1975 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 17(34)

Модели динамики и равновесия

УДК 519.95

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В МОДЕЛЯХ НЕЙМАНА-ГЕЙЛА СО СТРОГИМ СОСТОЯНИЕМ РАВНОВЕСИЯ

А.М.Рубинов

Рассмотрим модель Неймана-Гейла $Z \subset R_+^n \times R_+^n$, имеющую строгое состояние равновесия $(\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$. Пусть a - производственное отображение этой модели. В дальнейшем считаем, что отображение $a: R_+^n \longrightarrow \Pi(R_+^n)$ нормально. (Здесь и ниже мы без пояснений используем терминологию книги [1]; отметим, что строгость состояния равновесия равносильна тому, что неймановская грань, отвечающая темпу роста α, совпадает с лучом $(\lambda(\bar{x}, \alpha\bar{x})_{\lambda \geqslant 0})$. Считаем, простоты ради, что $\alpha = 1$, а вектор $\bar{x}$ и функционал $\bar{p}$ нормированы так, что $\bar{p}(\bar{x}) = 1$. Отметим, что в строгом состоянии равновесия $\bar{p} \gg 0$. Будем предполагать, что $\bar{x} \gg 0$.

В заметке показывается, что существует суперлинейный функционал q, определяемый лишь отображением a, такой, что траектория $x = (x_t)$ модели Z оптимальна в том и только в том случае, когда все точки x_t лежат на одной поверхности уровня функционала q.

Как известно [1, теорема 13.4] для каждой (бесконечной) траектории $x = (x_t)$ модели Z существует число $\lambda > 0$ такое, что $x_t \longrightarrow \lambda^t \bar{x}$. Обозначим это число через $\lambda(x)$. Через $P(x)$ обозначим пучок всех траекторий модели Z, исходящих из точки x. Для $x \in R_+^n$ положим

$$q(x) = max\{\lambda(x) : x \in P(x)\}. \tag{1}$$

Выясним некоторые свойства функционала q, определенного на конусе R^n_+ формулой (I).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Справедливы следующие утверждения:

(I) Функционал q супераддитивен и положительно однороден;

(2) q изотонен;

(3) $q(\bar{x})=1$; $q(x)>0$, если $x \gg 0$;

(4) если существует t такое, что $y \in a^t(x)$, то $q(y) \leqslant q(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (I) вытекает из суперлинейности отображения a; свойство (2) вытекает из супераддитивности и неотрицательности q; свойство (3) очевидно.

Покажем справедливость свойства (4). Пусть траектория $\chi=(x_\tau)\in P(y)$ такова, что $\lambda(\chi)=q(y)$. Рассмотрим траекторию $\chi'=(x, x'_1 \dots x'_t, x'_{t+1}, x'_{t+2} \dots)$, где $x'_t=y$, $x'_{t+\tau}=x_\tau$ $(\tau=1,2,\dots)$. Поскольку $\lambda(\chi')=\lambda(\chi)=q(y)$ и $\chi'\in P(x)$, то $q(x)\geqslant q(y)$. Предложение доказано.

Каждая оптимальная траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$ модели Z, исходящая из внутренней точки x конуса R^n_+, допускает характеристику $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)$. Здесь $(\bar{f}_t)$ – последовательность цен (линейных функционалов), зависящая от $\bar{\chi}$ и такая, что (I) $\bar{f}_t(\bar{x}_t)=\mathrm{const}$; (2) последовательность $\bar{f}_t(x_t)$ убывает для любой траектории $\chi=(x_t)$ модели Z. Следующая ниже теорема и предложение I показывают, в частности, что функционал q можно рассматривать как "общую нелинейную характеристику" всех оптимальных траекторий. Точнее говоря, для любой траектории $\chi=(x_t)$ выполняется

$$q(x_0)\geqslant q(x_1)\geqslant \cdots \geqslant q(x_t)\geqslant \cdots ;$$

оптимальность же траектории $\chi\in P(x)$, $x\gg 0$, эквивалентна тому, что

$$q(x_0)=q(x_1)=\cdots=q(x_t)=\cdots .$$

ТЕОРЕМА I. Пусть $x\gg 0$, $\chi=(x_t)\in P(x)$. Следующие условия эквивалентны:

(а) траектория χ оптимальна;

(б) $\lambda(\chi)=q(x)$;

(в) $q(x_t)=q(x)$ при всех t.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Longrightarrow$ (б). Предположим, что $\lambda(x) < q(x)$. Пусть траектория $x' = (x'_t) \in P(x)$ такова, что $\lambda(x') = q(x)$. Положим $\varepsilon = q(x) - \lambda(x)$. Так как $x_t \to \lambda(x)\bar{x}$, $x'_t \to q(x)\bar{x}$, то при достаточно больших t выполняется неравенство

$$x'_t \gg (q(x) - \frac{\varepsilon}{2})\bar{x} \gg x_t \ ,$$

которое противоречит оптимальности x.

(б) $\Longrightarrow$ (в). Пусть t - натуральное число. Наряду с траекторией x рассмотрим траекторию $x^t = (x_t, x_{t+1}, \dots)$. Ясно, что $\lambda(x) = \lambda(x^t)$ и потому $q(x_t) \geqslant \lambda(x^t) = \lambda(x) = q(x)$. Неравенство $q(x_t) \leqslant q(x)$ вытекает из предложения I.

(в) $\Longrightarrow$ (а). Если траектория x не оптимальна, то найдутся натуральное τ, число $\nu > 1$ и τ - шаговая траектория $x_\tau = (x, x'_1, \dots, x'_\tau)$ такие, что $x'_\tau = \nu x_\tau$. Траектория

$$x' = (x, x'_1, \dots, x'_\tau, \nu x_{\tau+1}, \dots, \nu x_{\tau+t} \dots)$$

входит в $P(x)$ и $\lambda(x') = \nu\lambda(x)$. Так как $q(x) > 0$ и $\lambda(x') \leqslant q(x)$, то $\lambda(x) < q(x)$. Поскольку $x_t \longrightarrow \lambda(x)\bar{x}$, то при достаточно больших t получим $x_t \ll q(x)\bar{x}$, откуда, привлекая предложение I, имеем

$$q(x_t) < q(x)\, q(\bar{x}) = q(x),$$

что противоречит условию (в). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если $x \gg 0$, то имеет место равенство

$$q(x) = \max\{q(y) : y \in a(x)\} \ . \qquad (2)$$

При этом элемент y', на котором в (2) достигается максимум, лежит на оптимальной траектории, исходящей из x. Используя это утверждение, можно предложить следующую процедуру отыскания оптимальной траектории, исходящей из x: следует найти элемент $x_1 \in a(x)$ такой, что $q(x_1) = \max\{q(y) : y \in a(x)\}$, затем элемент $x_2 \in a(x_1)$ такой, что $q(x_2) = \max\{q(y) : y \in a(x_1)\}$, и т.д. Если элемент x_t уже найден, то x_{t+1} находится из условий $x_{t+1} \in a(x_t)$, $q(x_{t+1}) = \max\{q(y) : y \in a(x_t)\}$. Так как $q(x) = q(x_1) = \dots = q(x_t) = \dots$, то полученная траектория оптимальна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть конус Z почти строго выпуклый [I, стр. 235]. Именно такой конус рассматривали Раднер и Никайдо при доказательстве теорем о магистрали. Тогда функционал q является строго выпуклым в том смысле, что $q(x_1+x_2)>q(x_1)+q(x_2)$, если x_1 и x_2 не пропорциональны. В этом случае максимум в (2) достигается в единственной точке, и потому из каждой точки $x \gg 0$ исходит единственная оптимальная траектория.

Выясним дальнейшие свойства функционала q.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Функционал q непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что q полунепрерывен сверху, и воспользоваться теоремой 10.2 из [2]. Пусть $x \in R^n_+$, $x^{(k)} \in R^n_+$ и $x^{(k)} \longrightarrow x$. Найдем траекторию $X_k = (x^{(k)}_t) \in P(x^{(k)})$ и такую, что $x^{(k)}_t \longrightarrow q(x^{(k)})\bar{x}$. Не умаляя общности, можно считать, что каждая из последовательностей $(x^{(k)}_t)^{\infty}_{k=1}$ сходится. Пусть $x_t = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}_t$. Тогда последовательность $X = (x_t)$ является траекторией модели Z, причем $X \in P(x)$. Так как $x_t \longrightarrow \lambda(x)\bar{x}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер T такой, что при $t > T$ выполняется неравенство

$$x_t \ll (\lambda(x) + \frac{\varepsilon}{2})\bar{x} .$$

Зафиксируем $t > T$ и найдем номер K_t такой, что при $k > K_t$

$$x^{(k)}_t \ll x_t + \frac{\varepsilon}{2}\bar{x} .$$

Таким образом, при $k > K_t$

$$x^{(k)}_t \ll (\lambda(x) + \varepsilon)\bar{x} .$$

В силу теоремы 1 имеем $q(x^{(k)}_t) = q(x^{(k)})$, и потому, как следует из предложения 1

$$q(x^{(k)}) = q(x^{(k)}_t) < (\lambda(x) + \varepsilon)q(\bar{x}) = \lambda(x) + \varepsilon \leq q(x) + \varepsilon .$$

Поскольку ε произвольно, то $\overline{\lim}\, q(x^{(k)}) \leq q(x)$. Предложение доказано.

Из предложений 1 и 2 следует, что функционал q суперлинеен и, следовательно, представим в виде

$$q(x) = \inf \{ f(x) : f \in U_q \} ,$$

где U_q - множество всех линейных функционалов, опорных к q.

ТЕОРЕМА 2. Справедливо равенство

$$U_q = \overline{\bigcup_{t=1}^{\infty} (a')^{-t}(\bar{p})},$$

где $(a')^{-t} = ((a')^{-1})^t$, а $(a')^{-1}$ - отображение, обратное двойственному к a отображению a', черта означает замыкание.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как отмечено в теореме 7,6 из [I], множество $\xi = \bigcup_{t=1}^{\infty} (a')^{-t}(\bar{p})$ является наименьшим собственным множеством отображения $(a')^{-1}$, отвечающим собственному числу $\frac{1}{\alpha} = 1$, в совокупности $\Pi^{\wedge}$, состоящей из всех выпуклых множеств ξ таких, что

$$\bar{p} \in \xi \subset \eta = \{f > 0 : f(\bar{x}) > \bar{p}(\bar{x}) = 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Достаточно проверить, что для $x \gg 0$ выполняется

$$q(x) = \inf\{f(x) : f \in \xi = \bigcup_{t=1}^{\infty} (a')^{-t}(\bar{p})\}.$$

Зафиксируем $x \gg 0$ и положим

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_t = \max\{\lambda : \lambda\bar{x} \in a^t(x)\} \\ \mu_t = \max\{\bar{p}(y) : y \in a^t(x)\} \end{array}\right\}; \quad t = 1, 2, \ldots .$$

Известно (см. [I], стр. 253), что последовательность (λ_t) возрастает, последовательность (μ_t) убывает и $\lim \lambda_t = \lim \mu_t$. Покажем, что

$$\mu_t > q(x) \geqslant \lambda_t . \tag{3}$$

В самом деле, так как $\lambda_t \bar{x} \in a^t(x)$, то найдется траектория $x = (x_t) \in P(x)$ такая, что $x_\tau = \lambda_t \bar{x}$ при всех $\tau \geqslant t$. Отсюда следует, что $\lambda(x) = \lambda_t$, а потому $q(x) \geqslant \lambda_t$.

Пусть теперь траектория $\bar{x} = (\bar{x}_t) \in P(x)$ такова, что $\bar{x}_t \longrightarrow q(x)\bar{x}$. Тогда $\bar{p}(\bar{x}_t) \longrightarrow q(x)$. Из определения $\bar{p}$ следует, что последовательность $\bar{p}(\bar{x}_t)$ убывает и потому $\bar{p}(\bar{x}_t) > q(x)$. Так как $\mu_t > \bar{p}(\bar{x}_t)$, то и $\mu_t > q(x)$. Таким образом, неравенства (3) доказаны. Так как $\lim \mu_t = \lim \lambda_t$, то, в частности,

$$q(x)=\lim_t \mu_t = \inf_t \mu_t .$$

Используя теорему двойственности (теорема 4.I в [I]), имеем

$$\mu_t = \max\{\bar{p}(y) : y \in a^t(x)\} = \inf\{f(x) : f \in (a')^{-t}(\bar{p})\},$$

откуда

$$q(x) = \inf_t \inf\left\{f(x) : f \in (a')^{-t}(\bar{p})\right\} = \inf\left\{f(x) : f \in \xi\right\}.$$

Теорема доказана.

Литература

I. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., Наука, 1973, 336 с.

2. РОКАФЕЛЛАР Р.Т. Выпуклый анализ. М., Мир, 1973, 469 с.

Поступила в ред.-изд. отд.
29. I. 1975 г.