Численные методы

УДК 512.25/26

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО МАКСИМУМА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

И.Н.Меламуд

§ I. Метод последовательного улучшения допустимых решений для одного класса многоэкстремальных задач

Пусть $g_i (i \in J_1 = \{1,\dots,m_1\})$ - строго вогнутые функции, заданные в евклидовом пространстве E_n; $a_i (i \in J_2 = \{m_1+1,\dots,m_1+m_2\})$, c - n-мерные векторы; b - m-мерный вектор, где $m = m_1 + m_2$. Рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА П. Найти вектор $x = (x_1,\dots,x_n)^T$, доставляющий максимум функции $F(x) = c^T x$, при условиях: 1) $x_j > 0$, $j \in J = \{1,\dots,n\}$; 2) $a_i^T x \leq b_i$, $i \in J_2$; 3) $g_i(x) \leq b_i$, $i \in J_1$.

Обозначим через Q область допустимых решений задачи П. Будем предполагать, что ограничения $g_i(x) \leq b_i$ удовлетворяют следующему условию.

УСЛОВИЕ C1. Для всех $i \in J_1$ существует такое $x \in Q$, что $g_i(x) < b_i$ (см. [I]).

Пусть также функции g_i непрерывно дифференцируемы. Положим

$$f_i(x) = \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial x_j},\ j = 1,\dots,n \right\} \quad i \in J_1 .$$

Определим для произвольного $x \in Q$ множества индексов $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J(x)$ следующим образом: $J_1(x)=\{i \in J_1 : g_i(x)=b_i\}$; $J_2(x)=\{i \in J_2 : a_i^T x = b_i\}$; $J(x)=\{j \in J : x_j = 0\}$.

Построим метод улучшения допустимых решений для поставленной задачи.

Пусть дана некоторая точка $x^P \in Q$. Легко может быть доказана следующая

ТЕОРЕМА I. Если для задачи П при всех $i \in J_1$ выполняется неравенство $g_i(x^P) < b_i$, тогда либо в точке x^P существует подходящее возможное направление (см.[I]) задачи П, либо эта точка является точкой глобального максимума задачи П.

Пусть существует такое $i_1 \in J_1$, что $g_{i_1}(x^P)=b_{i_1}$, т.е. $J_1(x^P) \neq \emptyset$.

Построим следующую задачу.

ЗАДАЧА П''. Найти вектор $x=(x_1,\dots,x_n)^T$, доставляющий максимум функции $c^T x$, при условиях:

1) $x_j > 0$, $j \in J$; 2) $a_i^T x \leq b_i$, $i \in J_2$;
3) $d_i^T x \leq b_i^*$, $i \in J_1(x^P)$; $g_i(x) \leq b_i$, $i \in J_1 \setminus J_1(x^P)$.

В этой задаче $\{x / d_i^T x - b_i^* = 0\}$ - гиперплоскость, касательная к гиперповерхности $\{x / g_i(x) - b_i = 0\}$ в точке x^P, т.е. $d_i = f_i(x^P)$. Обозначим через P область допустимых решений задачи П''.

Если задача П'' имеет подходящее возможное направление в точке x^P, то это направление можно взять в качестве подходящего возможного направления для задачи П в точке x^P, так как $Q \supset P$.

Пусть задача П'' не имеет подходящего возможного направления в точке x^P. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$
|\alpha| \qquad \begin{cases} a_i^T x = b_i^*, & i \in J_1(x^p); \\ a_i^T x = b_i, & i \in J_2(x^p); \\ x_j = 0, & j \in J(x^p); \end{cases}
$$

и обозначим через A матрицу, составленную из коэффициентов этой системы. Будем различать 2 случая: А) $r(A) \leq n-1$; В) $r(A) = n$ ($r(A)$ - ранг матрицы А).

А) Задача П'' не имеет подходящего возможного направления в точке x^p и для системы $|\alpha|$ ранг матрицы $r(A) \leq n-1$. В этом случае множество решений системы уравнений $|\alpha|$ является аффинным многообразием L размерности $\rho(L) \geq 1$.

ТЕОРЕМА 2. Если в задаче П'' подходящее возможное направление в точке x^p не существует и если $r(A) \leq n-1$, тогда $F(x) = F(x^p)$ для всех $x \in L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_\varepsilon(x^p)$ - n-мерный шар радиуса ε с центром в точке x^p . Возьмем такое $\varepsilon > 0$, чтобы $S_\varepsilon(x^p) \cap L \subset P$. В качестве ε можно взять любое число, не большее чем радиус n-мерного шара с центром в точке x^p , не пересекающегося ни с одной из ограничивающих гиперповерхностей

$$
\{x / g_i(x) = b_i\}, \quad i \in J_1 \setminus J_1(x^p), \tag{2.1}
$$

и гиперплоскостей

$$
\{x / a_i^T x = b_i\}, \quad i \in J_2 \setminus J_2(x^p); \tag{2.2}
$$

$$
\{x / x_j = 0\}, \quad j \in J \setminus J(x^p). \tag{2.3}
$$

Если $F(x) = F(x^p)$ для всех $x \in S_\varepsilon(x^p) \cap L$, тогда в силу линейности F получим $F(x) = F(x^p)$ для всех $x \in L$.

Докажем, что $F(x) = F(x^p)$ для всех $x \in S_\varepsilon(x^p) \cap L$. Действительно, при $x \in P$ имеем $F(x) \leq F(x^p)$, так как для задачи П" в точке x^p нет подходящего возможного направления. Однако, по построению, $S_\varepsilon(x^p) \cap L \subset P$, т.е. $F(x) \leq F(x^p)$ для всех $x \in S_\varepsilon(x^p) \cap L$. Предположим, что существует $x' \in S_\varepsilon(x^p) \cap L$ такое, что $F(x') < F(x^p)$, тогда найдется точка $x'' \in S_\varepsilon(x^p) \cap L$, лежащая

на одной прямой с точками x' и x^p такая, что $F(x'')>F(x^p)$. Так как в задаче П$''$ нет подходящего возможного направления в точке x^p, то x'' не принадлежит множеству P. Значит, для всех $x \in L \cap S_\varepsilon(x^p)$, а тогда и для всех $x \in L$ имеем $F(x)=F(x^p)$. Теорема доказана.

На основании теоремы 2, если $r(A) \leq n-1$, то находим произвольное решение x^* системы /$\mathcal{A}$/ такое, что $x^* \neq x^p$. Затем делаем п о л ш а г а и з т о ч к и x^p в д о л ь л у ч а $\ell(x^p, x^*)$ следующим образом:

Находим точки $x^p+\mu_i(x-x^p)$, $x^p+\nu_i(x-x^p)$ и $x^p+\eta_j(x-x^p)$ пересечения луча $\ell(x^p, x^*)$ с гиперповерхностями (2.I) и гиперплоскостями (2.2) и (2.3) соответственно. Причем, так как с гиперповерхностями луч может пересекаться в двух точках $x^p+\mu_i'(x-x^p)$ и $x^p+\mu_i''(x-x^p)$, то берем $\mu_i=\min(\mu_i', \mu_i'')$. Затем определяем $\lambda_1=\min\limits_{i\in J_1 \setminus J_1(x^p)} \mu_i$, $\lambda_2=\min\limits_{i\in J_2\setminus J_2(x^p)} \nu_i$,

$\lambda_3=\min\limits_{j\in J\setminus J(x^p)} \eta_j$ и $\lambda'=\min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Находим точку $x'=x^p+\lambda'(x-x^p)$ и строим $x^{p'}=\dfrac{x^p+x'}{2}$.

Для полученной точки $F(x^{p'})=F(x^p)$, так как она принадлежит аффинному многообразию L. Из строгой вогнутости гиперповерхностей $\{x/g_i(x)=b_i\}$ при $i\in J_1(x^p)$ получаем, что для построенной точки $x^{p'}$ множество $J_1(x^{p'})$ пусто, т. е. полученная точка относится к типу точек, рассмотренных в теореме I, и в ней либо существует подходящее возможное направление задачи П, либо она является точкой глобального максимума этой задачи.

В) Задача П$''$ не имеет подходящего возможного направления в точке x^p и $r(A)=n$. В данном случае x^p является единственным решением системы уравнений /$\mathcal{A}$/.

Рассмотрим выпуклый конус $B=\{x/d_i^T x \leq b_i^*,\ i\in J_1(x^p);\ a_i^T x\leq b_i,\ i\in J_2(x^p);\ x_j\geq 0,\ j\in J(x^p)\}$ с вершиной в точке x^p и полупространство $H=\{x/F(x)\geq F(x^p)\}$ и построим выпуклый конус $\mathcal{D}=B\cap H$. Полученный конус $\mathcal{D}$ не пуст, так как $x^p\in\mathcal{D}$

ТЕОРЕМА 3. Пусть задача Π'' не имеет подходящего возможного направления в точке x^p и $r(A)=n$. Тогда если $\mathcal{D}$ состоит из единственной точки x^p, то в этой точке достигается локальный максимум задачи Π.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть в любом n-мерном шаре $S_t(x^p)$ радиуса t с центром в точке x^p существует точка $x \in Q$ такая, что $F(x) > F(x^p)$. Рассмотрим последовательность шаров $S_{t_k}(x^p)$ при $t_k \to 0$. В качестве $S_{t_1}(x^p)$ возьмем n-мерный шар, не пересекающийся ни с одной из гиперповерхностей (2.I), и гиперплоскостей (2.2) и (2.3). По предположению, для любого k существует точка $z^k \in S_{t_k}(x^p) \cap Q$ такая, что $F(z^k) > F(x^p)$. Из последовательности z^k можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке x^p. Не ограничивая общности, будем считать, что сама последовательность сходится к точке x^p. Рассмотрим лучи $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}(x^p, z^k) = \{x = x^p + \lambda z^k, \lambda \geqslant 0\}$. Так как $F(z^k) > F(x^p)$ для всех z^k и F — линейная функция, то F монотонно возрастает вдоль каждого из лучей $\mathcal{L}_k$. Возьмем на этих лучах отрезки $O[x^p, z^k]$.

Среди них нет ни одного, содержащегося в множестве Q, потому что для этого отрезка было бы $O[x^p, z^k] \subset B$, а значит, и $O[x^p, z^k] \subset \mathcal{D}$, что противоречило бы условию. На луче $\mathcal{L}_1$ возьмем точку $y_1 \in Q$ такую, что $y_1 \bar{\in} O[x^p, z^1]$ и $O[z^1, y_1] \subset Q$.

Существование такой точки вытекает из выбора шара $S_{t_1}(x^p)$. Найдем $|z^1 - y_1| = c'$ и построим последовательность точек $y_k \in \mathcal{L}_k$ таких, что $y_k \bar{\in} O[x^p, z^k]$ и $|z^k - y_k| = c'$. Из сходимости последовательности точек z^k к точке x^p получим, что $O[z^k, y_k] \subset Q$. Обозначим $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = y$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \mathcal{L}(x^p, z^k) = \mathcal{L}$.

Мы получили, что на луче $\mathcal{L}$ существует отрезок $O[x^p, y]$ длины c' и $O[x^p, y] \subset Q$. Заметим, что конус B содержит все лучи $\mathcal{L}(x^p, x)$, для которых $O[x^p, x'] \subset Q$, поэтому $\mathcal{L} \subset B$. Однако, по предположению, $F(x) > F(x^p)$ для всех $x \in \mathcal{L}(x^p, z^k)$, а значит, для всех $x \in O[x^p, y]$ будем иметь $F(x) \geqslant F(x^p)$.

Следовательно, точка $y \neq x^p$ принадлежит множеству $\mathcal{D} = B \cap H$, что противоречит единственности точки x^p в множестве $\mathcal{D}$. Теорема доказана.

В случае, если выпуклый конус $\mathcal{D}$ состоит не из единственной точки, тогда необходимо найти произвольную точку $x^* \in \mathcal{D}$ такую, что $x^* \neq x^p$. Получим луч $\mathcal{L}(x^p, x^*) \subset \mathcal{D}$, вдоль которого $F(x) = F(x^p)$ (неравенство $F(x) > F(x^p)$ невозможно, ибо в точке x^p подходящего возможного направления задачи П$''$ не существует). Затем делаем полшага вдоль луча $\mathcal{L}(x^p, x^*)$ и находим точку $x^{p'}$. В полученной точке $F(x^{p'}) = F(x^p)$ и $g_i(x) < b_i$ для всех $i \in J_1$ (из строгой вогнутости функций g_i). Поэтому, либо эта точка является точкой глобального максимума задачи П (см. теорему I), либо задача П имеет подходящее возможное направление в точке $x^{p'}$.

Следуя работе [2] можно проверить, является ли точка x^p единственной точкой множества $\mathcal{D}$ и если эта точка не единственна в множестве $\mathcal{D}$, то найти произвольную точку $x^* \in \mathcal{D}$ такую, что $x^* \neq x^p$.

§ 2. Метод последовательного улучшения допустимых решений для задач с вогнутыми и выпуклыми ограничениями

Пусть g_i $(i \in J_1 = \{1, \dots, m_1\})$ - вогнутые, а $g_i (i \in J_3 = \{m_1 + m_2 + 1, \dots, m_1 + m_2 + m_3\})$ - выпуклые функции, заданные в евклидовом пространстве E_n; $a_i (i \in J_2 = \{m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2\})$ и c - n-мерные векторы, b - m-мерный вектор, где $m = m_1 + m_2 + m_3$.

Рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА Ш. Найти вектор $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, доставляющий максимум функции $F(x) = c^T x$, при условиях:

I) $x_j \geq 0$, $j \in J = \{1, \dots, n\}$; 2) $a_i^T x \leq b_i$, $i \in J_2$;

3) $g_i(x) \leq b_i$, $i \in J_1$; $g_i(x) \leq b_i$, $i \in J_3$.

Обозначим через Q область допустимых решений задачи Ш. Будем предполагать, что ограничения $g_i(x) \leq b_i$, $i \in J_1 \cup J_3$, удовлетворяют ранее сформулированному условию $C1$.

Пусть также функции g_i непрерывно дифференцируемы. Положим $f_i(x) = \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial x_j}, \ j = 1, \dots, n \right\}$ $i \in J_1 \cup J_3$. Определим для про-

извольного $x \in Q$ множества индексов $J_1(x), J_2(x), J_3(x), J(x)$ следующим образом: $J_1(x)=\{i\in J_1 : g_i(x)=b_i\}$; $J_2(x)=\{i\in J_2 : a_i^T x=b_i\}$; $J_3(x)=\{i\in J_3 : g_i(x)=b_i\}$; $J(x)=\{j\in J : x_j=0\}$.

Построим метод улучшения допустимых решений для поставленной задачи. Пусть дана некоторая точка $x^p \in Q$. Будем полагать, что $J_1(x^p)\neq\varnothing$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если $J_1(x^p)=\varnothing$, тогда нахождение подходящего возможного направления задачи Ш в точке x^p сводится к нахождению подходящего возможного направления для задачи выпуклого программирования (см. теорему I предыдущего параграфа). Рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА Ш$'$. Найти вектор $x=(x_1,\dots,x_n)^T$, доставляющий максимум функции $c^T x$, при условиях:

1) $x_j \geq 0$, $j\in J$; 2) $a_i^T x \leq b_i$, $i\in J_2$;
3) $d_i^T x \leq b_i^*$, $i\in J_1(x^p)$; $g_i(x)\leq b_i$, $i\in J_1\setminus J_1(x^p)$;
$g_i(x)\leq b_i$, $i\in J_3$.

В этой задаче $\{x/d_i^T x - b_i^* = 0\}$ – гиперплоскость касательная к гиперповерхности $\{x/g_i(x)-b_i=0\}$ в точке x^p, т.е. $d_i = f_i(x^p)$.

Обозначим через Γ область допустимых решений задачи Ш$'$.

СЛУЧАЙ I. Задача Ш$'$ удовлетворяет условию $C1$.

Если при этом подходящее возможное направление задачи Ш$'$ в точке x^p существует, то оно является подходящим возможным направлением и для задачи Ш.

Если же задача Ш$'$ не имеет подходящего возможного направления в точке x^p, тогда рассматриваем вспомогательную задачу.

ЗАДАЧА Ш$''$. Найти вектор $x=(x_1,\dots,x_n)^T$, доставляющий максимум функции $G(x)=\sum_{i\in J_1(x^p)}(-g_i(x))$, при условиях:

1) $x_j \geq 0$, $j\in J(x^p)$; 2) $a_i^T x\leq b_i$, $i\in J_2(x^p)$;
3) $g_i(x)\leq b_i$, $i\in J_3(x^p)$; $d_i^T x\leq b_i^*$, $i\in J_1(x^p)$; 4. $F(x)\geq F(x^p)$.

Полученная задача является многоэкстремальной. Обозначим через T область допустимых решений задачи Ш$''$. Множество T является выпуклым, а функция $G(x)$ – непрерывно дифференци-

руемой. Если задача Ш$'$ удовлетворяет условию $C1$, то легко может быть доказана следующая

ТЕОРЕМА 4. Если задача Ш$''$ не имеет подходящего возможного направления в точке x^P, то x^P является точкой локального максимума задачи Ш$''$.

СЛЕДСТВИЕ. Если задача Ш$''$ не имеет подходящего возможного направления в точке x^P, то для всех $x \in P \cap S_\varepsilon(x^P)$, для которых $F(x)=F(x^P)$, имеет место $J_1(x)=J_1(x^P)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если функция g_i вогнута и непрерывно дифференцируема, то для любой точки $x^P \in N_i=\{x/g_i(x)=b_i\}$ множество $M_i=\{x/g_i(x)-b_i=d_i^T x-b_i^*=0\}$ является аффинным многообразием.

ТЕОРЕМА 5. Если задача Ш$''$ не имеет подходящего возможного направления в точке x^P, то x^P является точкой локального, а при $J_1(x^P)=\phi$ глобального максимума задачи Ш.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что точка x^P не является точкой локального максимума задачи Ш. В этом случае для любого $\varepsilon>0$ существует такое $x \in Q \cap S_\varepsilon(x^P)$, что $F(x)>F(x^P)$. Если подберем достаточно малое $\varepsilon'>0$, то из любой точки $x' \in Q \cap S_{\varepsilon'}(x^P)$, для которой $F(x')>F(x^P)$, можно провести луч перпендикулярно множеству $H=\{x/F(x)=F(x^P)\}$ и найти точку x^* пересечения луча и гиперплоскости H. Точка $x^* \in P$. Таким образом, получим, что существует $x^* \in P$, в которой есть подходящее возможное направление $\lambda(x^*,x')$ задачи Ш$''$. Но из теоремы 4 $J_1(x^*)=J_1(x^P)$. Поэтому, согласно замечанию 2, если в точке x^* существует подходящее возможное направление задачи Ш$''$, то оно существует и в точке x^P, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Если задача Ш$''$ имеет подходящее возможное направление в точке x^{p}, тогда делаем в этом направлении шаг длины δ (где δ достаточно мало) и получаем точку $x^{p'}$, в которой $J_1(x^{p'}) \subset J_1(x^{p})$ и $F(x^{p'}) = F(x^{p})$. Затем находим подходящее возможное направление в точке $x^{p'}$ для задачи Ш$'$, построенной для этой точки. Если же задача Ш$'$ не имеет в точке $x^{p'}$ подходящего возможного направления, то в данной точке строим задачу Ш$''$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не получим точку $x^{p^{\kappa}}$ такую, что $F(x^{p^{\kappa}}) = F(x^{p})$ и в ней существует подходящее возможное направление задачи Ш$'$, либо задача Ш$''$, построенная для точки $x^{p^{\kappa}}$, не имеет подходящего возможного направления в этой точке, а значит, точка $x^{p^{\kappa}}$ является точкой локального (при $J_1(x^{p^{\kappa}}) = \emptyset$ глобального) максимума задачи Ш.

СЛУЧАЙ 2. Задача Ш$'$ не удовлетворяет условию $C1$.

В задаче Ш$'$ ограничения $g_i(x) \leq b_i$ при $i \in J_3(x^{p})$ заменяем ограничениями $g_i(x) \leq b_i + \varepsilon$, где ε – малое положительное число. Получим следующую задачу.

ЗАДАЧА Ш$'_1$. Найти вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, доставляющий максимум функции $c^T x$, при условиях:

1) $x_j \geq 0$, $j \in J$; 2) $a_i^T x \leq b_i$, $i \in J_2$;

3) $d_i^T x \leq b_i^*$, $i \in J_1(x^{p})$; $g_i(x) = b_i$, $i \in J_1 \setminus J_1(x^{p})$;

$g_i(x) \leq b_i + \varepsilon$, $i \in J_3(x^{p})$; $g_i(x) \leq b_i$, $i \in J_3 \setminus J_3(x^{p})$.

Обозначим через P_1 область допустимых решений задачи Ш$'_1$. В точке x^{p} имеем $g_i(x^{p}) < b_i + \varepsilon$ для $i \in J_3(x^{p})$, поэтому для задачи Ш$'_1$ условие $C1$ выполняется. Возьмем x^{p} в качестве исходной точки для задачи Ш$'_1$. Если в точке x^{p} не существует подходящего возможного направления задачи Ш$'_1$, то перейдем к точке $x^{p^{\kappa}} \in P_1$, в которой $F(x^{p^{\kappa}}) = F(x^{p})$, $|x^{p^{\kappa}} - x^{p}| < \delta$, и задача Ш$'_1$ имеет подходящее возможное направление в ней или $x^{p^{\kappa}}$ является точкой локального максимума задачи Ш$_1$ (задача Ш$_1$ получена из задачи Ш заменой ограничений $g_i(x) \leq b_i$ для $i \in J_3(x^{p})$ на $g_i(x) \leq b_i + \varepsilon$). Однако допустимая область задачи Ш$_1$ содержит в себе допустимую область задачи Ш, т.е. x^{p} является точкой локального максимума задачи Ш.

Если в точке x^{p} существует подходящее возможное направление задачи $Ш_1'$, тогда переходим к точке $x^* \in P_1$ такой, что $F(x^*) > F(x^p)$. Если $x^* \bar{\in} P$, необходимо возвратиться в допустимую область задачи Ш. Для этого используем метод, предложенный Зойтендейком для отыскания исходной точки.

Обозначим $y_i(x^*) = b_i - g_i(x^*)$, $i \in J_3$. Затем выбираем $y_i(x^*)$, $i \in J_3$, которые отрицательны и вводим $\xi > 0$ и $\rho_i > 0$ для $i \in J_3$ такие, что

$$\rho_i = \begin{cases} 0, & y_i(x^*) \geqslant 0; \\ \alpha_i > 0, & y_i(x^*) < 0. \end{cases}$$

Решаем задачу

$$\max\{-\xi / g_i(x) - \rho_i \xi \leqslant b_i,\ i \in J_3;\ a_i^T x \leqslant b_i,\ i \in J_2;$$
$$g_i(x) \leqslant b_i,\ i \in J_1;\ x_j \geqslant 0,\ j \in J;\ \xi > 0;\ F(x) \geqslant F(x^*)\}.$$

Исходным решением берем $x = x^*$ и $\xi = \max\{-\frac{y_i(x^*)}{\rho_i} / \rho_i > 0\}$. Задача будет решена, если придем к такой точке x', что $\xi = 0$. Если же к такой точке не придем, тогда, взяв точку $x^{t_1} = x^p + \frac{1}{10}(x^* - x^p)$, возвращаемся из нее в область Q к такой точке $x' \in Q$, что $F(x') \geqslant F(x^{t_1})$. Этот процесс может продолжаться до получения точки $x^{t_k} = x^p + \frac{1}{10^k}(x^* - x^p)$, из которой нельзя перейти к такой точке $x' \in Q$, что $F(x') > F(x^{t_k})$, и при этом $\frac{1}{10^k} \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ — наперед заданное малое число. Тогда получим, что x^p является точкой локального максимума задачи Ш.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Применять изложенный метод возвращения в данном случае можно, так как ε мало, т.е. в этом случае не может возникнуть ситуации, показанной на рис. I. Для поиска исходной точки задачи Ш этот метод неприменим.

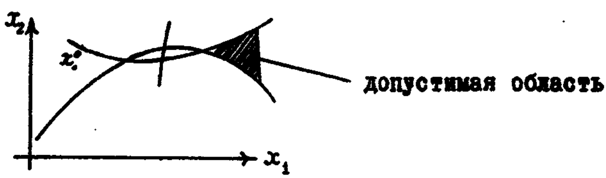

Рис. I.

§ 3. Нахождение локального максимума задачи III

Пользуясь предложенным методом улучшения допустимых решений, получаем последовательность $x^1,\dots,x^p,x^{p+1},\dots$, такую, что $F(x^k)<F(x^{k+1})$. Сходимость этой последовательности получаем из сходимости метода возможных направлений и малых шагов при вспомогательных переходах. Если последовательность конечна, то получим точку локального максимума задачи III. Если же последовательность бесконечна, то она может сходиться к точке $x^*\in Q$, которая не является точкой локального максимума задачи III. Аналогичный случай мог возникнуть и для задач выпуклого программирования. В этих задачах получить максимум позволяет использование алгоритма $AZ1$ [I]. Этот алгоритм можно применить и для задачи III. С этой целью в задачах отыскания подходящего возможного направления вместо $J_1(x), J_2(x)$, $J_3(x)$, $J(x)$ рассматриваем $J_1(x,\varepsilon)=\{i\in J_1: b_i-\varepsilon\le g_i\le b_i\}$; $J_2(x,\varepsilon)=\{i\in J_2: b_i-\varepsilon\le a_i^T x\le b_i\}$; $J_3(x,\varepsilon)=\{i\in J_3: b_i-\varepsilon\le g_i\le b_i\}$; $J(x,\varepsilon)=\{j\in J: 0\le x_j\le\varepsilon\}$,

где ε – заданное положительное число.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Последовательность допустимых решений $x^1,\dots,x^p,\dots$ задачи III, полученная предложенным методом улучшения допустимых решений с использованием алгоритма $AZ1$, может сходиться к точке, не являющейся точкой локального максимума данной задачи. Этот случай возникает, если область допустимых решений Q задачи III – связное множество, а Q° – несвязное множество (см. пример на рис. 2).

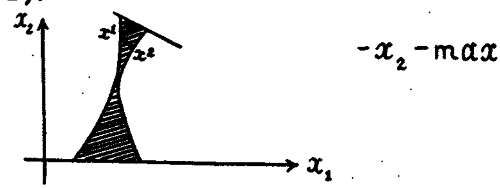

Рис. 2.

ТЕОРЕМА 6. Если допустимая область Q задачи III обладает свойством,

что Q° является связным множеством, то метод последовательного улучшения допустимых решений с использованием алгоритма $AZ1$ приводит к точке локального максимума задачи Ш.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что последовательность x^k, полученная методом последовательного улучшения допустимых решений с использованием алгоритма $AZ1$, сходится к точке x^*, не являющейся точкой локального максимума задачи Ш. Из сходимости последовательности решений к данной точке следует, что существует такая точка x^l, начиная с которой для всех $k > l$

$$b_i-\varepsilon\le g_i(x^k)\le b_i,\ i\in J_1(x^*);\ b_i-\varepsilon\le a_i^T x^k\le b_i,\ i\in J_2(x^*);$$
$$b_i-\varepsilon\le g_i(x^k)\le b_i,\ i\in J_3(x^*);\ 0\le x_j^k\le\varepsilon,\ j\in J(x^*).$$

Для точки x^l строим множества $J_1(x^l,\varepsilon)$, $J_2(x^l,\varepsilon)$, $J_3(x^l,\varepsilon)$, $J(x^l,\varepsilon)$ и решаем, используя алгоритм $AZ1$, задачу нахождения подходящего возможного направления в точке x^l для задачи Ш. Из связности Q°, если x^* не является точкой локального максимума задачи Ш, то в точке x^l либо существует подходящее возможное направление, либо можно перейти к точке $x^{l'}\in Q^\circ$ такой, что $F(x^{l'})=F(x^l)$, и в ней существует подходящее возможное направление задачи Ш, определяемое предложенным методом с использованием алгоритма $AZ1$. Получим точку $x^{l+1}\in Q$ такую, что $x^{l+1}\,\bar{\in}\, S_\varepsilon(x^*)$ и $F(x^{l+1})>F(x^l)$. Получаем противоречие сходимости последовательности x^k к точке x^*. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Если область Q допустимых решений задачи Ш состоит из t связных областей $Q_1,\dots,Q_t$, для которых множества $Q_1^\circ,\dots,Q_t^\circ$ являются тоже связными, то метод улучшения допустимых решений с применением алгоритма $AZ1$ приводит в задаче Ш к точке ее локального максимума.

Если Q является связным множеством, а Q° - несвязным множеством, то вместо множества Q рассматриваем множество $C \supset Q$ такое, что C° - связное множество. Для этого при нахождении подходящего возможного направления в точке x^{p} для задачи Ш строим вспомогательную задачу Ш$_2$, полученную из задачи Ш заменой ограничений $g_i(x) \leq b_i$, $i \in J_1(x^p, \varepsilon)$, на ограничения $g_i(x) \leq b_i + \varepsilon$. После нахождения подходящего возможного направления в точке x^p для задачи Ш$_2$ определяем длину шага в области C допустимых решений этой задачи, т.е. находим точку y^{p+1}. Затем определяем точку x^{p+1} из условия $|x^{p+1} - y^{p+1}| = \min\limits_{x \in O[y^p, y^{p+1}] \cap Q} |x - y^{p+1}|$. Далее ищем подходящее возможное направление в точке y^{p+1} для задачи Ш$_2$ и длину шага в области C, т.е. точку y^{p+2}, после чего находим точку x^{p+2} из условия $|x^{p+2} - y^{p+2}| = \min\limits_{x \in O[y^{p+1}, y^{p+2}] \cap Q} |x - y^{p+2}|$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не получим точку y^{h+1} такую, что отрезок $O[y^h, y^{h+1}] \cap Q = \emptyset$. В этом случае возвращаемся в точку x^h и из нее продолжаем процесс нахождения подходящего возможного направления для задачи Ш. Полученная последовательность $x^1, \ldots, x^h, x^{h+1}, \ldots$ будет сходиться к точке локального максимума задачи Ш по построению.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве x^p, с которой начинаем рассматривать задачу Ш$_2$ наряду с задачей Ш, берем точку, начиная с которой последовательность допустимых решений, полученная методом улучшения допустимых решений с применением алгоритма $AZ1$, сходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Очевидно, что сказанное выше можно распространить на случай, когда Q - несвязное множество и $Q = \bigcup\limits_{s=1}^{t} Q_s$, где Q_s - связные множества.

Литература

1. ЗОЙТЕНДЕЙК Г. Методы возможных направлений. М., ИИЛ, 1963.
2. ЛАНГЕ О. Оптимальные решения. М., "Прогресс", 1967.

3. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Конечномерные модели оптимизации. Новосибирск, НГУ, 1970.

Поступила в ред.-изд. отд.
26. 7. 1973 г.