует $k\in N^2$, для которого $\beta[k]>0$, то вводится новое допустимое базисное решение $\binom{x^0}{y^k}$, в котором y^k определяется из (7).

Случай б) изменяется так: если неравенства (I) и (2) справедливы, но для некоторого $\binom{j}{k}\in N^1\times N^2$ не выполняется условие (4), то $\binom{x^0}{y^0}$ заменяется новым решением $\binom{x^j}{y^k}$.

На основании равенств (8) и (9) при замене старого допустимого базисного решения новым в случае а) функция цели $F(x,y)$, по крайней мере, не убывает. Если старое или новое базисные решения оказываются невырожденными, она строго возрастает. Переход к новому базисному решению в случае б) влечет за собой, как это видно из (10), также строгое возрастание $F(x,y)$. Поэтому, вследствие конечности множества допустимых базисных решений, при отсутствии зацикливания в случае а), вызванного вырожденностью, при применении исправленного алгорифма за конечное число шагов отыскивается допустимое базисное решение $\binom{x^0}{y^0}$, подчиняющееся условиям (I), (2) и (4). Это решение является локальным максимумом.

Действительно, выберем в точке $\binom{x^0}{y^0}$ возможное направление $\binom{u[N]}{v[N]}$ так, чтобы при достаточно малом положительном λ

$$x[N]=x^0[N]+\lambda u[N]\in X,$$

$$y[N]=y^0[N]+\lambda v[N]\in Y.$$

Для $\binom{u}{v}$ выполняются соотношения:

$$a[M,N]\times u[N]=0[M],\quad u[N^1]\geqslant 0[N^1],$$

$$b[M,N]\times v[N]=0[M],\quad v[N^2]\geqslant 0[N^2].$$

Если

$$x[N]=x^0[N]+\lambda u[N],\quad y[N]=y^0[N]+\lambda v[N],\quad \lambda>0,$$

то

$$x[N^1]=\lambda u[N^1],\quad y[N^2]=\lambda v[N^2],$$

Тогда из (5) получим

$$F(x,y)-F(x^\circ,y^\circ)=\lambda(\alpha[N^1]\times u[N^1]+\beta[N^2]+v[N^2]+$$
$$+\lambda u[N^1]\times\gamma[N^1,N^2]\times v[N^2]).$$

Отсюда, на основании (I), (2) и (II), следует, что при достаточно малых значениях λ имеет место $F(x,y)\leq F(x^\circ,y^\circ)$.

Для проверки глобальной оптимальности найденного решения можно воспользоваться каким-нибудь достаточным условием, менее жестким по сравнению с выполнением неравенств (I) - (3), например, достаточным условием, предлагаемым ниже.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для $j\in N^1$, $k\in N^2$

$$\lambda_j=\max\{x[j]/\ x[N]\in X\};$$
$$\mu_k=\max\{y[k]/\ y[N]\in Y\};$$
$$n_1=|N^1|;\qquad n_2=|N^2|.$$

Если выполняются условия (I), (2) и для всех $\binom{j}{k}\in N^1\times N^2$

$$\lambda_j\mu_k\gamma[j,k]+1/n_2\ \lambda_j\alpha[j]+1/n_1\,\mu_k\beta[k]\leq 0, \tag{12}$$

то $\binom{x^\circ}{y^\circ}$ - оптимальное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует $\binom{x}{y}\in X\times Y$, для которого $F(x,y)>F(x^\circ,y^\circ)$. Тогда, на основании (5),

$$\sum_{j\in N^1}x[j](\alpha[j]+\gamma[j,N^2]\times y[N^2]+$$
$$+\sum_{j\in N^1}1/n_1(\beta[N^2]\times y[N^2])>0,$$

т.е. найдется такой $j\in N^1$, что

$$x[j](\alpha[j]+\gamma[j,N^2]\times y[N^2])+1/n_1(\beta[N^2]\times y[N^2])>0.$$

На основании (2) и определения Y $1/n_1(\beta[N^2]\times y[N^2])\leq 0$, поэтому $x[j](\alpha[j]+\gamma[j,N^2]\times y[N^2])>0$;

$$\lambda_j(\alpha[j]+\gamma[j,N^2]\times y[N^2]) \geq x[j](\alpha[j]+\gamma[j,N^2]\times y[N^2]),$$

значит, подавно

$$\lambda_j\,\alpha[j]+\sum_{\kappa\in N^2}(\lambda_j\,\gamma[j,\kappa]+1/n_1\,\beta[\kappa])\,y[\kappa]>0.$$

Тогда существует $\kappa\in N^2$, для которого

$$1/n_2\,\lambda_j\,\alpha[j]+(\lambda_j\,\gamma[j,\kappa]+1/n_1\,\beta[\kappa])\,y[\kappa]>0.$$

Но $1/n_2\,\lambda_j\,\alpha[j]\leq 0$, $\mu_\kappa \geq y[\kappa]\geq 0$, следовательно,

$$1/n_2\,\lambda_j\,\alpha[j]+(\lambda_j\,\gamma[j,\kappa]+1/n_1\,\beta[\kappa])\,\mu_\kappa>0,$$

что противоречит условию (2).

Таким образом, $F(x,y)\leq F(x^\circ,y^\circ)$, и теорема доказана.

Если $\binom{x^\circ}{y^\circ}$ подчиняется условиям (I), (2) и (4), но для него не выполняется достаточное условие оптимальности, можно подвергнуть его проверке на оптимальность и заменить его "лучшим" решением, если оно не является оптимальным, прибегнув к алгоритму, предложенному автором.

Литература

1. РО[illegible]ОВСКИЙ И.В. Методы неявного перебора для решения задач целочисленного программирования с бивалентными переменными. -"Изв. вузов. Математика", (1970), с. 17-29.
2. ALTMAN M. Bilinear Programming. Bull. de L' Acad. polon des sci, ser math. 16, N 9, 1968, p.741-746.

Поступила в ред.-изд. отд.
30. X. 1974 г.