1975 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 16 (33)

Выпуклый анализ

УДК 513.88

# СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

А.А.Толстоногов

Рассматриваются выпуклые функционалы $f_n$, определенные на открытом выпуклом подмножестве $U$ бочечного пространства $X$ и непрерывные в точке $x_0 \in X$. Для последовательностей $\{f_n\}_1^\infty$ и рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, сходящихся в топологии поточечной сходимости, описываются субдифференциалы в точке $x_0$ к функционалам $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ и $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Для функционалов вида $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ результаты являются обобщением и уточнением известных [1,2].

## § 1

Пусть $X$ — бочечное пространство, $X'$ — его топологически сопряженное с сильной топологией, $X'_*$ — пространство $X'$ с $\sigma(X',X)$ топологией, $\langle x, x'\rangle$ — каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между $X$ и $X'$.

Субдифференциалом выпуклого функционала $f$, определенного на выпуклом открытом подмножестве $U \subset X$, в точке $x_0 \in U$ называется множество

$$\partial f(x_0) = \{x' \in X' : \langle x - x_0, x'\rangle \le f(x) - f(x_0), \quad \forall x \in U\}.$$

Для всякого $x \in X$ существует число

$$f'(x^0, x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{f(x_0 + \varepsilon x) - f(x)}{\varepsilon}, \qquad (\text{I.I})$$

называемое производной по направлению $x$ функционала $f$ в точке $x_0$ .

. Известно, что если $f$ непрерывен в точке $x_0$ , то $f'(x_0, \cdot)$ – непрерывный сублинейный функционал на $X$ , $\partial f(x_0)$ – непусто, выпукло и компактно в $X'_*$ и $\partial f(x_0) = \partial f'(x_0, 0)$ , причем

$$f'(x_0, x) = \sup_{x' \in \partial f(x_0)} \langle x, x' \rangle .$$

Обозначим через $\mathcal{L}(x)$ пространство всех непрерывных сублинейных функционалов, определенных на $X$ , с топологией поточечной сходимости, а через $con\,v(X'_*)$ – пространство всех непустых, выпуклых, компактных подмножеств $X'_*$ с экспоненциальной топологией (топологией Вьеториса), порожденной топологией пространства $X'_*$ . Элементами открытой базы этой топологии являются множества вида

$$[U_0, U_1, \dots, U_n] = \{A \in con\,v(X'_*);\ A \subset U_0,\ A \cap U_i \neq \emptyset,\ i = 1, \dots, n\},$$

где $U_0, U_1, \dots, U_n$ открыты в $X'_*$ .

Поставим в соответствие каждому элементу $f \in \mathcal{L}(x)$ его субдифференциал в нуле $\partial f(x_0)$ . Тем самым определено отображение $F: \mathcal{L}(x) \to con\,v(X'_*)$.

Множество $H \subset \mathcal{L}(x)$ ( $\theta \subset con\,v(X'_*)$ ) назовем ограниченным, если существует элемент $\varphi \in \mathcal{L}(x)$ ( $B \in con\,v(X'_*)$) такой, что

$$f \leq \varphi,\ \forall f \in H \quad (A \subset B,\ \forall A \in \theta).$$

Следующие утверждения носят вспомогательный характер и достаточно очевидны.

ЛЕММА I.I. Множество $H \subset \mathcal{L}(x)$ ( $\theta \subset con\,v(X'_*)$) ограничено тогда и только тогда, когда $\sup_{f \in H} f(x) < \infty,\ \forall x \in X$,

$$(\sup_{x' \in \{\cup A,\ A \in \theta\}} \langle x, x' \rangle < \infty,\ \forall x \in X).$$

ЛЕММА I.2. Множество $H \subset \mathcal{L}(x)$ $(\theta \subset conv(X'_*))$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

ТЕОРЕМА I.I. Если $H \subset \mathcal{L}(x)$ – компакт, то сужение отображения $F: \mathcal{L}(x) \longrightarrow conv(X'_*)$ на $H$ есть гомеоморфизм $H$ на $F(H)$.

## § 2

Всюду, где речь будет идти о последовательностях $\{f_n\}_1^\infty$ и рядах $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ функционалов, предполагается, что $f_n$ определены на множестве $U(x_o)$, выпуклы и непрерывны в точке $x_o$, а множество $U(x_o)$ имеет вид $U(x_o)=x_o+R(0)$, где $R(0)$ – некоторая выпуклая, уравновешенная, открытая окрестность нуля.

Сформулируем теперь основные результаты этого параграфа.

ТЕОРЕМА 2.I. Предположим, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)-f_n(x_o)|$ поточечно сходятся на $U(x_o)$. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x_o,\cdot)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \partial f_n(x_o)$ сходятся в $\mathcal{L}(x)$ и $conv(X'_*)$, соответственно. При этом

1) $$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)'(x_o,\cdot)=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_o,\cdot),$$

2) $$\partial\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)(x_o)=\sum_{n=1}^{\infty} \partial f_n(x_o).$$

ЛЕММА 2.I. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)-f_n(x_o)|$ поточечно сходятся на $U(x_o)$ и $X$ сепарабельно, то

$$\partial\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)(x_o)=\bigcap_{n}\overline{\bigcup_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n+i} \partial f_k(x_o)\Big)},$$

где черта означает замыкание в $X'_*$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. При выполнении условий теоремы 2.1 множество $\partial(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)(x_0)$ состоит из сумм всех сходящихся в $\sigma(X',X)$ топологии рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$, $x'_n \in \partial f_n(x_0)$.

Пусть $Z$ – бочечное пространство, $A: Z \to X$ – непрерывный линейный оператор, $x_0 = A z_0$. Тогда существует выпуклая открытая окрестность $V(z_0)$ точки $z_0$ такая, что $A(V(z_0)) \subset U(x_0)$ и на $V(z_0)$ определены и непрерывны выпуклые функционалы $g_n$, $g_n(z) = f_n(Az)$.

ТЕОРЕМА 2.2. Предположим, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(x_0)|$ поточечно сходятся на $U(x_0)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ сходится поточечно на $V(z_0)$, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} g'_n(z_0;\cdot)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \partial g_n(z_0)$ сходятся в $\mathcal{L}(z)$ и $con\, \sigma(Z'_*)$, соответственно. При этом

1) $$(\sum_{n=1}^{\infty} g_n)'(z_0,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(z_0;\cdot),$$

2) $$\partial(\sum_{n=1}^{\infty} g_n)(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial g_n(z_0) = A^* \partial(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)(A z_0).$$

где $A^*$ оператор, сопряженный с $A$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть выполняются условия теоремы 2.2 и $Z$ сепарабельно. Тогда

$$\partial(\sum_{n=1}^{\infty} g_n)(z_0) = \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} (\sum_{k=1}^{n+i} \partial g_k(z_0))}',$$

где черта означает замыкание в $Z'_*$. Если и $X$ сепарабельно, то

$$\partial(\sum_{n=1}^{\infty} g_n) z_0 = \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} (\sum_{k=1}^{n+i} \partial g_k(z_0))} = A^* \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} (\sum_{k=1}^{n+i} \partial f_k(A z_0))},$$

где черта означает замыкание в $Z'_*$ и $X'_*$.

Если $X$ — нормированное пространство, то через $\mathcal{L}m(x)$ будем обозначать пространство $\mathcal{L}(x)$ с метрикой

$$\rho_{\mathcal{L}}(\varphi,f)=\sup_{\|x\|<1}|\varphi(x)-f(x)|, \quad f,\ \varphi\in\mathcal{L}(x),$$

а через $con\,v(X'_*)_m$ — пространство $con\,v(X'_*)$ с метрикой Хаусдорфа

$$dist(A,B)=\max\left(\sup_{x'\in B}\rho(x',A),\ \sup_{y'\in A}\rho(y',B)\right),$$

где $A$, $B\in con\,v(X'_*)$, $\rho(\cdot,\cdot)$ метрика в $X'$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $X$ — нормированное пространство. Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ поточечно сходится на $U(x_0)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in U(x_0)}|f_n(x)-f_n(x_0)|<\infty .$$

Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0,\cdot)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\partial f_n(x_0)$ сходятся в $\mathcal{L}_m(x)$ и $con\,v(X'_*)_m$, соответственно, и

1) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x_0,\cdot)=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0,\cdot)$,

2) $\partial\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\partial f_n(x_0)=\bigcap_{n}\overline{\bigcup_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+i}\partial f_k(x_0)\right)}$,

где черта означает замыкание в $X'_*$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. В условиях теоремы 2.3 множество $\partial\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)(x_0)$ состоит из сумм всех сильно сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$, $x'_n\in\partial f_n(x_0)$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $X$ и $Z$ — нормированные пространства. Предположим,

что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ поточечно сходится на $U(x_0)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in U(x_0)} |f_n(x) - f_n(x_0)| < \infty .$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ сходится поточечно на $V(z_0)$, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(z_0, \cdot)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \partial g_n(z_0)$ сходятся в $\mathcal{L}_m(z)$ и $conv(Z_*')_m$, соответственно. При этом

$$1)\quad \Big(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\Big)'(z_0,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(z_0,\cdot),$$

$$2)\quad \partial\Big(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\Big)(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial g_n(z_0) = A^*\partial\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)(Az_0) =$$

$$= \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n+i} \partial g_k(z_0)\Big)} = A^* \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n+i} \partial f_k(Az_0)\Big)},$$

где черта означает замыкание в $X'$ и $Z'$.

Эти утверждения являются следствиями более общих результатов о субдифференциале предела последовательности выпуклых функционалов, к изложению которых мы и переходим.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Функционал $q$, определенный на $U(x_0) \times X$, назовем непрерывным в точке $x_0$ по направлению $y \in R(0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha_0$, $0 < \alpha_0 \le 1$, такое, что

$$|q(x_0 + \alpha y, y) - q(x_0, y)| \le \varepsilon, \quad \forall \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \alpha_0 .$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** Если $f$ — выпуклый функционал, определенный на $U(x_0)$ и непрерывный в $x_0$, то $f'$ (1.1) непрерывен в точке $x_0$ по любому направлению $y \in R(0)$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прежде всего $f'$ определен на $U(x_0) \times X$. Пусть $y \in R(0)$ и $\varphi(t) = f(x_0 + ty)$, $t \in [-1, 1]$. Поскольку функция $\varphi$ выпукла, существует производная справа

$$\varphi'_+(\alpha)=\lim_{\substack{t\to\alpha\\ t>\alpha}}\frac{\varphi(t)-\varphi(\alpha)}{t-\alpha}=f'(x_0+\alpha y,y),$$

причем функция $\varphi'_+$ не убывает и $\varphi'_+(0)=\lim\limits_{\alpha\to+0}\varphi'_+(\alpha)$ . Но это означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\alpha_0$ , $0<\alpha_0\leq 1$, такое, что

$$|f'(x_0+\alpha y,y)-f'(x_0,y)|\leq\varepsilon,\ \forall\alpha,\ 0\leq\alpha\leq\alpha_0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\{q_n\}_1^\infty$ — последовательность функционалов на $U(x_0)\times X$ . Будем говорить, что последовательность $\{q_n\}_1^\infty$ равностепенно непрерывна в точке $x_0$ по направлению $y\in R(0)$ , если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\alpha_0$ , $0<\alpha_0<1$ , что

$$|q_n(x_0+\alpha y,y)-q_n(x_0,y)|\leq\varepsilon,\ \forall\alpha,\ 0\leq\alpha\leq\alpha_0,\ \forall n.$$

Будем говорить, что последовательность $\{q_n\}_1^\infty$ равномерно сходится к функционалу $q$ в точке $x_0$ по направлению $y\in R(0)$ , если для любого $\varepsilon>0$ найдутся $\alpha_0$, $0<\alpha_0\leq 1$, и $n_0(\varepsilon)$ такие, что

$$|q(x_0+\alpha y,y)-q_n(x_0+\alpha y,y)|\leq\varepsilon,\ \forall\alpha,\ 0<\alpha<\alpha_0,\ \forall n>n_0(\varepsilon).$$

Очевидно, что поточечная сходимость последовательности сублинейных функционалов $\{f_n\}_1^\infty$ на $R(0)$ влечет за собой ее поточечную сходимость на всем $X$ и сублинейность предельного функционала.

ТЕОРЕМА 2.I.* Если: а) последовательность $\{f_n\}_1^\infty$ поточечно сходится на $U(x_0)$; б) последовательность $\{f_n\}_1^\infty$ равностепенно непрерывна в точке $x_0$ по любому направлению $y\in R(0)$ ; в) последовательность $\{f'_n(x_0,\cdot)\}_1^\infty$ сходится в $\mathcal{L}(x)$ , то

I) последовательность $\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty$ сходится в $con\,v(X_*)$ и

2) $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)'(x_0,\cdot)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_0,\cdot)$,

3) $\partial(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} \partial f_n(x_0)$,

причем $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)'(x_0,\cdot)$ является непрерывным сублинейным функционалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предел $f$ последовательности $\{f_n\}_1^\infty$ является выпуклым функционалом, определенным на $U(x_0)$. Поэтому для любого $x\in U(x_0)$ на $X$ определены сублинейные функционалы $f_n'(x,\cdot)$ и $f'(x,\cdot)=(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)'(x,\cdot)$. Пусть $\psi(\cdot)$ – предел последовательности $\{f_n'(x_0,\cdot)\}_1^\infty$. Как следует из лемм I.I, I.2, $\psi(\cdot)$ является непрерывным сублинейным функционалом. Возьмем $y\in R(0)$. Для $t\in(-1,1)$ имеет смысл выражение

$$\left|\frac{f(x_0+ty)-f(x_0)}{t}-\psi(y)\right|\le|\psi(y)-f_n'(x_0,y)|+$$
$$\left|\frac{f_n(x_0+ty)-f_n(x_0)}{t}-f_n'(x_0,y)\right|+\left|\frac{f_n(x_0+ty)-f(x_0+ty)}{t}\right|+ \tag{2.I}$$
$$+\left|\frac{f_n(x_0)-f(x_0)}{t}\right|.$$

Из свойств выпуклых функций легко получить неравенство

$$\left|\frac{f_n(x_0+ty)-f_n(x_0)}{t}-f_n'(x_0,y)\right|\le|f_n'(x_0+ty,y)-f_n'(x_0,y)|. \tag{2.2}$$

Из неравенств (2.I), (2.2) и условий теоремы следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\alpha_0>0$ такое, что

$$\left|\frac{f(x_0+ty)-f(x_0)}{t}-\psi(y)\right|\le\varepsilon,\ \forall t,\ 0<t<\alpha_0 .$$

Отсюда с очевидностью вытекает

$$f'(x_0,y)=\psi(y) . \tag{2.3}$$

Учитывая смысл $f'(x_0,y)$, $\psi(y)$, произвольность $y\in R(0)$ и (2.3), получим

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)'(x_0,y)=\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0,y),\ \forall y\in X . \tag{2.4}$$

Непрерывность $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)'(x_0,\cdot)$ следует из непрерывности $\psi(\cdot)$ и равенства (2.3). Из сходимости последовательности $\{f_n'(x_0,\cdot)\}_1^\infty$ лемм I.I и I.2 вытекает, что множество

$\{f'_n(x_0,\cdot)\}_1^\infty \subset \mathcal{L}(x)$ является относительным компактом. Тогда остальные утверждения теоремы вытекают из теоремы I.I и соотношения (2.4).

**ЛЕММА 2.I.*** Пусть $X$ сепарабельно и выполняются условия теоремы 2.I. Тогда

$$\partial(\lim_{n\to\infty} f_n)(x_0) = \lim_{n\to\infty} \partial f_n(x_0) = \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \partial f_{n+i}(x_0)},$$

где черта означает замыкание в $X'_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как последовательность $\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty$ сходится, то, в силу лемм I.I и I.2, множество $cl\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty$, где $cl$ означает замыкание в $conv(X'_*)$, является компактом. Тогда легко показать, что множество $\mathcal{Y} = \{\cup B, B \in cl\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty\}$ является компактом в $X'_*$. Обозначим через $conv(\mathcal{Y})$ совокупность всех непустых, выпуклых, компактных в $\sigma(X',X)$ топологии подмножеств $\mathcal{Y}$ с топологией, индуцированной топологией пространства $conv(X'_*)$. Из сепарабельности $X$ следует метризуемость $\mathcal{Y}$ в $\sigma(X',X)$ топологии. Тогда $conv(\mathcal{Y})$ можно метризовать с помощью метрики Хаусдорфа, не изменяя топологии на $conv(\mathcal{Y})$ [3,стр.54]. Так как $\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty \subset conv(\mathcal{Y})$, то последовательность $\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty$ сходится в метрике Хаусдорфа. Но сходимость в метрике Хаусдорфа влечет сходимость в смысле топологических пределов [4, стр.350], т.е.

$$\partial(\lim_{n\to\infty} f_n)(x_0) = \lim_{n\to\infty} \partial f_n(x_0) = \mathcal{L}im\, \partial f_n(x_0), \tag{2.5}$$

где $\mathcal{L}im\, \partial f_n(x_0)$ – топологический предел [4, стр.347] последовательности множеств $\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty$. Так как $\mathcal{L}im\, \partial f_n(x_0) = \mathcal{L}s\, \partial f_n(x_0)$, где $\mathcal{L}s$ – верхний топологический предел, то утверждение леммы вытекает из свойств верхнего топологического предела [4, стр. 345].

**СЛЕДСТВИЕ 2.I.*** Пусть $X$ сепарабельно и выполняются условия теоремы 2.I.* Тогда множество $\partial(\lim_{n\to\infty} f_n)(x_0)$ со-

стоит из пределов всех сходящихся в $\sigma(X',X)$ топологии последовательностей $\{x'_n\}_1^\infty$, $x'_n \in \partial f_n(x_0)$.

При доказательстве леммы 2.I* была установлена справедливость соотношения (2.5). Так как топологический предел $\mathcal{L}im\, \partial f_n(x_0)$ равняется нижнему топологическому пределу $\mathcal{L}i\, \partial f_n(x_0)$, то следствие непосредственно вытекает из определения нижнего топологического предела [4, стр. 343].

Пусть $Z$ – бочечное пространство, $A: Z \to X$ – непрерывный линейный оператор, $x_0 = A z_0$. Тогда существует выпуклая открытая окрестность $V(z_0)$ точки $z_0$, $A(V(z_0)) \subset U(x_0)$, на которой определены и непрерывны выпуклые функционалы $g_n$, $g_n(z) = f_n(Az)$

ТЕОРЕМА 2.2.* Пусть для последовательности $\{f_n\}_1^\infty$ выполняются условия теоремы 2.I*. Тогда: а) последовательность $\{g_n\}_1^\infty$ сходится поточечно на $V(z_0)$; б) последовательность $\{g'_n(z_0,\cdot)\}_1^\infty$ сходится в $\mathcal{L}(z)$; в) последовательность $\{\partial g_n(z_0)\}_1^\infty$ сходится в $conv(Z'_*)$. При этом

I) $(\lim\limits_{n\to\infty} g_n)'(z_0,\cdot) = \lim\limits_{n\to\infty} g'_n(z_0,\cdot)$,

2) $\partial(\lim\limits_{n\to\infty} g_n)(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \partial g_n(z_0) = A^* \partial(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(Az_0)$,

где $A^*$ – сопряженный с $A$ оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя непрерывность $A$ и очевидное соотношение $g'_n(z_0+\alpha z, z) = f'_n(x_0+\alpha y, y)$, где $x_0 = Az_0$, $y = Az$, легко установить, что для последовательности выпуклых функционалов $\{g_n\}_1^\infty$, определенных на $V(z_0)$, выполняются условия теоремы 2.I.* Поэтому утверждения а) – в), I) теоремы вытекают из теоремы 2.I.* Из этой же теоремы и соотношения $\partial g_n(z_0) = A^* \partial f_n(Az_0)$ [5, стр.6] имеем

$$\partial(\lim_{n\to\infty} g_n)(z_0) = \lim_{n\to\infty} A^* \partial f_n(Az_0). \tag{2.6}$$

Рассмотрим отображение $A^*: X'_* \longrightarrow Z'_*$. Так как $A^*$ линейно и непрерывно, то тем самым определено отображение

$$\bar{A}^*: conv(X'_*) \longrightarrow conv(Z'_*),$$

$$\bar{A}^*(B) = A^* B, \qquad B \in conv(X'_*).$$

Как уже говорилось при доказательстве леммы 2.1$^*$, множество

$$\mathcal{Y} = \{\cup B,\ B \in cl\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty\}$$

является компактом. Поэтому сужение $A^*$ на $\mathcal{Y}_*$ будет замкнутым отображением $\mathcal{Y}$ в $Z'_*$. Тогда сужение $\bar{A}^*$ на $conv(\mathcal{Y})$ будет непрерывным отображением $conv(\mathcal{Y})$ в $conv(Z'_*)$ [4, стр. 173]. Так как $cl\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty \subset conv(\mathcal{Y})$, то из вышесказанного следует

$$\bar{A}^*(\lim_{n\to\infty} \partial f_n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} \bar{A}^* \partial(f_n(x_0)). \tag{2.7}$$

Учитывая смысл отображения $\bar{A}^*$ и соотношения (2.6), (2.7), получим

$$\partial(\lim_{n\to\infty} g_n)(z_0) = A^* \lim_{n\to\infty} \partial f_n(Az_0) = A^* \partial(\lim_{n\to\infty} f_n)(Az_0).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2$^*$. В условиях теоремы 2.2$^*$ пусть $Z$ сепарабельно. Тогда $\partial(\lim_{n\to\infty} g_n)(z_0) = \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^\infty \partial g_{n+i}(z_0)}$, где черта означает замыкание в $Z'_*$. Если и $X$ сепарабельно, то

$$\partial(\lim_{n\to\infty} g_n)(z_0) = \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^\infty \partial g_{n+i}(z_0)} = A^* \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^\infty \partial f_{n+i}(Az_0)},$$

где черта означает замыкание в $X'_*$ и $Z'_*$.

Следствие непосредственно вытекает из леммы 2.1 и теоремы 2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если $X$ сепарабельно, то условие в) в теореме 2.1 может быть заменено на условие ограниченности при каждом $y \in X$ множества $\{f'_n(x_0, y)\}_1^\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Во всех утверждениях, где $X$ предполагается сепарабельным, сепарабельность $X$ может быть заменена на

более слабое условие: существует последовательность $\{x_n\}_1^\infty$, $x_n \in X$, разделяющая точки множества $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \partial f_n(x_0)}$, где черта означает замыкание в $X'_*$.

ТЕОРЕМА 2.3*. Пусть $X$ — нормированное пространство. Если: а) последовательность $\{f_n\}_1^\infty$ поточечно сходится на $U(x_0)$; б) последовательность $\{f_n'\}_1^\infty$ равностепенно непрерывна в точке $x_0$ по любому направлению $y \in R(0)$; в) последовательность $\{f_n'(x_0,\cdot)\}_1^\infty$ сходится в $\mathcal{L}_m(x)$, то последовательность $\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty$ сходится в $conv(X'_*)_m$. При этом

1) $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)'(x_0,\cdot) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_0,\cdot)$,

2) $\partial(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \partial f_n(x_0) = \bigcap\limits_n \overline{\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \partial f_{n+i}(x_0)}$,

где черта означает замыкание в $X'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что условия теоремы влекут за собой выполнение условий теоремы 2.I*. Тогда $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)'(x_0,\cdot)$ равняется $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_0,\cdot)$ в топологии $\mathcal{L}(x)$, а значит, в силу условия в) теоремы, и в топологии $\mathcal{L}_m(x)$, т.е.

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)'(x_0,\cdot) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0,\cdot). \tag{2.8}$$

Сходимость $\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty$ и левое равенство в 2) следуют из изометричности пространств $\mathcal{L}_m(x)$ и $conv(X'_*)_m$ и (2.8). Предел последовательности $\{\partial f_n(x_0)\}_1^\infty$ в метрике Хаусдорфа равен топологическому пределу $\mathcal{L}im\, \partial f_n(x_0)$ [4, стр. 350], который, в свою очередь, равен верхнему топологическому пределу $\mathcal{L}s\, \partial f_n(x_0)$. Тогда правая часть равенства в 2) следует из свойств верхнего топологического предела [4, стр. 345].

СЛЕДСТВИЕ 2.3*. При выполнении условий теоремы 2.3* множество $\partial(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(x_0)$ состоит из пределов всех сильно сходящихся последовательностей

$\{x_n'\}_1^{\infty}$, $x_n' \in \partial f_n(x_o)$.

При выполнении условий теоремы 2.3* справедливо равенство

$$\partial(\lim_{n\to\infty} f_n)(x_o) = \mathcal{L}im\, \partial f_n(x_o) = \mathcal{L}i\, \partial f_n(x_o).$$

Тогда следствие вытекает из определения нижнего топологического предела $\mathcal{L}i\, \partial f_n(x_o)$ [4, стр. 343].

ТЕОРЕМА 2.4* Пусть $X$ и $Z$ – нормированные пространства, $A: Z \to X$ – непрерывный линейный оператор, $x_o = Az_o$. Если для последовательности $\{f_n\}_1^{\infty}$ выполняются условия теоремы 2.3*, то последовательность $\{g_n\}_1^{\infty}$ сходится поточечно на $V(z_o)$, последовательности $\{g_n'(z_o,\cdot)\}_1^{\infty}$ и $\{\partial g_n(z_o)\}_1^{\infty}$ сходятся в $\mathcal{L}m(z)$ и $con\, v(Z_*')_m$, соответственно. При этом

1) $$(\lim_{n\to\infty} g_n)'(z_o,\cdot) = \lim_{n\to\infty} g_n'(z_o,\cdot),$$

2) $$\partial(\lim_{n\to\infty} g_n)(z_o) = \lim_{n\to\infty} \partial g_n(z_o) = \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \partial g_{n+i}(z_o)} =$$

$$= A^* \partial(\lim_{n\to\infty} f_n)(Az_o) = A^* \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \partial f_{n+i}(Az_o)},$$

где черта означает замыкание в $X'$ и $Z'$.

Из очевидного соотношения $g_n'(z_o + \alpha z, z) = f_n'(x_o + \alpha y, y)$, $x_o = Az_o$, $y = Az$, и непрерывности $A$ вытекает, что для последовательности $\{g_n\}_1^{\infty}$ выполняются условия теоремы 2.3*, а следовательно, и теоремы 2.2*. Тогда утверждения теоремы следуют из теорем 2.2* и 2.3*.

Все утверждения, касающиеся последовательностей функционалов справедливы и для рядов функционалов. Для этого достаточно сумму ряда представить как предел последовательности его частичных сумм. Мы в начале параграфа привели усиленные формулировки этих утверждений, которые являются, по-видимому, более интересными. Наметим схемы доказательства некоторых из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.I сводится к проверке выполнения условий теоремы 2.I* для последовательности частичных сумм $\{s_n\}_1^\infty$, $s_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$.

Пусть $y\in R(0)$. Определим функцию $\varphi_n(t)=f_n(x_0+ty)$, $t\in[-1,1]$, которая является выпуклой. Используя свойства выпуклых функций, получим

$$\frac{\varphi_n(-3/4)-\varphi_n(-1/2)}{-3/4-(-1/2)}\le \varphi'_{n+}(t)\le \frac{\varphi_n(3/4)-\varphi_n(1/2)}{3/4-1/2},\ \forall t[-1/2,1/2],$$

где $\varphi'_{n+}(t)$ —правая производная $\varphi_n$ в точке $t$. Отсюда сразу имеем

$$\begin{aligned}|f'_n(x_0+ty,y)|&\le 4\big[|f_n(x_0+3/4\, y)-f_n(x_0+1/2\, y)|+\\&+|f_n(x_0-3/4\, y)-f_n(x_0-1/2\, y)|\big]\le 4\big[|f_n(x_0+3/4\, y)-f_n(x_0)|+\\&+|f_n(x_0+1/2\, y)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0-1/2\, y)-f_n(x_0)|+\\&+|f_n(x_0-3/4\, y)-f_n(x_0)|\big].\end{aligned}\tag{2.9}$$

Из условия теоремы 2.I и (2.9) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x_0+ty,y)\Big|<\varepsilon,\quad \forall n>n_0(\varepsilon),\ \forall t\in[0,1/2].$$

Тем самым последовательность частичных сумм $\{s'_n\}_1^\infty$, $s'_n=\sum_{k=1}^{n} f'_k$ равностепенно непрерывна в точке $x_0$ по направлению $y\in R(0)$. Сходимость последовательности $\{s'_n(x_0,\cdot)\}_1^\infty$, $s'_n(x_0,\cdot)=\sum_{k=1}^{n} f'_k(x_0,\cdot)$ в $\mathcal{L}(x)$ следует из (2.9). Тем самым для последовательности $\{s_n\}_1^\infty$ выполняются все условия теоремы 2.I*. Поэтому теорема 2.I следует непосредственно из теоремы 2.I*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия 2.I. Так как выполняются условия теоремы 2.I, то

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)'(x_0,\cdot)=\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x_0,\cdot).$$

Представим функционал $\Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)'(x_0,\cdot)$ в виде

$$(\sum_{k=1}^{\infty} f_k)'(x_0,\cdot)=\sum_{k=1}^{n} f'_k(x_0,\cdot)+\varphi_n(x_0,\cdot),$$

где

$$\varphi_n(x_0\cdot)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f'_k(x_0,\cdot), \qquad n=1,2,\dots,$$

$\varphi_n(x_0\cdot)$ является непрерывным сублинейным функционалом. Если $s$ является суммой сходящегося в $\sigma(X',X)$–топологии ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x'_k$, $x'_k\in\partial f_k(x_0)$, то, очевидно, $s\in\partial(\sum_{k=1}^{\infty} f_k)(x_0)$. Обратно, пусть $s\in\partial(\sum_{k=1}^{\infty} f_k)(x_0)$. Тогда $s=\sum_{k=1}^{n} x'_{k,n}+y'_n$, где $y'_n\in\partial\varphi_n(x_0,0)$. Положим $x'_n=(x'_{1,n},x'_{2,n},\dots)$, где $x'_{k,n}$ при $k\geq n+1$–произвольный элемент $\partial f_k(x_0,0)$. Рассмотрим тихоновское произведение $T=\prod_{k=1}^{\infty}T_k$, $T_k=\partial f'_k(x_0,0)$. По теореме Тихонова, $T$ – компакт в топологии прямого произведения. Тогда последовательность $\{x'_n\}_1^{\infty}$ имеет в $T$ предельную точку. Пусть предельной точкой последовательности $\{x'_n\}_1^{\infty}$ является точка $\bar{x}'=(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2,\dots)$, $\bar{x}'_k\in\partial f'_k(x_0,0)$. Повторяя дальше дословно рассуждения [2, стр.125], можно показать, что $s=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{x}'_k$. Это и завершает доказательство следствия 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.3. Чтобы доказать эту теорему, достаточно проверить выполнение условий теоремы 2.3* для последовательности частичных сумм. Справедливость условия б) теоремы 2.3* была показана уже при доказательстве теоремы 2.1.

Из соотношения (2.9) имеем

$$\sup_{y\in R(0)}\sum_{k=n}^{\infty}|f'_k(x_0,y)|\leq 4\Big[\sum_{k=n}^{\infty}\sup_{y\in R(0)}|f_k(x_0+\tfrac{3}{4}y)-f_k(x_0)|+$$
$$+\sum_{k=n}^{\infty}\sup_{y\in R(0)}|f_k(x_0+\tfrac{1}{2}y)-f_k(x_0)|+\sum_{k=n}^{\infty}\sup_{y\in R(0)}|f_k(x_0-\tfrac{1}{2}y)-f_k(x_0)|+$$
$$+\sum_{k=n}^{\infty}\sup_{y\in R(0)}|f_k(x_0-\tfrac{3}{4}y)-f_k(x_0)|\Big]\leq 16\sum_{k=n}^{\infty}\sup_{x\in U(x_0)}|f_k(x)-f_k(x_0)|\ . \qquad (2.10)$$

Пусть $W(0)=\{y\in X,\ \|y\|\leq a\}$, $W(0)\subset R(0)$.

Тогда из (2.10) имеем

$$\sup_{\|y\|\le 1} \sum_{k=n}^{\infty} |f_k'(x_0,y)| \le 16a \sum_{k=n}^{\infty} \sup_{x\in U(x_0)} |f_n(x)-f_n(x_0)| \quad . \qquad (2.11)$$

Из этого неравенства и условия теоремы 2.3 вытекает, что последовательность $\{S_n'(x_0,\cdot)\}_1^{\infty}$ частичных сумм $S_n'(x_0,\cdot)=\sum_{k=1}^{n} f_k'(x_0,\cdot)$ сходится в $\mathcal{L}m(x)$ . Теперь теорема 2.3 следует из теоремы 2.3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия 2.3.

Из очевидного неравенства

$$|\langle y, x_k' \rangle| \le |f_k'(x_0,y)| + |f_k'(x_0-y)|, \quad x_k' \in \partial f_k(x_0) \qquad (2.12)$$

и соотношения (2.11) следует, что любой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k'$ , $x_k' \in \partial f_k(x_0)$ , сходящийся в $\sigma(X',X)$ – топологии при выполнении условий теоремы 2.3, сходится и в топологии пространства $X'$ . Тогда следствие 2.3 вытекает из следствия 2.1.

Все остальные утверждения относительно рядов функционалов являются достаточно очевидными перефразировками утверждений для последовательностей функционалов.

## § 3

В этом параграфе мы опишем субдифференциал для $f=\lim_{n\to\infty} f_n$ и $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ в терминах экстремальных точек субдифференциалов $\partial f_n(x_0)$ . В дальнейшем через $ex\, A$ будем обозначать множество экстремальных точек $A$ , через $co\, A$ – выпуклую оболочку $A$ (черта сверху - замыкание в слабой топологии, две черты - замыкание в сильной топологии).

ТЕОРЕМА 3.1. Если $X$ сепарабельно и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)-f_n(x_0)|$ поточечно сходятся на $U(x_0)$, то

$$\partial\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)(x_0)=\overline{co}\Big(\mathcal{L}s \sum_{k=1}^{n} ex\,\partial f_k(x_0)\Big)=\overline{co}\Big(\bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+i} ex\,\partial f_k(x_0)}\Big),$$

где $\mathcal{L}s\big(\sum_{k=1}^{n} ex\,\partial f_k(x_0)\big)$ – верхний топологический предел последовательности множеств $\{\sum_{k=1}^{n} ex\,\partial f_k(x_0)\}_1^{\infty}$ в $X_*'$

в смысле Хаусдорфа [6, стр. 165].

СЛЕДСТВИЕ 3.1. В условиях теоремы 3.1 $\partial(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)(x_0)=\overline{co}\ S$, где $S$ — совокупность всех сумм сходящихся в $\sigma(X',X)$-топологии рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$, $x'_n \in ex\, \partial f_n(x_0)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $X$ и $Z$ — бочечные пространства. Если $X$ сепарабельно и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)-f_n(x_0)|$ поточечно сходятся на $U(x_0)$, то

$$\partial(\sum_{n=1}^{\infty} g_n)(z_0)=A^*\overline{co}(\mathcal{L}s\sum_{k=1}^{n} ex\,\partial f_k(Az_0))=$$

$$=\overline{co}A^*(\mathcal{L}s\sum_{k=1}^{n} ex\,\partial f_k(Az_0))=\overline{co}A^*(\bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n+i} ex\,\partial f_k(Az_0)}),$$

где $\mathcal{L}s$ — верхний топологический предел в $X'_*$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. В условиях теоремы 3.2 $\partial(\sum_{n=1}^{\infty} g_n)(z_0)=\overline{co}\,A^*S$, где $S$ — совокупность всех сумм сходящихся в $\sigma(X',X)$-топологии рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$, $x'_n \in ex\,\partial f_n(x_0)$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $X$ — сепарабельное нормированное пространство. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ поточечно сходится на $U(x_0)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in U(x_0)} f_n(x)-f_n(x_0) < \infty$, то

$$\partial(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)(x_0)=\overline{co}(\mathcal{L}s\sum_{k=1}^{n} ex\,\partial f_k(x_0))=\overline{co}(\bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n+i} ex\,\partial f_k(x_0)}),$$

где $\mathcal{L}s$ — верхний топологический предел в $X$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. В условиях теоремы 3.3 $\partial(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)(x_0)=\overline{co}\ S$, где $S$ — совокупность всех сумм сильно сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$, $x'_n \in ex\,\partial f_n(x_0)$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $X$ и $Z$ — нормированные пространства. Если $X$ сепарабельно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ поточечно сходится на $U(x_0)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in U(x_0)} |f_n(x)-f_n(x_0)|<\infty$, то

$$\partial(\sum_{n=1}^{\infty} g_n)(z_0) - A^*\overline{co}(\mathcal{L}s \sum_{k=1}^{n} ex\ \partial f_k(Az_0)) =$$

$$=\overline{co}A^*(\mathcal{L}s\sum_{k=1}^{n} ex\ \partial f_k(Az_0)) = \overline{co}A^*(\bigcap_n \bigcup_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+i} ex\ \partial f_k(Az_0)),$$

где $\mathcal{L}s$ — верхний топологический предел в $X'$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. В условиях теоремы 3.4. $\partial(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)(x_0) = \overline{co}\,A^*S$, где $S$ — совокупность всех сумм сильно сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$, $x_n' \in ex\ \partial f_n(x_0)$.

Все эти утверждения, как и во втором параграфе, являются следствиями более общих результатов о субдифференциале предела последовательности.

Пусть $\Gamma \in con\,v(X'_*)$ и существует последовательность $\{x_n\}_1^{\infty}$, $x_n \in X$, разделяющая точки $\Gamma$, т.е. для любых $x'$, $y' \in \Gamma$, $x' \neq y'$ существует $x_n$ такой, что $<x_n, x'> \neq$ $\neq <x_n, y'>$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$. Обозначим через $\Gamma_n$, $n = 0,1,2,\ldots$, множества

$$\Gamma_0 = \Gamma_{x_0} = \{x' \in \Gamma : <x_0, x'> = f_\Gamma(x_0)\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Gamma_{n+1} = \{x' \in \Gamma_n : <x_{n+1}, x'> = f_{\Gamma_n}(x_{n+1})\},$$

где

$$f_{\Gamma_n}(x) = \sup_{x' \in \Gamma_n} <x, x'> .$$

Множества $\Gamma, \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ являют[illegible]стыми выпуклыми компактами в $X'_*$ и образуют убывающую последовательность.

Возьмем $g_{x_0} \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$. Тогда

$$<x_{n+1}, g_{x_0}> = f_{\Gamma_n}(x_{n+1}), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Так как $\{x_n\}_1^{\infty}$ разделяет точки $\Gamma$, то отсюда сразу следует, что множество $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\Gamma_n$ состоит из единственной точки

$$\{g_{x_0}\}=\bigcap_{n=0}^{\infty}\Gamma_n . \qquad (3.1)$$

ТЕОРЕМА 3.5. При каждом $x_0\in X$ $g_{x_0}$ является экстремальной точкой множества $\Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что если существуют точки $x_1', x_2'\in\Gamma$ и $\alpha_1$, $0<\alpha_1<1$, такие, что $g_{x_0}=\alpha_1 x_1'+(1-\alpha_1)x_2'$, то $\Gamma_{n+1}$ содержит замкнутый отрезок $\{\alpha x_1'+(1-\alpha)x_2', 0\leq\alpha\leq 1\}$. Пусть $x_1'$ и $x_2'\in\Gamma_n$. Из определения $\Gamma_{n+1}$ имеем

$$\begin{aligned}&<x_{n+1},x_1'>\leq\sup_{x'\in\Gamma_n}<x_{n+1},x'>,\\ &<x_{n+1},x_2'>\leq\sup_{x'\in\Gamma_n}<x_{n+1},x'>.\end{aligned} \qquad (3.2)$$

Предположим, что хотя бы один из элементов $x_1'$, $x_2'$ не принадлежит $\Gamma_{n+1}$. Для определенности, пусть это будет $x_2'$. Тогда

$$<x_{n+1},x_2'><\sup_{x'\in\Gamma_n}<x_{n+1},x'>. \qquad (3.3)$$

Из (3.2), (3.3) имеем

$$\alpha_1<x_{n+1},x_1'>+(1-\alpha_1)<x_{n+1},x_2'><\sup_{x'\in\Gamma_n}<x_{n+1},x'>. \qquad (3.4)$$

С другой стороны, из определения $g_{x_0}$ следует

$$\alpha_1<x_{n+1},x_1'>+(1-\alpha_1)<x_{n+1},x_2'>=<x_{n+1},g_{x_0}>=\sup_{x'\in\Gamma_n}<x_{n+1},x'>. \qquad (3.5)$$

Соотношения (3.4), (3.5) противоречивы. Следовательно, $x_1'$ и $x_2'\in\Gamma_{n+1}$. Поэтому $\Gamma_{n+1}$ содержит замкнутый отрезок

$$\{\alpha x_1'+(1-\alpha)x_2',\ 0\leq\alpha\leq 1\}.$$

Предположим теперь, что $g_{x_0}$ не является экстремальной точкой множества $\Gamma$. Тогда существуют $x_1', x_2'\in\Gamma$, $x_1'\neq x_2'$, $0<\alpha_1<1$, такие, что

$$g_{x_0}=\alpha_1 x_1'+(1-\alpha_1)x_2',$$

Поэтому, как было доказано выше,

$$\{\alpha x_1' + (1-\alpha)x_2',\ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset \Gamma_n,\quad n = 0,1,2,\dots$$

Следовательно, $\{\alpha x_1' + (1-\alpha)x_2',\ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \Gamma_n = \{g_{x_0}\}$.

Отсюда вытекает $x_1' = x_2' = g_{x_0}$, что противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.I*. Пусть для последовательности $\{f_n\}_1^{\infty}$ выполняются условия теоремы 2.I*. Если $X$ сепарабельно, то

$$\partial(\lim_{n\to\infty} f_n)(x_0) = \overline{co}(\mathcal{L}s\ ex\ \partial f_n(x_0)) = \overline{co}\Big(\bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} ex\ \partial f_{n+i}(x_0)}\Big),$$

где $\mathcal{L}s\ ex\ \partial f_n(x_0)$ — верхний топологический предел в $X_*'$ последовательности множеств $\{ex\ \partial f_n(x_0)\}_1^{\infty}$ в смысле Хаусдорфа [6, стр.165].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего последовательность $\{x_n\}_1^{\infty}$, где $\{x_n\}_1^{\infty}$ — счетное всюду плотное множество в $X$, разделяет точки пространства $X$. Если выполняются условия теоремы, то множество $\overline{\bigcup_{n+i}} \partial f_n(x_0)$ является метризуемым компактом в $X_*'$. Ясно, что $\partial(\lim_{n\to\infty} f_n)(x_0) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}} \partial f_n(x_0)$ и $ex\ \partial f_n(x_0) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}} \partial f_n(x_0)$. Известно [4, стр.345], что $x' \in \mathcal{L}s\ ex\ \partial f_n(x_0)$ тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность $x_{n_k}'$, $x_{n_k}' \in ex\ \partial f_{n_k}(x_0)$, сходящаяся к $x'$, причем

$$\mathcal{L}s\ ex\ \partial f_n(x_0) = \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} ex\ \partial f_{n+i}(x_0)}.$$

Очевидно,

$$\mathcal{L}s\ ex\ \partial f_n(x_0) = \partial(\lim_{n\to\infty} f_n)(x_0). \tag{3.6}$$

Возьмем произвольную точку $x \in X$ и последовательность $\{g_x^n\}_1^{\infty}$, $g_x^n \in \partial f_n(x_0)$, определяемую соотношением (3.I). $g_x^n$ является экстремальной точкой $\partial f_n(x_0)$ и

$$\langle x, g_x^n \rangle = f_n'(x_0, x).$$

Из последовательности $\{g_x^n\}_1^\infty$, в силу метризуемости и компактности $\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial f_n(x_0)$, можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{g_x^{n_k}\}_1^\infty$. Пусть $g_x$ — ее слабый предел. Тогда $g_x \in \mathcal{L}s\, ex\, \partial f_n(x_0)$ и

$$<x, g_x> = \lim_{k\to\infty} <x, g_x^{n_k}> = \lim_{k\to\infty} f'_{n_k}(x_0, x) = (\lim_{n\to\infty} f_n)'(x_0, x).$$

Таким образом, для каждого $x \in X$ существует элемент $g_x \in \mathcal{L}s\, ex\, \partial f_n(x_0)$ такой, что

$$<x, g_x> = (\lim_{n\to\infty} f_n)'(x_0, x).$$

Тогда из теоремы Кли [7, стр. 136] и (3.6) вытекает равенство

$$\overline{co}\, \mathcal{L}s\, ex\, \partial f_n(x_0) = \partial(\lim_{n\to\infty} f_n)(x_0).$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2*. Пусть $X$ и $Z$ — бочечные пространства и для последовательности $\{f_n\}_1^\infty$ выполняются условия теоремы 2.2*. Если $X$ сепарабельно, то

$$\partial(\lim_{n\to\infty} g_n)(z_0) = A^* \overline{co}(\mathcal{L}s\, ex\, \partial f_n(Az_0)) =$$

$$= \overline{co}\, A^*(\mathcal{L}s\, ex\, \partial f_n(Az_0)) = \overline{co}\, A^*(\bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} ex\, \partial f_{n+i}(Az_0)}), \quad (3.7)$$

где $\mathcal{L}s$ — верхний топологический предел в $X'_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая часть равенства (3.7) следует из теоремы 2.2* и теоремы 3.1*. Докажем правую часть равенства (3.7). При доказательстве теоремы 3.1* было показано, что для любой точки $x = Az$ найдется точка $x' \in \mathcal{L}s\, ex\, \partial f_n(x_0)$ такая, что

$$<x, x'> = (\lim_{n\to\infty} f_n)'(x_0, x) = (\lim_{n\to\infty} g_n)'(z_0, z), \quad (3.8)$$

где $x_0 = Az_0$, $x = Az$.

Ясно, что $A^*\mathcal{L}s\, ex\, \partial f_n(Az_0) \subset \partial(\lim_{n\to\infty} g_n)(z_0)$ и для элемента $z' = Ax' \in A^*\mathcal{L}s\, ex\, \partial f_n(Az_0)$, в силу (3.8), справедливо равенство

$$(\lim_{n\to\infty} g_n)'(z_0,z)=\langle x,x'\rangle=\langle Az,x'\rangle=\langle z,A^*x'\rangle=\langle z,z'\rangle. \quad (3.9)$$

Таким образом, для любой точки $z\in Z$ существует элемент $z'\in A^*\mathcal{L}s\ \mathrm{ix}\ \partial f_n(Az_0)$, удовлетворяющий (3.9). Тогда применение теоремы Кли завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.I.

Прежде всего $\mathcal{L}s\sum_{k=1}^{n}\mathrm{ix}\ \partial f_k(x_0)\subset\partial(\sum_{n=1}^{\infty}f_n)(x_0)$. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}g_x^k$. Из соотношений (2.I2), (2.9) и условий теоремы следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}g_x^k$ сходится в $\sigma(X',X)$-топологии. Поэтому $\sum_{k=1}^{\infty}g_x^k\in\mathcal{L}s\sum_{k=1}^{n}\mathrm{ix}\ \partial f_k(x_0)$. С другой стороны,

$$(\sum_{k=1}^{\infty}f_k)'(x_0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k'(x_0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,g_x^k\rangle=\langle x,\sum_{k=1}^{\infty}g_x^k\rangle. \quad (3.10)$$

Применение теоремы Кли завершает доказательство.

Следствие 3.I вытекает из соотношения (3.I0) и теоремы Кли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.2.

Пусть $z\in Z$ и $x\in X$, $x=Az$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}g_x^n$, который, как уже отмечалось выше, сходится в $\sigma(X',X)$- топологии. Тогда

$$A^*\sum_{n=1}^{\infty}g_x^n\in A^*\mathcal{L}s\sum_{k=1}^{n}\mathrm{ix}\ \partial f_k(Az_0)\subset A^*\partial(\sum_{n=1}^{\infty}f_n)(Az_0)=\partial(\sum_{n=1}^{\infty}g_n)(z_0).$$

Кроме того,

$$(\sum_{n=1}^{\infty}g_n)'(z_0,z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k'(x_0,x)=\langle x,\sum_{k=1}^{\infty}g_x^k\rangle=$$
$$=\langle Az,\sum_{k=1}^{\infty}g_x^k\rangle=\langle z,A^*\sum_{k=1}^{\infty}g_x^k\rangle.$$

Теперь остается применить теорему Кли.

Аналогично доказываются остальные утверждения. Следует только учесть, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}g_x^n$, в силу (2.I2), (2.II), будет сходиться в топологии $X'$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.I. Сепарабельность пространства $X$ можно заменить на более слабое условие: существует последовательность $\{x_n\}_1^{\infty}$, $x_n\in X$, разделяющая точки множества $\bigcup_{n=1}^{\infty}\partial f_n(x_0)$

для последовательностей $\{f_n\}_1^\infty$ и множества $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \partial f_k(x_0)}$ – для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Отметим, что результаты настоящей работы можно распространить на случай, когда $X$ – отделимое локально выпуклое пространство, и на случай, когда $f_n$ – конечные выпуклые функционалы.

Автор выражает признательность Акилову Г.П. и Кутателадзе С.С. за полезное обсуждение настоящей работы, а также Левину В.Л., просмотревшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

## Литература


1. ЛЕВИН В.Л. О некоторых свойствах опорных функционалов. – "Математические заметки", 1968, т. 4, №6, с. 685–696.
2. ГОЛЬШТЕЙН Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. "Наука", М., 1971.
3. КУРАТОВСКИЙ К. Топология, т. 2. "Мир", М., 1969.
4. КУРАТОВСКИЙ К. Топология, т. I. "Мир", М., 1966.
5. ИОФФЕ А.Д., ЛЕВИН В.Л. Субдифференциалы выпуклых функций. – "Труды Моск.мат.о-ва", 1972, т.26, с. 3–73.
6. ХАУСДОРФ Ф. Теория множеств. ОНТИ, М.-Л., 1937.
7. ДЭЙ М.М. Нормированные линейные пространства. ИЛ., М., 1961.


Поступила в ред.-изд. отд.
10. III. 1974 г.