1975 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 16(33)

Выпуклый анализ

УДК 513.88

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ СУПРЕМАЛЬНЫМИ ГЕНЕРАТОРАМИ КОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Н.В.Рутковский

Для случая пространств непрерывных функций, определенных на экстремально несвязных компактах, соответствующая характеристика была получена в [4]. Там же показано, что из существования конечномерных генераторов в таких пространствах вытекает существование не более чем трехмерных генераторов.

В настоящей работе интересующая нас характеристика устанавливается для пространств непрерывных функций, определенных на произвольных хаусдорфовых компактах. Кроме того, доказывается, что в рассматриваемом общем случае из существования конечномерных генераторов вытекает существование не более чем четырехмерных генераторов. Ключом к решению исследуемых вопросов послужила установленная в [5] связь между супремальными генераторами и неприводимостью соответствующих отображений исходного хаусдорфова компакта.

Работа состоит из трех пунктов. В пункте 1 доказываются теоремы, сводящие исследуемые задачи к топологическим вопросам, касающимся неприводимых отображений. В пункте 2 приводится конструкция, позволяющая произвольный метрический компакт неприводимо отобразить в плоскость так, чтобы размерность образа не превосходила 1. На этом основывается доказательство основных результатов, приведенных в пункте 3.

1. Рассмотрим пространство $C(Q)$ непрерывных вещественных функций на хаусдорфовом компактном топологическом пространстве Q.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [1]). Подпространство $H\subset C(Q)$ называется супремальным генератором пространства $C(Q)$, если для каждого элемента $f\in C(Q)$ выполнены соотношения

$$\mathcal{U}_f=\{h\in H: h\leq f\}\neq\phi,\quad f=\sup\mathcal{U}_f,$$

где символ "$\sup$" обозначает верхнюю грань в частично упорядоченном множестве $C(Q)$.

Если H – подпространство в $C(Q)$, то отображение $\varphi_H: Q\rightarrow H^*$, определенное формулой $(\varphi_H(q))h=h(q)$, является непрерывным отображением компакта Q в сопряженное пространство H^*, наделенное слабой топологией $\sigma(H^*,H)$. Обозначим через Q_H множество $\varphi_H(Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [2]). Границей Шоке подпространства $H\subset C(Q)$ называется множество

$$B(H)=\varphi_H^{-1}(ex(\overline{co\,Q_H})),$$

где $ex(\overline{co\,Q_H})$ обозначает множество крайних точек замыкания $\overline{co\,Q_H}$ выпуклой оболочки $co\,Q_H$ множества Q_H.

Нам понадобится также топологическое понятие неприводимого отображения, которое непосредственно связано с понятием супремального генератора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [3]). Непрерывное отображение $f: A\rightarrow B$ топологического пространства A в топологическое пространство B называется неприводимым, если $f(F)\neq f(A)$ для каждого собственного замкнутого подмножества $F\subset A$.

Теперь мы дадим характеристику [см.5] подпространств $H\subset C(Q)$, являющихся супремальными генераторами пространства $C(Q)$.

Подпространство $H\subset C(Q)$, содержащее константы, является супремальным генератором пространства $C(Q)$ в том и только том случае, если отображение $\varphi_H: Q\rightarrow H^*$ неприводимо и граница Шоке $B(H)$ подпространства H плотна в Q.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: Q\rightarrow X$ - непрерывное отображение компакта Q на компакт X. Подпространство

$H=\{h=g\circ f : g\in C(X)\}$ является супремальным генератором пространства $C(Q)$ в том и только том случае, если отображение f неприводимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\psi : X \longrightarrow H^*$, определенное формулой $(\psi x)(g\circ f)=g(x)$. Легко видеть, что отображение ψ является гомеоморфизмом пространства X на множество $\psi(X)\subset H^*$, где пространство H^*, сопряженное к H, наделено слабой топологией $\sigma(H^*,H)$. Для отображения $\varphi_H : Q\longrightarrow H^*$ справедливы соотношения

$$(\varphi_H q)(g\circ f)=g(f(q))=(\psi f(q))(g\circ f)=((\psi\circ f)q)(g\circ f),$$

т.е. $\varphi_H=\psi\circ f$. Из этого соотношения следует, что неприводимость отображения φ_H эквивалентна неприводимости отображения f. Поскольку граница Шоке $B(H)$ в этом случае совпадает со всем компактом Q, то утверждение теоремы очевидно следует из приведенной характеристики.

ТЕОРЕМА 2. Пространство $C(Q)$ обладает конечномерными супремальными генераторами в том и только том случае, если существует неприводимое отображение компакта Q на конечномерный метрический компакт.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $H\subset C(Q)$ - конечномерный супремальный генератор, то отображение $\varphi_H : Q\longrightarrow H^*$ является неприводимым отображением компакта Q на компакт $X=\varphi_H(Q)$, расположенный в конечномерном векторном пространстве H^*.

Обратно, пусть $f : Q\longrightarrow X$ - неприводимое отображение, где X - конечномерный метрический компакт. Оператор $f^\circ : C(X)\to C(Q)$, определенный формулой $f^\circ(g)=g\circ f$, является изометричным и сохраняющим порядок. По теореме 1, подпространство $f^\circ[C(X)]$ есть супремальный генератор пространства $C(Q)$. Легко видеть, что если $H'\subset C(X)$ - супремальный генератор пространства $C(X)$, то подпространство $H=f^\circ[H']$ является супремальным генератором пространства $C(Q)$. Как известно (см. [I]), в пространстве $C(X)$ существует конечномерный

генератор H'. Следовательно, подпространство $H=f^\circ[H']$ является конечномерным супремальным генератором пространства $C(Q)$.

2. Здесь мы покажем, что для произвольного метрического компакта X существует неприводимое отображение $f: X \to R^2$ такое, что $\dim f(X) \leq 1$. Обозначим через I единичный отрезок [0,I] и через I^w -гильбертов кирпич. Опишем сначала некоторый класс подмножеств I^w, размерность которых не превосходит I, а затем построим неприводимое отображение $f: X \to I^w$ метрического компакта X в гильбертов кирпич I^w таким образом, чтобы множество $f(X)$ принадлежало выделенному классу. Пусть $p_i: I^w \to I$ является i-й координатной функцией гильбертова кирпича I^w. Для множества $M \subset I^w$ обозначим через M_i совокупность точек $t \in I$, для которых множество $p_i^{-1}(t) \cap M$ состоит не более чем из одной точки.

ЛЕММА I. Если для любого индекса $i \in N$ множество M_i плотно в отрезке I, то размерность множества M не превосходит I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in M$ и V - окрестность точки m. Тогда найдется конечное множество индексов $K \subset N$ и интервалы $W_j \subset I \ (j \in K)$, содержащие внутри себя точки $p_i(m)$ так, что $(\bigcap_{j \in K} p_j^{-1} W_j) \cap M \subset V$. Легко видеть, что интервалы W_j можно выбрать так, что их граница в отрезке I содержится в множестве M_j. При таком выборе интервалов W_j граница множества $(\bigcap_{j \in K} p_j^{-1} W_j) \cap M$ в пространстве M состоит из конечного числа точек. Отсюда следует, что размерность множества M в точке m не больше I. Поскольку точка $m \in M$ произвольна, то $\dim M \leq 1$.

Пусть $f: X \to I$ -непрерывная функция на метрическом компакте X. Обозначим через Γ_f множество точек $x \in X$, для которых найдется окрестность $V_x \ni x$ такая, что $f(y)=f(x)$ для $y \in V_x$.

Скажем, что функция $f: X \to I$ обладает свойством (p) если множество Γ_f плотно в X.

ЛЕММА 2. Если F - замкнутое подмножество метрического компакта X, то существует непрерывная функция $f: X \longrightarrow I$, обладающая свойством (p), для которой $f^{-1}(0)=F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в метрическом пространстве каждое замкнутое подмножество является G_δ -множеством, то существует непрерывная функция $f_0: X \longrightarrow I$, для которой $f_0^{-1}(0)=F$. Если $0 \in \overline{I \setminus f_0(X)}$, то найдется последовательность $\{t_n\}_1^\infty$ точек $t_n \in I \setminus f_0(X)$, монотонно стремящаяся к нулю и такая, что $t_{n+1} < t_n$ при $n = 1, 2, \ldots$.

Определим функцию $f: X \xrightarrow{n} I$ следующим правилом:

$$f(x)=\begin{cases} t_1, \text{ если } f_0(x)>t_1, \\ t_{n+1}, \text{ если } t_{n+1}<f_0(x)<t_n, \ n=1,2,\ldots, \\ 0, \text{ если } x \in F. \end{cases}$$

Очевидно, что так определенная функция f непрерывна, удовлетворяет условию (p) и соотношению $f^{-1}(0)=F$.

Предположим теперь, что найдется число $\alpha \in (0,1]$, для которого имеет место включение $[0,\alpha] \in f_0(X)$. Рассмотрим непрерывную функцию $\varphi(x)=\frac{1}{\alpha}\min(f_0(x),\alpha)$. Для этой функции справедливы соотношения $\varphi^{-1}(0)=F$, $\varphi(X)=I$. Поскольку точечно-множественное отображение $t \longmapsto \varphi^{-1}(t)$ полунепрерывно сверху, то множество A_0 точек непрерывности этого отображения является плотным G_δ -подмножеством отрезка I. Множество $A=A_0 \cup \{0,1\}$ также является плотным G_δ -подмножеством отрезка I. Нетрудно показать, что существует компактное, совершенное, нигде не плотное подмножество T из A, содержащее концы отрезка I. Если $t_0 \in A_0$, то найдется последовательность $\{t_n\}_1^\infty$ точек из $I \setminus T$, сходящаяся к t_0. Ввиду непрерывности $\varphi^{-1}(t_0)=\lim_{n\to\infty}\varphi^{-1}(t_n)$. Отсюда следует, что если $x \in \varphi^{-1}(I \setminus T)$, то $\varphi(x) \in \{0,1\}$ и, значит, $x \in \Gamma_\varphi$. Выберем теперь непрерывную монотонную функцию $g: I \to I$, множество точек роста которой совпадает с T и для которой $g(0)=0$, $g(1)=1$. Тогда для функции $f=g \circ \varphi$ выполнены соотношения $\Gamma_\varphi \subset \Gamma_f$, $\varphi^{-1}(I \setminus T) \subset \Gamma_f$, $f^{-1}(0)=F$.

Следовательно, $\overline{\Gamma_f} = X$ и функция $f: X \longrightarrow I$ является искомой.

Предположим, что на компакте X задано не более чем счетное семейство $\{f_j\}_{j\in I}$ непрерывных функций $f_j: X \longrightarrow I$, обладающих свойством (p), для которого выполнены следующие условия.

1. Для $i \neq j$ справедливо одно из соотношений:

а) $G_i \cap G_j = \emptyset$; б) $G_i \subset G_j$; в) $G_j \subset G_i$, где $G_i = f_i^{-1}(0,1]$.

2. Если $G_i \subset G_j$, то найдутся конечное множество $K \subset I$ и число $t \in (0,1]$ такие, что $G_k \subset f_j^{-1}(t)$, $G_{k_1} \cap G_{k_2} = \emptyset$ при $k_1 = k_2$, $k, k_1, k_2 \in K$, причем $\delta(G_k) < \frac{1}{2}\delta(f_j^{-1}(t))$, где $\delta(Y)$ обозначает диаметр множества $Y \subset X$ и $\bigcup_{k\in K} \overline{G}_k \supset \overline{(f_j^{-1}(t))}$.

3. $\overline{\bigcup_{j\in I} G_j} = X$.

Такие семейства существуют, и пример дает семейство, состоящее из единственной функции $f: X \longrightarrow I$, обладающей свойством (p) и такой, что $f^{-1}(0) = \emptyset$. Скажем, что семейство $\{f'_j\}_{j\in I'}$ есть расширение семейства $\{f_j\}_{j\in I}$, если $I \subset I'$ и $f_j = f'_j$ при $j \in I$. Положим $I_\varepsilon = \{j \in I : \delta(G_j) < \varepsilon\}$.

ЛЕММА 3. Пусть задано семейство $\{f_j\}_{j\in I}$ функций $f_j: X \longrightarrow I$, обладающих свойством (p), для которого выполнены условия 1, 2, 3. Если $\overline{\bigcup_{j\in I_\varepsilon} G_j} = X$ при заданном $\varepsilon > 0$, то найдется расширенное семейство $\{f_j\}_{j\in I'}$ функций, обладающих свойством (p), удовлетворяющее условиям 1, 2, 3 и такое, что $\bigcup_{j\in I'_\varepsilon} G_j = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $A = (\bigcap_{j\in I} \Gamma_{f_j}) \cap (\bigcup_{j\in I} G_j)$ является плотным G_δ-подмножеством компакта X. Пусть $x \in A \setminus \overline{\bigcup_{j\in I_\varepsilon} G_j}$. В силу свойства 2 найдутся индекс j_x и точка $t_x \in (0,1]$ такие, что $x \in (f_{j_x}^{-1}(t_x))$, и если $x \in G_j$, то $G_j \supset G_{j_x}$. Обозначим через L_x множество $(f_{j_x}^{-1}(t_x))$. Учитывая свойства 1,2,

легко видеть, что различные множества L_x и L_y не пересекаются. Итак, множество $A \setminus \bigcup_{j\in I_t} G_j$ содержится в объединении непересекающихся открытых множеств. Так как пространство X сепарабельно, то таких множеств не более чем счетно. Пусть $\{L_1, L_2, \dots\}$ – все такие множества, причем $L_i \neq L_j$ при $i \neq j$. Очевидно, что множества $L_m (m \in N)$ не содержат множеств $G_j (j \in I)$, и если $\overset{\circ}{L}_m \cap G_j \neq \emptyset$, то $L_m \subset G_j$ и $\exists t \in (0,1]$ такое, что $L_m \subset (f_j^{-1}(t))$. В каждом множестве L_m выберем конечную систему попарно непересекающихся открытых множеств $\{G_1^m, \dots, G_{n_m}^m\}$ такую, что $\delta G_j^m < \min(\frac{1}{2}\delta L_m, \varepsilon)$ и $L_m \subset \bigcup_{j=1}^{n_m} \overline{G_j^m}$. Построим семейство функций $\{f_j^m\}_{j=1}^{n_m}$, обладающих свойством (p), для которых $G_j^m = (f_j^m)^{-1}(0,1]$. Образуем семейство функций $\{f_j'\}_{j\in I'}$, являющееся объединением семейств $\{f_j^m\}_{j=1}^{n_m}$ по различным $m \in N$ вместе с семейством $\{f_j\}_{j\in I}$. По построению, полученное расширение удовлетворяет условиям 1,2,3. Множество $\bigcup_{j\in I_t'} G_j$ содержит множество $\bigcup_{j\in I_t} G_j$ и является плотным в множестве $X \setminus \bigcup_{j\in I_t} G_j$. Следовательно, $\overline{\bigcup_{j\in I_t'} G_j} = X$, и лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Если X – метрический компакт, то существует неприводимое отображение $f: X \longrightarrow I^w$ такое, что $\dim f(X) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 3, построим последовательность расширяющихся семейств $(\{f_j\}_{j\in I^m})_1^\infty$, состоящих из функций $f_j : X \longrightarrow I$, удовлетворяющих свойству (p), для которых выполнены условия 1,2,3 и соотношение $\overline{\bigcup_{j\in I_{1/m}^m} G_j} = X$. Перенумеруем счетное множество $I = \bigcup_{m=1}^\infty I^m$ натуральными числами. Получим семейство $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ функций (обладающих свойством (p)), для которого выполнены условия 1,2,3, и для каждого непустого открытого множества $U \subset X$ найдется $i \in N$ такое, что $f_i^{-1}(0,1] \subset U$, причем $f_i^{-1}(0,1] \neq \emptyset$. Произведение $f: X \longrightarrow I^w$ отображений $f_i : X \longrightarrow I$, задаваемое формулой $f(x) = (f_i(x))_{i=1}^\infty$, является непрерывным неприводимым отображением, ибо если $F \subset X$

–собственное замкнутое подмножество, то найдется индекс $i \in N$, для которого $f_i(F)=0$ и $G_i \neq \emptyset$. Положим $M=f(X)$.

Пусть $f_j^{-1}(t) \cap \Gamma_{f_j} = \emptyset$ $(t>0)$. Если $G_i \cap G_j = \emptyset$, то $f_i(f_j^{-1}(t)) \subset \{0\}$, если $G_i \supset G_j$, то, по условию 2, найдется $t_1 \in [0,1]$ такое, что $f_i(G_j)=\{t_1\}$. В случае $G_i \subset G_j$ имеем $G_i \subset \Gamma_{fj}$, и, значит, $f_i(f_j^{-1}(t))=\{0\}$. Из этого следует, что имеет место включение $I \setminus f_j(\Gamma_{fj}) \subset M_j$. Поскольку множество $f_j(\Gamma_{fj})$ не более чем счетно, то $\bar{M}_j = I$. На основании леммы I заключаем, что $\dim f(X) \leq 1$.

ТЕОРЕМА 3. Если X – метрический компакт, то существует неприводимое отображение $f: X \longrightarrow R^2$ такое, что $\dim f(X) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f^0: I^3 \longrightarrow Z$ – неприводимое отображение трехмерного куба в одномерное компактное пространство Z. Существует пространство Y и монотонное отображение $f_0: I^3 \to Y$ (т.е. множество $f_0^{-1}(y)$ связно для каждого $y \in Y$), а также нульмерное отображение $g: Y \longrightarrow Z$ такие, что $f^0 = g \circ f_0$ (см. [6, стр. 192]). При этом пространство Y одномерно и уникогерентно (см. [6, стр. 172]) и потому гомеоморфно вкладывается в R^2 (см. [6, стр. 439]).

Отображение f_0 неприводимо, и множество $A=\{x \in I^3 : f_0^{-1}(f_0(x))=\{x\}\}$ точек взаимной однозначности отображения f_0 является плотным G_δ – подмножеством в кубе I^3. Для каждого не более чем одномерного компакта M существует гомеоморфное вложение $\varphi: M \longrightarrow I^3$ такое, что $\varphi(M) \cap A$ плотно в $\varphi(M)$ (см. [6, стр. 474]). Тогда $f_0 \circ \varphi$ есть неприводимое отображение компакта M в компакт Y, вкладываемый в R^2. По лемме 4, для данного метрического компакта X существует неприводимое отображение $f_1: X \longrightarrow M$ на компакт M, для которого $\dim M \leq 1$. Далее, в силу сказанного, существует неприводимое отображение $g_1: M \longrightarrow R^2$, для которого $\dim g_1(M) \leq 1$. Поскольку суперпозиция неприводимых отображений является неприводимым отображением, то $f = g_1 \circ f_1$ является искомым отображением.

3. Охарактеризуем теперь произвольные компакты Q, допускающие неприводимое отображение в плоскость R^2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см.[3]). Система Σ открытых подмножеств топологического пространства X называется π-базой пространства X, если для каждого открытого множества $G \subset X$ найдется $V \in \Sigma$ такое, что $V \subset G$.

Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью π-базы в X называется π-весом.

Известно (см. [3]), что если $f : Q \xrightarrow{на} X$ – неприводимое отображение компактов, то π-вес пространства Q – равен π-весу пространства X. Если при этом компакт X метризуем, то пространство Q имеет счетный π-вес. Обратно, из теоремы Пономарева (см. [3]) следует, что компакт со счетным π-весом можно неприводимо отобразить на метризуемый компакт. Комбинируя этот факт с теоремой 3, получаем следующую характеристику.

ТЕОРЕМА 4. Компакт Q имеет счетный π-вес в том и только том случае, когда существует неприводимое отображение $f : Q \longrightarrow R^2$ такое, что $\dim f(Q) \leq 1$.

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему о пространствах, обладающих конечномерными супремальными генераторами.

ТЕОРЕМА 5. Пусть Q – компактное хаусдорфово пространство. В пространстве $C(Q)$ существует конечномерный супремальный генератор в том и только том случае, если компакт Q имеет счетный π-вес.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 пространство $C(Q)$ имеет конечномерный генератор тогда и только тогда, когда существует неприводимое отображение компакта Q на конечномерный метрический компакт. На основании цитированной теоремы Пономарева и теоремы 4 заключаем, что класс таких компактов совпадает с классом компактов, имеющих счетный π-вес.

ТЕОРЕМА 6. Если Q – компакт счетного π-веса, то пространство $C(Q)$ имеет супремальный генератор размерности, не превышающей 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4, существует неприводимое отображение $f: Q \longrightarrow R^2$. Пусть $X = f(Q)$. Известно (см. [I]), что пространство $C(X)$ имеет супремальный генератор H', размерность которого не больше 4. На основании теоремы I заключаем, что подпространство $H = \{h = h' \circ f : h' \in H\}$ является супремальным генератором пространства $C(Q)$ размерности не более 4.

В заключение автор выражает благодарность Г.Ш.Рубинштейну и С.С.Кутателадзе за внимание к работе.

Литература

1. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и ее приложения.-"Успехи мат.наук", 1972, т.27, №3, с.127-176.
2. ФЕЛПС Р. Лекции о теоремах Шоке. "Мир", М., 1968.
3. ПОНОМАРЕВ В.И. О пространствах, соабсолютных с метрическими.-"Успехи мат.наук", 1966, т.21, №4, с. 101-131.
4. РУТКОВСКИЙ Н.В. О супремальном ранге K -пространств. - В кн.: Оптимизация. Вып. 3(20), Новосибирск, 1971, с.159-162.
5. РУТКОВСКИЙ Н.В. Супремальные генераторы в пространствах непрерывных функций. - В кн.: Оптимизация. Вып. 14(31), Новосибирск, 1974, с. 130-141.
6. КУРАТОВСКИЙ К. Топология. т. 2, "Мир", 1969.

Поступила в ред.-изд. отд.
12. III. 1975 г.