1975 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 16(33)

Выпуклый анализ

УДК 513.88

ХАРАКТЕРИСТИКА СОВОКУПНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВ

Ю.В.Михеев

1°. Выпуклость и замкнутость множества значений неатомных вполне аддитивных функций, действующих в конечномерные пространства, впервые была доказана А.А.Ляпуновым [1]. Им же был построен пример, показывающий, что для неатомных вполне аддитивных функций, действующих в бесконечномерные пространства, множества значений, вообще говоря, не являются выпуклыми. Вместе с тем (смотри обзорную статью [2]) результаты А.А.Ляпунова удалось перенести на вполне аддитивные функции $\varphi(E)$ со значениями в банаховых пространствах, если $\varphi(E)=\int_E f\,d\mu$, где μ — неатомная вполне аддитивная функция, а f абсолютно интегрируема.

В последние годы указанные теоремы нашли ряд важных приложений в теории вероятностей, математической экономике и теории управления. В связи с этим интерес к подобным теоремам значительно возрос.

В настоящей работе доказывается выпуклость множества значений некоторых новых классов функций, действующих в банаховы пространства. Рассматриваемые функции определены и аддитивны на некоторых алгебрах подмножеств конечномерных пространств и не являются на них вполне аддитивными.

2^0. В n-мерном арифметическом пространстве R^n с элементами $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ рассматривается обычное скалярное произведение, обозначаемое (x, y), в качестве нормы принимается $|x| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$ и вводятся упорядочения:

$$x \geq 0 \Longleftrightarrow x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$
$$x > 0 \Longleftrightarrow x_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Интегралы от функций, определенных на R^n, со значениями в банаховом пространстве B по компактным подмножествам $S \subset R^n$ понимаются всюду как интегралы в смысле Бохнера [3] по мере, индуцированной мерой Лебега.

Для произвольного вещественного или комплексного пространства B рассмотрим совокупность $\Phi(R^n, B)$ функций $f: R^n \to B$, удовлетворяющих условиям:

1. Функция f измерима и абсолютно интегрируема по любому компакту $S \subset R^n$.

2. Существует следующий предел

$$I_f = \lim_{M \to +\infty} \frac{1}{(2M)^n} \int_{|x| \le M} f(x)\, dx .$$

3. Существует $C(f) \in R$ такое, что

$$\frac{1}{(2M)^n} \int_{|x| \le M} \|f(x)\|_B\, dx \le C(f), \qquad M = 1, 2, \dots$$

Нетрудно проверить, что в $\Phi(R^n, B)$ в качестве нормы может быть принято число

$$\|f\| = \sup_{M = 1, 2, \dots} \frac{1}{(2M)^n} \int_{|x| \le M} \|f(x)\|_B\, dx .$$

Полнота этого пространства доказывается стандартным приемом с учетом полноты пространств $L^1(S_M)$, состоящих из функций $f: S_M = \{x \in R^n : |x| \le M\} \to B$ с нормой $\|f\|_L = \int_{S_M} \|f(x)\|_B\, dx$.

Величину I_f для $f \in \Phi(R^n, B)$ назовем средним функции f по пространству R^n.

3^0. Теперь перейдем к определению пространства функций и алгебры множеств, для которых докажем основную теорему.

ЛЕММА I. Пусть C — пространство комплексных чисел с обычной нормой. Для каждого $\lambda\in R^n$ имеем $e^{2\pi i(\lambda,x)}\in\Phi(R^n,C)$, причем $Ie^{2\pi i(\lambda,x)}=0$, если $\lambda\neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Фубини

$$\frac{1}{(2M)^n}\int\limits_{|x|\le M} e^{2\pi i(\lambda,x)}\,dx=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2M}\int\limits_{-M}^{M} e^{2\pi i\lambda_k x_k}\,dx_k .$$

При этом $\frac{1}{2M}\int\limits_{-M}^{M} e^{2\pi i\lambda_k x_k}\,dx_k=1$, если $\lambda_k=0$, и

$$\left|\frac{1}{2M}\int\limits_{-M}^{M} e^{2\pi i\lambda_k x_k}\,dx_k\right|=\left|\frac{e^{2\pi i\lambda_k M}-e^{-2\pi i\lambda_k M}}{4\pi i\lambda_k M}\right|\le min\left(1,\frac{1}{2\pi|\lambda_k|M}\right),$$

если $\lambda_k\neq 0$. Но тогда, очевидно, справедливо утверждение леммы.

Через L_C обозначим линейную оболочку в $\Phi(R^n,C)$ множества функций вида $e^{2\pi i(\lambda,x)}$, $\lambda\in R^n$. Далее, через L_R обозначим $L_C\cap\Phi(R^n,R)$. Наконец, линейным пространством L_B назовем линейную оболочку в $\Phi(R^n,B)$ множества функций $a\varphi$, где $a\in B$, $\varphi\in L_R$.

Определим банахово пространство $F(R^n,B)$ функций $f:R^n\to B$ как замыкание множества L_B в пространстве $\Phi(R^n,B)$. Далее, через Σ° обозначим совокупность множеств $A\subset R^n$ таких, что их характеристические функции χ_A принадлежат $F(R^n,R)$.

ЛЕММА 2. Если $f\in F(R^n,B)$ и $E\in\Sigma^\circ$, то $f\cdot\chi_E\in F(R^n,B)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_m\in L_B$ и $f_m\to f$ в $F(R^n,B)$, а $\varphi_m\in L_R$ и $\varphi_m\to\chi_E$ в $F(R^n,R)$. Тогда при любых p и q для $f_p\cdot\varphi_q\in L_B$ имеем

$$\|f_p\varphi_q-f\chi_E\|\le \sup_{x\in R^n}\|f_p(x)\|_B\cdot\|\varphi_q-\chi_E\|+\|f_p-f\|,$$

причем $\|f_p-f\|=\varepsilon_p\to 0$. Для оценки первого слагаемого достаточно q_p выбрать так, что $\|\varphi_{q_p}-\chi_E\|<\varepsilon_p/\sup_{x\in R^n}\|f_p(x)\|_B$. Таким образом строится последовательность функций $f_p\varphi_{q_p}\in L_B$, сходящаяся к $f\chi_E$.

СЛЕДСТВИЕ. Σ° является алгеброй множеств.

Будем называть множество $E \subset R^n$ λ-периодическим ($\lambda \in R^n$, $\lambda > 0$), если оно измеримо по Лебегу и его характеристическая функция χ_E λ-периодическая, то есть

$$\chi_E(x_1+\lambda_1 k_1,\ x_2+\lambda_2 k_2, \dots, x_n+\lambda_n k_n) = \chi_E(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

для любого $x \in R^n$ и любых целых $k_1, k_2, \dots, k_n$. Можно показать, что любое λ-периодическое множество принадлежит Σ°.

ЛЕММА 3. Для любого $\lambda \in R^n$, $\lambda > 0$, и любого вещественного $0 < a \leq 1$ существует λ-периодическое множество E такое, что $\mathrm{I}\chi_E = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x_n - \lambda_n k \leq a\lambda_n \text{ для некоторого целого } k, \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, λ-периодическая, и из определения среднего легко получим $\mathrm{I}\chi_E = a$.

Через Σ_0 обозначим алгебру множеств, порожденную λ-периодическими множествами $E \subset R^n$ ($\lambda \in R^n$).

Введем обозначения: $\mathrm{I}_E f = \mathrm{I} f \chi_E$; $\nu(E) = \mathrm{I}\chi_E$.

ТЕОРЕМА. Пусть Σ — произвольная алгебра множеств $\Sigma^\circ \supseteq \Sigma \supseteq \Sigma_0$. Тогда для каждой функции $f \in F(R^n, B)$ множество $\Gamma_f = \{\mathrm{I}_E f : E \in \Sigma\}$ выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы состоит из трех частей.

1. Пусть λ, $\mu \in R^n$, $\mu > 0$, таковы, что $\lambda_k \mu_k$ не целое для некоторого $1 \leq k \leq n$. Тогда если E — произвольное μ-периодическое множество, то $\mathrm{I}_E\, e^{2\pi i(\lambda, x)} = 0$.

Действительно,

$$\left|\frac{1}{2M}\int_{-M}^{M} \chi_E(x) e^{2\pi i \lambda_k x_k}\, dx_k\right| \leq \frac{1}{2M}\left(\left|\int_0^{\mu_k} \chi_E(x) e^{2\pi i \lambda_k x_k}\, dx_k \cdot \sum_{|l| \leq \frac{M}{\mu_k}} e^{2\pi i \lambda_k \mu_k l}\right| + 2\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2M}\left(\frac{2\mu_k}{|e^{2\pi i \lambda_k \mu_k} - 1|} + 2\right) = \frac{A}{2M}.$$

Отсюда из теоремы Фубини легко следует, что $\mathrm{I}_E\, e^{2\pi i(\lambda, x)} = 0$.

2. Для каждой $f \in F(R^n, B)$ существует период μ такой, что для произвольного μ-периодического множества E выполняется равенство: $I_E f = \nu(E) I_f$.

Пусть

$$f_m(x) = c_0^m + \sum_{j \in J_m} (c_j^m \cos 2\pi(\lambda_j^m, x) + d_j^m \sin 2\pi(\lambda_j^m, x))$$

– последовательность функций из L_B, сходящаяся к f в пространстве $F(R^n, B)$ ($c_j^m \in B$; $d_j^m \in B$; $\lambda_j^m \in R^n$ и $\lambda_j^m \neq 0$; для каждого m множество J_m конечно).

Совокупность координат векторов λ_j^m не более чем счетна, поэтому существует вещественное $a > 0$, при котором каждый вектор $a\lambda_j^m$ имеет хотя бы одну нецелую координату. Тогда в качестве периода μ можно взять $a\omega$, где $\omega = (1, 1, \ldots, 1) \in R^n$. Действительно, пусть E – произвольное $a\omega$-периодическое множество. Из первой части доказательства $I_E f_m = \nu(E) c_0^m$. Очевидно, что $f_m \chi_E \to f \chi_E$ в $F(R^n, B)$. Следовательно, $I_E f = \nu(E) \lim_{m\to\infty} c_0^m$. Однако $\lim_{m\to\infty} c_0^m = I_f$.

3. Пусть $I_E f = a$, $I_G f = b$. Рассмотрим множества $E \setminus G$ и $G \setminus E$. По второй части доказательства и лемме 3 при любом $0 < p \leq 1$ существуют периодические множества E_1 и E_2 такие, что $I_{E_1} f \chi_{E\setminus G} = p I_{E\setminus G} f$, $I_{E_2} f \chi_{G\setminus E} = (1-p) I_{G\setminus E} f$. Для множества

$$A = [(E \setminus G) \cap E_1] \cup [(G \setminus E) \cap E_2] \cup (E \cap G)$$

имеем

$$I_A f = p I_{E\setminus G} f + (1-p) I_{G\setminus E} f + (p + 1 - p) I_{E\cap G} f = pa + (1-p) b.$$

Теорема доказана.

4°. Осталось показать, что рассмотренные в теореме ненулевые функции множеств не являются вполне аддитивными.

Заметим, что множество $E = \{x + (k_1 p, k_2 p, \ldots, k_n p) : |x| \leq M$: $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – произвольные целые $\}$ очевидно $p\omega$-периодическое. При этом $\nu(E) = \min\left(1, \left(\frac{2M}{p}\right)^n\right)$. Поэтому при любом вещественном $d > 0$ можно выбрать последовательность r_m $d\omega$-периодических множеств E_m (r_m рационально), та-

ких, что E_m содержит множество $\mathcal{U}_m = \{x : x \leq m\}$ и $\nu(E_m) < \frac{1}{2^{m+2}}$. То есть $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = R^n$, а $\sum_{m=1}^{\infty} \nu(E_m) < 1$. Тогда множества

$$G_1 = E_1, \dots, G_m = E_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} E_k$$

попарно не пересекаются, $\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = R^n$, а $\sum_m \nu(G_m) < 1$. Вторая часть доказательства теоремы позволяет выбрать d таким, чтобы $I_{E_0 \cap G} f = \nu(G) I_{E_0} f$ для любого $\tau d\omega$-периодического множества G (τ рационально). Но тогда очевидно $I_{E_0} f \neq \sum_{m=1}^{\infty} I_{E_0 \cap G_m} f$, если $I_{E_0} f \neq 0$.

Автор многим обязан своему научному руководителю, ныне покойному члену-корреспонденту АН СССР А.А.Ляпунову за большую помощь и внимание к раооте.

Литература

I. ЛЯПУНОВ А.А. О вполне аддитивных вектор-функциях. - "Изв. АН СССР, сер.мат." т.4, № 6 (1940), с. 465-478.

2. АРКИН В.И., ЛЕВИН В.Л. Выпуклость значений векторных интегралов. - "Успехи мат. наук", т. 27, № 3 (1972), с.21-78.

3. ДАНФОРД Н., ШВАРЦ Дж.Т. Линейные операторы. М., ИЛ, 1962, 812 с.

4. HALMOS P., The range of a vector measure. "Bull.Americ. Math. Soc.", v.54, 1948, pp.416-421.

Поступила в ред.-изд. отд.
5. IУ. 1974 г.