УДК 51.330.115

ТЕМП РОСТА ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА С РАЗЛИЧНЫМИ СРОКАМИ СТРОИТЕЛЬСТВА ФОНДОВ

И.А.Красс

В данной работе для модели динамического межотраслевого баланса, в которой учитываются различные сроки строительства фондов, определяются технологический темп роста и оптимальное состояние и исследуются их простейшие свойства, а также предлагается алгоритм нахождения этих параметров модели. Предварительно показывается, что замкнутая модель динамического межотраслевого баланса с постоянными коэффициентами технологических затрат сводится к классической модели неймановского типа (см. [1], [8]).

Многочисленные исследования различных авторов (см. обзорную обобщающую статью [1]) показали, что технологический темп роста и оптимальное состояние в линейной модели экономической динамики определяют вид и структуру оптимальных траекторий в такой модели. В работе [2] было показано, что рост отдельных продуктов на произвольных, вообще говоря, не оптимальных траекториях в таких моделях во многом определяется технологическим темпом роста модели.

Ниже мы будем оперировать с одним из вариантов модели динамического межотраслевого баланса, наиболее близким к варианту, описанному в [5] (отличие нашей модели от модели, описанной в [5], состоит в том, что мы рассматриваем только один технологический способ производства, и, кроме того, различные виды фондов в рас-

сматриваемом случае могут иметь различные задержки). Приведённые ниже рассуждения легко применяются к другим вариантам (см., например, [3], [6], [7]) моделей динамического межотраслевого баланса.

§ I. Описание модели

Время в модели (переменная t) изменяется дискретно, единица измерения времени равна минимальному, рассматриваемому при построении плана промежутку времени (год, месяц и т.п.). Промежуток времени от t до $t+1$ (т.е. интервал $\langle t+1)$) мы будем называть t-м периодом времени.

В модели имеется n продуктов (отраслей) и n видов основных фондов - по одному на каждый продукт. Разные виды фондов могут создаваться за различные промежутки времени. Таким образом, все продукты разбиты на τ групп, так что в s-ю группу входит n_s продуктов (s =I,2,..., τ ; $n_1+\cdots+n_\tau=n$). Сами продукты перенумерованы подряд, поэтому индекс i, пробегающий множество продуктов, принимает значения

$$1,2,\ldots,n_1,n_1+1,\ldots,n_1+n_2,n_1+n_2+1,\ldots,n_1+n_2+\cdots+n_{\tau-1},\ldots,n.$$

Фонды первой группы строятся за один период. Фонды второй группы для своего создания требуют два периода, т.е. для этой группы фондов ($i=n_1+1,\ldots,n_1+n_2$) за первый период создаются фонды, находящиеся в первом состоянии, а за второй период эти фонды могут быть переведены (к концу периода) в нулевое состояние - состояние, готовое для производства продуктов (в работе принято, что нулевое состояние любого фонда - состояние, готовое для производства конечной продукции). Аналогично, фонды последней группы ($i=n_1+\cdots+n_{\tau-1}+1,\ldots,n$) требуют для своего создания τ периодов. После первого периода можно получить эти фонды в ($\tau-1$)-м состоянии, после второго - в ($\tau-2$)-м, и т.д., наконец, после τ периодов - в нулевом состоянии, готовом к производству.

Рассмотрим продукт номер i, входящий в s-ю группу, т.е.

$$n_0+n_1+\cdots+n_{s-1}+1\leqslant i\leqslant n_0+n_1+\cdots+n_s, \tag{I}$$

где $n_0=0$. Пусть количество фондов, соответствующее этому продукту, находящихся в l-м состоянии к моменту времени t

есть $\varphi_i^l(t)$, здесь l может принимать значения $0,1,\dots,s-1$.

Пусть величина прироста i-го вида фондов в l-м состоянии за период t есть $K_i^l(t)$, где i удовлетворяет неравенству (I). Этот прирост происходит либо за счёт перевода i-го вида фондов из ($l+1$)-го состояния в l-е при $l=0,1,\dots,s-2$ ($s>1$) , либо за счёт непосредственного создания фондов при $l=s-1$. Однако, вообще говоря, не все фонды l-го состояния, созданные за предыдущий, т.е. за ($t-1$)-й период, обязаны перейти за период t в фонды следующего ($l-1$)-го состояния (конечно, если $l>0$). Часть фондов i-го вида, находящаяся в l-м состоянии, может не использоваться за t-й период (например, эти фонды на некоторое время могут быть законсервированы), эту часть фондов мы обозначим через $\varphi_{Hi}^l(t+1)$. Тогда прирост фондов i-го вида в l-м состоянии выразится формулой

$$K_i^l(t)=\varphi_i^l(t+1)-\varphi_{Hi}^l(t+1). \qquad (2)$$

Величина $K_i^l(t)$ есть в некотором смысле аналог капитальных затрат на строительство данного вида фондов (см., например, [5]). Как сказано выше, количество неиспользованных за период фондов i-го вида в l-м состоянии есть разность между количеством фондов данного вида, имеющегося в наличии к моменту t, и количеством новых фондов для того же продукта в ($l-1$)-м состоянии, созданных за период t , т.е.

$$\varphi_{Hi}^l(t+1)=\gamma_i^l[\varphi_i^l(t)-(\varphi_i^{l-1}(t+1)-\varphi_{Hi}^{l-1}(t+1))];\ l>0. \qquad (3)$$

Коэффициент γ_i^l ($0<\gamma_i^l\leq 1$) - коэффициент амортизации - учитывает некоторую "порчу" фондов, созданных за период ($t-1$) и не использованных в следующем периоде. Для $l=0$ соотношение (3) примет вид:

$$\varphi_{Hi}^0(t+1)=\gamma_i^0\,\varphi_i^0(t). \qquad (4)$$

Если на некоторой траектории в данной модели все фонды i-го вида при $l>1$ полностью используются (как будет показано ниже, таким свойством обладают траектории, порождаемые оптимальным состоянием), т.е. $\varphi_{Hi}^l(t)=0;\ l=1,2,\dots s-1;\ t=0,1,2,\dots$,то соотношения (2), (3) примут вид:

$$\begin{cases} K_i^l(t)=\varphi_i^l(t+1), \quad l=1,\dots,s-1; \\ K_i^0(t)=\varphi_i^0(t+1)-\gamma_i^0\varphi_i^0(t) \quad ; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \varphi_i^{l-1}(t)=\varphi_i^l(t-1), \quad l=2,\dots,s-1; \\ \varphi_i^0(t)-\gamma_i^0\varphi_i^0(t-1)=\varphi_i^1(t-1). \end{cases} \tag{6}$$

Пусть $x_i(t)$ - количество i -го продукта, полученного за период t . Тогда предполагается выполненным неравенство

$$\delta_i x_i(t)\leqslant\varphi_i^0(t), \quad i=1,\dots,n,$$

где δ_i - коэффициент фондоемкости. Путем введения новых переменных (смены масштаба) можно сделать так, чтобы $\delta_i=1$, i =I,2,..., n , что и будет предполагаться ниже.

Выпускаемый продукт потребляется на развитие фондов и, соответственно, на нужды производства. Эта связь имеет вид:

$$x_i(t)\geqslant\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^0K_j^0(t)+\sum_{j=n_1+1}^{n}b_{ij}^1K_j^1(t)+\dots+\sum_{j=n_1+\dots+n_{\tau-1}+1}b_{ij}^{\tau-1}K_j^{\tau-1}(t)+Y_i(t). \tag{7}$$

Здесь a_{ij} - коэффициент текущих технологических затрат i -го продукта в j -ю отрасль, b_{ij}^l - коэффициент капитальных вложений i -го продукта в строительство фондов j -й отрасли на l -й стадии строительства. $Y_i(t)$ - потребление i -го продукта за период t (i =I,2,..., n).

Перед тем как записать уравнения, определяющие динамику модели в матричном виде, получим из (2) - (4) два вспомогательных соотношения. Имеем из (2) и (3)

$$K_i^l(t)=\varphi_i^l(t+1)-\gamma_i^l\varphi_i^l(t)+\gamma_i^l K_i^{l-1}(t).$$

Итерируя это равенство, получим:

$$K_i^l(t)=\sum_{z=0}^{z=l}(\varphi_i^z(t+1)-\gamma_i^z\varphi_i^z(t))\cdot\delta_i^z, \tag{8}$$

где $\delta_i^z=\gamma_i^l\cdot\gamma_i^{l-1}\dots\gamma_i^{z+1}$ для $0\leqslant z<l$ и $\delta_i^l=1$. Аналогично, имеем:

$$\varphi_{Hi}^l(t+1)=\gamma_i^l[\varphi_i^l(t)-\sum_{z=0}^{z=l-1}\delta_i^z(\varphi_i^z(t+1)-\gamma_i^z\varphi_i^z(t))].$$

Так как $\varphi_{Hi}^l(t+1)\geqslant 0$, то отсюда

$$\varphi_i^{l}(t) \geq \sum_{z=0}^{z=l-1} \delta_i^{z} (\varphi_i^{z}(t+1) - \gamma_i^{z} \varphi_i^{z}(t)), \quad l \geq 1, \tag{9}$$

причем если в (9) выполняется равенство, то $\varphi_{Hi}^{l}(t+1)=0$.

Введем некоторые обозначения. Через R_+^{k} будем обозначать множество k-мерных векторов с неотрицательными компонентами (k-мерный неотрицательный ортант). Через m_l - величину $n-(n_1+\cdots+n_l)$ для $l=1,2,\ldots,\tau-1$ $(m_0=n)$. Через E_l^{z} $(z \geq l)$ - матрицу порядка $m_l \times m_z$ вида

$$E_l^{z} = \| 0, E_l \|,$$

где E_l - единичная матрица порядка $m_l \times m_l$, т.е. E_l^{z} есть матрица проектора из R^{m_z} в R^{m_l} $(z, l = 0,1,\ldots,\tau-1)$.

В матричном виде система (7) - (9) имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) \geq Ax(t) + B^{0}K^{0}(t) + \cdots + B^{\tau-1}K^{\tau-1}(t) + Y(t)\,; \\ K^{l}(t) = \sum\limits_{z=0}^{z=l} E_l^{z} \delta^{z} (\varphi^{z}(t+1) - \gamma^{z} \varphi^{z}(t))\,; \\ \varphi^{l}(t) \geq \sum\limits_{z=0}^{z=l-1} E_l^{z} \delta^{z} (\varphi^{z}(t+1) - \gamma^{z} \varphi^{z}(t))\,; \\ \varphi^{0}(t) \geq x(t), \end{cases} \tag{10}$$

где соответствующие обозначения для матриц легко восстановить по соотношениям (7)-(9).

Для замыкания модели, следуя [3,7], предположим, что вектор потребления $Y(t)$ и вектор $x(t)$ связаны соотношением

$$Y(t) = Q\,x(t), \tag{11}$$

где Q есть $n \times n$ - матрица с неотрицательными элементами.

Подставляя (11) и определение $K^{l}(t)$ через $\varphi^{z}(t)$ в первое неравенство в (10), получим

$$x(t) \geq \bar{A}x(t) + \bar{B}^{0}(\varphi^{0}(t+1) - \gamma^{0}\varphi^{0}(t)) + \cdots + \bar{B}^{\tau-1}(\varphi^{\tau-1}(t+1) - \gamma^{\tau-1}\varphi^{\tau-1}(t)), \tag{12}$$

где $\bar{A} = A + Q$, $\bar{B}^{l} = \sum\limits_{z=0}^{z-1} B^{z} E_z^{l} \delta^{l}$, $l = 0,1,\ldots,\tau-1$.

Для того чтобы свести данную модель к модели $\mathcal{M}$ неймановского типа (см. [1], [8]), введём понятие состояния и технологического процесса в модели $\mathcal{M}$.

Так как из одного периода в другой переходят не продукты (они полностью потребляются за текущий период), а фонды, то состояние модели $\mathfrak{M}$ есть вектор наличных фондов (на начало данного периода). Таким образом, состояние модели есть вектор $u=(\varphi^0,\varphi^1,\dots,\varphi^{\tau-1})$, где $\varphi^l\in R_+^{m_l}\ (l=0,\dots,\tau-1)$, т.е. $u\in R_+^m$, где $m=m_0+m_1+\dots+m_{\tau-1}$.

Технологический процесс в данной модели есть пара состояний $(u,v)=(\varphi^0,\dots,\varphi^{\tau-1};\ \psi^0,\dots,\psi^{\tau-1})$ такая, что существует вектор $x\in R_+^n$, для которого удовлетворяются неравенства:

$$\begin{cases} x\geqslant \bar{A}x+\bar{B}^0(\psi^0-\gamma^0\varphi^0)+\dots+\bar{B}^{\tau-1}(\psi^{\tau-1}-\gamma^{\tau-1}\varphi^{\tau-1}) \\ \varphi^l\geqslant \sum\limits_{r=0}^{l-1} E_l^r\cdot\delta^r(\psi^r-\gamma^r\varphi^r);\quad l=1,2,\dots,\tau-1, \\ \varphi^0\geqslant x. \end{cases} \tag{13}$$

Множество всех технологических процессов обозначим через Z. Из (10), (12) следует, что если $u(t)=(\varphi^0(t),\varphi^1(t),\dots,\varphi^{\tau-1}(t))$ и $u(t+1)=(\varphi^0(t+1),\varphi^1(t+1),\dots,\varphi^{\tau-1}(t+1))$ есть два последовательных состояния динамической модели межотраслевого баланса, то $(u(t),u(t+1))\in Z$.

Нетрудно проверить, что Z – выпуклый замкнутый конус в R_+^{2m}, не содержащий процесса $(0,v)$ при $v\neq 0$. Более того, так как Z определяется линейными ограничениями (13), то Z – многогранный конус. Таким образом, Z задает модель экономической динамики $\mathfrak{M}$ неймановского типа (см. [8]). Непосредственной проверкой можно убедиться, что если $(u,v)\in Z$ и $v_1\leqslant v$, то $(u,v_1)\in Z$ также, т.е. модель $\mathfrak{M}$ нормальна (см. [1]).

§ 2. Вывод уравнения для определения технологического темпа роста модели

Технологическим темпом роста модели (см. [8]) называется величина

$$\alpha(\mathfrak{M})=\max_{\substack{(u,v)\in Z\\ \|u\|=1}}\ \min_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{v_i}{u_i}, \tag{14}$$

где u_i, v_i есть i -е координаты векторов u, v; $\|u\|=\sqrt{u_1^2+\dots+u_m^2}$, а минимум в (I4) берется по тем i, для которых $u_i > C$.

В [I] показано, что максимум в (I4) реализуется и, ввиду нормальности модели $\mathfrak{M}$, существует процесс (u, v), называемый оптимальным, такой, что

$$\bar{v} = \alpha(\mathfrak{M})\,\bar{u}. \tag{I5}$$

Если $\bar{u} = (\bar{\varphi}^0, \bar{\varphi}^1, \dots, \bar{\varphi}^{\tau-1})$; $\bar{v} = (\bar{\psi}^0, \dots, \bar{\psi}^{\tau-1})$, то (I5) можно переписать в виде

$$\bar{\psi}^l = \alpha(\mathfrak{M})\,\bar{\varphi}^l; \quad l = 0, \dots, \tau-1. \tag{I6}$$

Подставляя это равенство в (I3), имеем:

$$\begin{cases} \bar{x} \geqslant A\bar{x} + \bar{B}^0(\alpha(\mathfrak{M})E_0^0 - \gamma^0)\bar{\varphi}^0 + \dots + \bar{B}^{\tau-1}(\alpha(\mathfrak{M})E_{\tau-1}^{\tau-1} - \gamma^{\tau-1})\bar{\varphi}^{\tau-1}; \\ \bar{\varphi}^l \geqslant \sum\limits_{r=0}^{l-1} E_l^r(\alpha(\mathfrak{M})E_r^r - \gamma^r)\delta^r\varphi^r; \quad l = 1, 2, \dots, \tau-1; \\ \bar{\varphi}^0 \geqslant \bar{x}. \end{cases} \tag{I7}$$

Введём вектор $W = (x, \varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^{\tau-1}) \in R_+^{m+n}$ и матрицу $D_1(\alpha)$ порядка $(m+n)\times(m+n)$, имеющую вид:

$$D_1(\alpha) = \left\| \begin{matrix} \bar{A} & \bar{B}^0(\alpha E_0^0 - \gamma^0) & \bar{B}^1(\alpha E_1^1 - \gamma^1) & \dots & \bar{B}^{\tau-1}(\alpha E_{\tau-1}^{\tau-1} - \gamma^{\tau-1}) \\ E_0^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_1^0(\alpha E_0^0 - \gamma^0)\delta^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2^0(\alpha E_0^0 - \gamma^0)\delta^0 & E_2^1(\alpha E_1^1 - \gamma^1)\delta^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & E_{\tau-1}^0(\alpha E_0^0 - \gamma_0^0)\delta^0 & E_{\tau-1}^1(\alpha E_1^1 - \gamma^1)\delta^1 & \dots & E_{\tau-1}^{\tau-1}(\alpha E_{\tau-1}^{\tau-1} - \gamma^{\tau-1})\delta^{\tau-1} \end{matrix} \right\| \tag{I8}$$

Тогда (I7) можно записать в виде:

$$\bar{W} \geqslant D_1(\alpha(\mathfrak{M}))\,\bar{W}, \tag{I9}$$

где $\bar{W} = (\bar{x}, \bar{\varphi}^0, \dots, \bar{\varphi}^{\tau-1})$. Поэтому задачу о нахождении темпа роста и оптимального процесса в модели $\mathfrak{M}$ можно свести к следующей: среди всех пар (α, W), где $\alpha > 0$, $W \in R_+^{m+n}$, удовлетворяющих неравенству

$$W \geqslant D_1(\alpha)\,W, \tag{20}$$

найти пару с максимальным α. Такую задачу будем называть задачей A_0. Очевидно, что её решением будет пара $(\alpha(\mathfrak{M}), \bar{W})$.

Будем предполагать, что матрица $\bar{A}$ продуктивна (см. [7]), т.е. существует вектор $\tilde{x} \in R^n_+$, $\tilde{x} \neq 0$, такой, что $\tilde{x} \geqslant A\tilde{x}$.

Тогда пара $(\tilde{u}, \tilde{v})$, где $\tilde{u} = (\tilde{x}, 0, \ldots, 0)$; $\tilde{v} = (\tilde{x}, 0, \ldots, 0)$, входит в конус Z и удовлетворяет неравенству $\tilde{v} \geqslant \tilde{u}$, т.е. в этом случае $\alpha(\mathfrak{M}) \geqslant 1$. Для $\alpha \geqslant 1$ матрица $D_1(\alpha)$ неотрицательна, и, как показано в [9], из обобщенной теоремы Гейла следует, что на решении задачи A_0 неравенство (20) или, что то же самое, неравенства (I7) обращаются в равенство.

Как уже указывалось в § I, обращение в равенство неравенств (I7) означает, что в оптимальном процессе $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ все виды фондов для $l \geqslant 1$ полностью используются, т.е. $\bar{\varphi}^l_H = 0$ для $l = 1, 2, \ldots, \tau-1$. Таким образом, выполняются соотношения (5), (6) для $i = 1, \ldots, n$; $s = 1, \ldots, \tau-1$, из которых, применяя (I6) и учитывая, что в (I7) всюду вместо неравенств имеют место равенства, получаем:

$$\begin{cases} \bar{\varphi}^0 = \bar{x}; \quad \varphi^1 = E^0_1(\alpha(\mathfrak{M})E^0_0 - \gamma^0)\bar{x} \quad ; \\ \bar{\varphi}^l = [\alpha(\mathfrak{M})]^{l-1} E^0_l(\alpha(\mathfrak{M})E - \gamma^0)\bar{x}; \quad l = 2, \ldots, \tau-1 \ ; \end{cases} \qquad (21)$$

$$\bar{x} = \bar{A}\bar{x} + (B^0 + \alpha(\mathfrak{M})\tilde{B}^1 + \cdots + [\alpha(\mathfrak{M})]^{\tau-1}\tilde{B}^{\tau-1})(\alpha(\mathfrak{M})E^0_0 - \gamma^0)\bar{x}, \qquad (22)$$

где $\tilde{B}^l = B^l E^0_l$.

Нетрудно проверить, что если вектор $\bar{x}$ удовлетворяет (22), а $\bar{\varphi}^l$ определены из соотношений (2I), то выполняется система (I7), т.е. состояние $\bar{u} = (\bar{\varphi}^0, \bar{\varphi}^1, \ldots, \bar{\varphi}^{\tau-1})$ оптимально.

Поэтому задачу определения темпа роста модели и оптимального состояния можно переписать в следующем виде (задача A_1).

Среди всех пар (α, x), где $\alpha > 1$, $x \in R^n_+$; $x \neq 0$, удовлетворяющих неравенству

$$x \geqslant D_2(\alpha)x,$$

найти пару $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ с максимальным α. Здесь

$$D_2(\alpha) = \bar{A} + (B^0 + \alpha\tilde{B}^1 + \cdots + \alpha^{\tau-1}\tilde{B}^{\tau-1})(\alpha E - \gamma^0).$$

Отметим два факта. Легко проверить, что увеличение какого-либо из коэффициентов матриц A, B^l ($l = 0, 1, \ldots, \tau-1$) может вызвать падение темпа роста $\alpha(\mathfrak{M})$. Из (22) видно, что такое изменение в матрице $B^{\tau-1}$ скажется в $[\alpha(\mathfrak{M})]^{\tau-1}$ раз сильнее,

нежели соответствующее изменение в матрице B^{0}. Другими словами, можно сказать, что задержка в строительстве фондов влияет на темп роста по степенному закону. Во-вторых, если матрица $D_2(\alpha(\mathfrak{M}))$ неразложима, то из теоремы Фробениуса (см. [10]) следует, что $\bar{x}$, как собственный вектор неразложимой матрицы с неотрицательными элементами, отвечающий собственному значению 1, строго положителен, а из (20) вытекает, что в этом случае все $\bar{\varphi}^{l}$ строго положительны. Таким образом, в этом случае из теории модели Неймана (см. [8]) следует, что данная модель имеет единственное состояние равновесия с темпом роста $\alpha(\mathfrak{M})$.

§ 3. Алгоритм нахождения темпа роста модели

Приведённый ниже алгоритм решения задачи A_1 основывается на так называемом степенном методе отыскания единственного неотрицательного собственного вектора $\bar{x}$ неотрицательной, неразложимой, нециклической матрицы L. Эта задача может быть решена многими способами (см. [11]). Нам кажется, что наиболее удобен для этой цели степенной метод. Напомним вкратце его содержание.

Так как по теореме Фробениуса (см.[10]) у такой матрицы неотрицательное собственное значение $\bar{\alpha}$, отвечающее неотрицательному собственному вектору, некратное и превосходит по модулю все другие собственные значения матрицы L, то

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{L^{\tau} x_0}{\|L^{\tau} x_0\|} = \bar{x},$$

где x_0 – произвольный строго положительный вектор. Кроме того, отношение первых компонент двух последовательных итераций сходится к $\bar{\alpha}$. Указанная последовательность сходится к пределу, как геометрическая прогрессия (соответствующие доказательства см. [11]).

В работе [9] уже был построен алгоритм, основанный на степенном методе, для решения аналогичной задачи (в этой работе вместо матрицы $D_2(\alpha)$ присутствовала матрица $\alpha D(\alpha)$, где $D(\alpha)$ - неотрицательная квадратная матрица порядка n, все элементы которой непрерывные неотрицательные монотонно возрастающие функции для $\alpha > \alpha_0$. В данной статье указанный

алгоритм обобщён для решения задачи A_1, т.е. для случая, когда $D_2(\alpha)$ есть неотрицательная квадратная матрица, элементы которой-монотонно возрастающие функции при $\alpha \geq 1$.

Мы будем рассматривать случай, когда $D_2(\alpha)$ - неразложимая при всех $\alpha \geq 1$ матрица, хотя указанный алгоритм можно обобщить на случай произвольных матриц.

Как уже указывалось, решение задачи A_1 существует и совпадает с $(\alpha(\mathfrak{M}), \bar{x})$, где $\bar{x}$ - оптимальный вектор текущих продуктов. Как и в [9], рассмотрим вспомогательную задачу A_2. Пусть фиксировано $\alpha \geq 1$ среди всех пар (γ, x), удовлетворяющих неравенству

$$x > \gamma D_2(\alpha) x; \ x \geq 0.$$

Найти пару с максимальным γ. Решение этой задачи будем обозначать $(\gamma(\alpha), x(\alpha))$. В работе [9] показано, что имеет место равенство

$$x(\alpha) = \gamma(\alpha) D_2(\alpha) x(\alpha),$$

и, значит, $x(\alpha)$ есть неотрицательный собственный вектор неразложимой неотрицательной матрицы $D_2(\alpha)$, отвечающей собственному значению $[\gamma(\alpha)]^{-1}$. Следовательно, он и $[\gamma(\alpha)]^{-1}$ могут быть найдены степенным методом.

Изучим некоторые свойства задачи A_2. Во-первых, $\gamma[\alpha(\mathfrak{M})] = 1$. Действительно, из определения решений задач A_1 и A_2 сразу следует, что $\gamma[\alpha(\mathfrak{M})] \geq 1$. Предположим, что $\gamma[\alpha(\mathfrak{M})] > 1$. Тогда

$$x[\alpha(\mathfrak{M})] = \gamma[\alpha(\mathfrak{M})] D_2[\alpha(\mathfrak{M})] x[\alpha(\mathfrak{M})] > D_2[\alpha(\mathfrak{M})] x[\alpha(\mathfrak{M})], \tag{23}$$

причём строгое неравенство в (23) имеет место сразу по всем компонентам. Ввиду непрерывности $D_2(\alpha)$ отсюда вытекает, что найдётся $\alpha_1 > \alpha(\mathfrak{M})$ такое, что

$$x[\alpha(\mathfrak{M})] \geq D_2(\alpha_1) x[\alpha(\mathfrak{M})],$$

что противоречит максимальности $\alpha(\mathfrak{M})$.

Пусть теперь $\alpha_1 > \alpha_2$. Тогда из монотонности $D_2(\alpha)$ вытекает $x(\alpha_1) = \gamma(\alpha_1) D(\alpha_1) x(\alpha_1) \geq \gamma(\alpha_1) D(\alpha_2) x(\alpha_1)$, а отсюда в силу определения решения задачи A_2 следует, что $\gamma(\alpha_2) \geq \gamma(\alpha_1)$.

Объединяя этот факт с предыдущим, получаем: если $\alpha > \alpha(\mathfrak{M})$, то $\gamma(\alpha) < 1$; если же $\alpha \leq \alpha(\mathfrak{M})$, то $\gamma(\alpha) \geq 1$.

Отсюда получается следующий алгоритм решения задачи A. Пусть взято некоторое $\alpha_0 \geq 1$, найдём $\gamma(\alpha_0)$. Предположим, что $\gamma(\alpha_0) \geq 1$ (случай $\gamma(\alpha_0) < 1$ описывается аналогично). Это значит, что $\alpha_0 \leq \alpha(\mathfrak{M})$.

Тогда в качестве α_1 возьмем $\alpha_1 = \alpha_0 + 1$; если $\gamma(\alpha_0 + 1) \geq 1$, то положим $\alpha_2 = \alpha_1 + 1$. Процесс продолжается таким образом до тех пор, пока $\gamma(\alpha_k + 1) < 1$. При этом

$$\alpha_k \leq \alpha(\mathfrak{M}); \ \alpha_k + 1 > \alpha(\mathfrak{M}).$$

Рассмотрим $\alpha_k + \frac{1}{2}$ и вычислим $\gamma(\alpha_k + \frac{1}{2})$. Если $\gamma(\alpha_k + \frac{1}{2}) \geq 1$, то есть $\alpha_k + \frac{1}{2} \leq \alpha(\mathfrak{M})$, то положим $\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{1}{2}$; если же $\gamma(\alpha_k + \frac{1}{2}) < 1$, т.е. $\alpha_k + \frac{1}{2} > \alpha(\mathfrak{M})$, то положим $\alpha_{k+1} = \alpha_k$. В обоих случаях после этого шага имеем:

$$\alpha_{k+1} \leq \alpha(\mathfrak{M}); \ \alpha_{k+1} + \frac{1}{2} > \alpha(\mathfrak{M}).$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\alpha_{k+\tau} \leq \alpha(\mathfrak{M}); \ \alpha_{k+\tau} + \frac{1}{2^\tau} > \alpha(\mathfrak{M}).$$

Таким образом, $\alpha_{k+\tau} \to \alpha(\mathfrak{M})$ при $\tau \to \infty$, и последовательность $\alpha_{k+\tau}$ сходится к $\alpha(\mathfrak{M})$, как геометрическая прогрессия с основанием $1/2$.

Выражаю благодарность Ахметову О.А. за указания, которые помогли упростить приведённый алгоритм.

Литература

1. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики.— УМН, т. 5, 1970, с. 125-169.
2. КРАСС И.А. Асимптотика растущих траекторий в моделях Гейла-Неймана. - "Докл. АН СССР", т. 196, № 1, с. 38-39.
3. ЕФИМОВ М.П., МОВШОВИЧ С.М. Анализ сбалансированного роста в динамической модели народного хозяйства.— "Экономика и мат. методы," т. 9, № 1, 1973, с. 32-44.
4. Tsukui I. Application of Turn-pike Theorem to Planning for Efficient Accumulation. Econometrica, 1968, vol 36, N 1.
5. КЛОЦВОГ Ф.Н., ЕРШОВ Э.Б. и др. Модель межотраслевого хозяйства с элементами оптимизации.— "Экономика и мат. методы", т. 7, № 5, 1971, с. 643-658.

6. ИВАНИЛОВ Ю.П., ПЕТРОВ А.А. Динамическая модель расширения и перестройки производства (π - модель). - В сб.: Кибернетику на службу коммунизму. М., "Энергия", 1971, т.6, с. 23-50.

7. MORISHIMA M. Equilibrium, Stability and Growth. London, 1964.

8. ГЕЙЛ Д. Замкнутая линейная модель производства. - В сб.: Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Физматгиз, 1963, с. 382-400.

9. КРАСС И.А., ЛУКЬЯНОВА В.А. Исследование модели Леонтьева с задержкой. - В кн.: Оптимизация. Вып. 7, Новосибирск, 1972, с. 45-59.

10. ГАНТМАХЕР Ф.Р. Теория матриц. Физматгиз, 1967.

11. ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.

Поступила в ред.-изд. отд.
3. 10. 1973 г.