Выпуклый анализ

УДК 513.88+519.35/53

ЗАДАЧА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МАССЫ НА КОМПАКТЕ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКОЙ

К.Алсынбаев, Б.Имомназаров, Г.Ш.Рубинштейн

В этой статье основные результаты работы [1] (см. также [2]-[4]) переносятся на тот случай, когда затраты $r(x,y)$ по перемещению единицы массы из точки x в точку y могут не совпадать с затратами $r(y,x)$ по перемещению той же единицы массы из y в x.

Условимся говорить, что неотрицательная функция $r: Q\times Q \to R_+$ определяет на множестве Q несимметричную метрику, если при любых x, y и z из Q

$$r(x,y)\leq r(x,z)+r(z,y),$$

причем

$$r(x,y)=r(y,x)=0 \Longleftrightarrow x=y.$$

Каждая несимметричная метрика r порождает на Q некоторую обычную (симметричную) метрику

$$\rho(x,y)=\max\{r(x,y),\, r(y,x)\}. \tag{1}$$

Множество Q с несимметричной метрикой r будем называть компактным, если оно является таковым в метрике (1).

Рассмотрим теперь произвольный компакт Q с несимметричной метрикой r. Систему его борелевских множеств (точнее, борелевских множеств компакта Q с метрикой (1)) обозначим

через $\mathcal{B}$. Далее, через $\Phi_0(\mathcal{B})$ обозначим линейное пространство, состоящее из всех σ-аддитивных функций $\varphi : \mathcal{B} \to R$, у которых полная положительная вариация $\varphi^+(Q)$ совпадает с полной отрицательной вариацией $\varphi^-(Q)$, т.е. $\varphi(Q) = \varphi^+(Q) - \varphi^-(Q) = 0$.

В интересующей нас задаче предполагается заданной некоторая функция $\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B})$. При этом неотрицательные σ-аддитивные функции φ^+ и φ^- интерпретируются соответственно как требуемое и имеющееся распределения массы на компакте Q. Для перехода от одного из этих распределений к другому требуется осуществить некоторые перевозки. Последние определяются выбором неотрицательной σ-аддитивной по каждому аргументу функции $\psi : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to R_+$, удовлетворяющей следующему балансовому соотношению:

$$\psi(Q,e) - \psi(Q,e) = \varphi(e), \quad e \in \mathcal{B}. \tag{2}$$

При любых e и e' из $\mathcal{B}$ величина $\psi(e,e')$ интерпретируется здесь как планируемый объем перевозок с множества e на множество e'. Условие (2) при этом означает, что при реализации соответствующего плана в конечном счете используется только имеющаяся масса, а получаемое новое распределение массы на Q совпадает с требуемым. Таким образом, множество Ψ_φ, состоящее из функций ψ, удовлетворяющих условию (2), можно интерпретировать как совокупность допустимых планов перевозок.

Нетрудно видеть, что для любого $\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B})$ множество Ψ_φ не является пустым. Оно содержит, например, функцию

$$\psi(e,e') = \frac{\varphi^-(e) \cdot \varphi^+(e')}{\varphi^+(Q)} .$$

Для каждой функции $\psi \in \Psi_\varphi$ величина

$$\mu(\psi) = \int_Q \int_Q r(x,y)\, \psi(dx,dy) \tag{3}$$

характеризует затраты, связанные с реализацией плана ψ. Поэтому допустимый план перевозок $\psi_0 \in \Psi_\varphi$ естественно назвать оптимальным, если

$$\mu(\psi_0)=\min_{\psi\in\Psi_\varphi}\mu(\psi).$$

Для анализа поставленной экстремальной задачи нам прийдётся использовать понятие линейного пространства с несимметричной нормой, близкое к рассмотренному в [5, (см. с. 482].

Определенную на линейном пространстве E неотрицательную функцию $\|\cdot|$ (не равную тождественно нулю) мы навовем несимметричной нормой, если она удовлетворяет следующим условиям [ж)] :

1^0. $\|x|=\|-x|=0 \Longleftrightarrow x=\mathbb{0}$,

2^0. $\|\lambda x|=\lambda\|x|;\quad \lambda\geqslant 0,\ x\in E$,

3^0. $\|x+y|\leqslant\|x|+\|y|,\quad x,y\in E$.

Если же функция $\|\cdot|: E\longrightarrow R_+$ удовлетворяет только условиям 2^0 и 3^0, то она называется несимметричной преднормой. При этом очевидно, что элементы $x\in E$, для которых $\|x|=\|-x|=0$, образуют некоторое подпространство E_0, причем для любых $x\in E$ и $x_0\in E_0$ имеем: $\|x+x_0|=\|x|$. Поэтому каждая несимметричная преднорма в E порождает в фактор-пространстве E/E_0 несимметричную норму.

Заметим еще, что если в линейном пространстве E определена несимметричная норма $\|\cdot|$ (или преднорма $\|\cdot|$), то функция

$$|x|=\max\{\|x|,\|-x|\} \tag{4}$$

в рассматриваемом пространстве E является обычной нормой (или обычной преднормой). При этом в качестве топологии в пространстве $E_{\|\cdot|}$ нам будет удобно рассматривать топологию, порождаемую на E указанной нормой или преднормой (4). В этой топологии, естественно, каждое замкнутое множество M при $x_n\in M$ и $|x_n-x_0|\to 0$ содержит точку x_0, но при $x_n\in M$ и $\|x_n-x_0|\to 0$ точка x_0 может не принадлежать множеству M.

Далее, так как функция $\|\cdot|$ является непрерывной в указанной топологии, то при любом $t>0$ множество $\{x\in E:\|x|\leqslant t\}$ будет замкнутым, а множество $\{x\in E:\|x|<t\}$ – открытым.

ж) В [5] вместо 1^0 вводится более жесткое требование: $\|x|=0\Longleftrightarrow x=\mathbb{0}$.

Рассмотрим теперь в пространстве $E_{|\cdot|}$ (с несимметричной нормой или преднормой $|\cdot|$) линейный (аддитивный и однородный) функционал L . Этот функционал называется ограниченным, если найдется константа C такая, что

$$L(x) \leq C|x|, \quad x \in E. \tag{5}$$

Указанные константы, очевидно, неотрицательны, и среди них всегда имеется минимальная, которую мы будем обозначать через $|L|$. Если же линейный функционал L не является ограниченным, то будем считать, что для него $|L| = +\infty$. Далее ясно, что

$$|L| = 0 \Longleftrightarrow L(x) = 0, \quad x \in E_{|\cdot|}.$$

Множество ограниченных линейных функционалов в $E_{|\cdot|}$ мы будем обозначать через $E^*_{|\cdot|}$, а под $E^*_{\|\cdot\|}$ условимся понимать линейное нормированное пространство, сопряженное к пространству $E_{\|\cdot\|}$, в котором норма (или преднорма) определяется согласно (4). Нетрудно проверить, что $E^*_{|\cdot|}$ содержится в $E^*_{\|\cdot\|}$, причем для каждого $L \in E^*_{|\cdot|}$ справедливо неравенство

$$|L| = \sup_{|x| \neq 0} \frac{L(x)}{|x|} \geq \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{L(x)}{\|x\|} = \|L\|. \tag{6}$$

Однако $E^*_{|\cdot|}$, вообще говоря, не совпадает с $E^*_{\|\cdot\|}$, а является лишь некоторым выпуклым конусом в $E^*_{\|\cdot\|}$.

На введенные пространства легко переносятся многие результаты общей теории нормированных пространств. В частности, в этих пространствах справедлива следующая

ЛЕММА I (Хана). Пусть в линейном пространстве E определена некоторая несимметричная норма $|\cdot|$ (или несимметричная преднорма $|\cdot|$) и имеется некоторый элемент $x_0 \in E^*_{|\cdot|}$ с $|x_0| \neq 0$. Тогда найдется функционал такой, что

$$|L_0| = 1, \quad L_0(x_0) = |x_0|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что через точку x_0 можно провести гиперплоскость H , не имеющую общих точек с

открытым выпуклым множеством $S=\{x\in E: |x|<|x_0|\}$. А это означает, что найдется линейный (аддитивный и однородный) функционал L_0 такой, что

$$L_0(x_0)=|x_0|,\ L_0(x)<|x_0|,\ x\in S.$$

Этот функционал и может быть принят в качестве искомого.

Дальнейшее изучение нашей задачи связано с рассмотрением на $\Phi_0(B)$ следующей неотрицательной функции

$$|\varphi|=\inf_{\psi\in\Psi_\varphi}\mu(\psi)=\inf_{\psi\in\Psi_\varphi}\int_Q\int_Q r(x,y)\,\psi(dx,dy). \tag{7}$$

Так как при любых $\varphi_1,\ \varphi_2\in\Phi_0(B)$ и $\lambda>0$ справедливы очевидные соотношения:

$$\Psi_{\lambda\varphi_1}=\lambda\cdot\Psi_{\varphi_1},\quad \Psi_{\varphi_1}+\Psi_{\varphi_2}\subset\Psi_{\varphi_1+\varphi_2},$$

то введенная функция (7) удовлетворяет условиям 2^0 и 3^0, т.е. является несимметричной преднормой на $\Phi_0(B)$.

Мы уже отмечали, что в случае произвольной несимметричной преднормы $|\cdot|$ и порождаемой ею преднормы (4) множество $E^*_{|\cdot|}$ ограниченных линейных функционалов является некоторым выпуклым конусом в сопряженном пространстве $E^*_{\|\cdot\|}$. Следовательно, интересующее нас множество $(\Phi_0(B))^*_{|\cdot|}$ является выпуклым конусом в $(\Phi_0(B))^*_{\|\cdot\|}$, где преднорма $\|\cdot\|$ в $\Phi_0(B)$ определяется согласно (4).

В упоминавшейся работе [I] было изучено пространство $(\Phi_0(B))^*_{\|\cdot\|_1}$, где

$$\|\varphi\|_1=\inf_{\psi\in\Psi_\varphi}\int_Q\int_Q \rho(x,y)\,\psi(dx,dy),$$

а ρ – некоторая (симметричная) метрика компакта Q. Было показано, что пространство $(\Phi_0(B))^*_{\|\cdot\|_1}$ изоморфно пространству $Lip^1(Q,\rho)$, состоящему из функций $u: Q\longrightarrow R$, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_1=\sup_{x\neq y}\frac{u(y)-u(x)}{\rho(x,y)}<+\infty. \tag{8}$$

При этом каждый ограниченный линейный функционал в $(\Phi_0(B))_{\|\cdot\|_1}$ допускает следующее интегральное представление

$$L(\varphi)=\int_Q u(x)\,\varphi(dx), \tag{9}$$

где функция $u\in Lip^1(Q,\rho)$ по функционалу L определяется с точностью до постоянного слагаемого, а норма $\|L\|_1$ функционала L совпадает с величиной (8).

Заметим теперь, что если рассматриваемая метрика ρ связана с исходной несимметричной метрикой r соотношением (1), то при любом $\varphi\in\Phi_0(B)$ имеем:

$$|\varphi|\le\|\varphi\|=max\{|\varphi|,|-\varphi|\}\le\|\varphi\|_1 . \tag{10}$$

Следовательно, интересующее нас множество $(\Phi_0(B))^*_{|\cdot|}$ является выпуклым конусом не только в пространстве $(\Phi_0(B))^*_{\|\cdot\|}$, но и в пространстве $(\Phi_0(B))^*_{\|\cdot\|_1}=Lip^1(Q,\rho)$. При этом каждый ограниченный линейный функционал в $(\Phi_0(B))^*_{|\cdot|}$ также допускает интегральное представление (9), где функция $u\in Lip^1(Q,\rho)$ по функционалу L опять-таки определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Остается выяснить, каким образом для функционалов (9) могут быть вычислены величины $|L|$ и в каком случае эти величины являются конечными, т.е. $L\in(\Phi_0(B))^*_{|\cdot|}$. Для этого в пространстве $Lip^1(Q,\rho)$ выделим выпуклый конус $Lip^1(Q,r)$, состоящий из функций, для каждой из которых при некотором C справедливы неравенства

$$u(y)-u(x)\le C\,r(x,y),\quad x,y\in Q. \tag{11}$$

При этом минимальную из указанных констант C мы будем обозначать через $|u|$, а в случае $u\notin Lip^1(Q,r)$ считать, что $|u|=+\infty$.

ЛЕММА 2. Пусть на непустом подмножестве M множества Q с несимметричной метрикой r задана функция u, для которой при некотором C для всех x и y из M справедливы

неравенства (II). Тогда функцию u можно доопределить на $Q \setminus M$ таким образом, что неравенства (II) будут выполняться для всех x и y из Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \setminus M \neq \emptyset$ и z - некоторая фиксированная точка этого множества. Тогда при любых x_1 и x_2 из M на основании (II) и неравенства треугольника имеем:

$$u(x_2) - u(x_1) \leq C r(x_1, x_2) \leq C r(x_1, z) + C r(z, x_2),$$

т.е.

$$u(x_2) - C r(z, x_2) \leq u(x_1) + C r(x_1, z).$$

Следовательно, найдется $u_0 \in R$ такое, что

$$\sup_{x \in M} [u(x) - C r(z, x)] \leq u \leq \inf_{x \in M} [u(x) + C r(x, z)],$$

т.е. удовлетворяющее при всех $x \in M$ неравенствам

$$u_0 - u(x) \leq C r(x, z), \quad u(x) - u_0 \leq C r(z, x).$$

А это означает, что при $u(z) = u_0$ функция u, определенная уже на множестве $M' = M \cup \{z\}$, будет удовлетворять неравенствам (II) при всех x и y из M'.

Из установленного факта вытекает, что существующее в силу леммы Цорна максимальное множество $M^* \subset Q$, на которое может быть распространена исходная функция u с сохранением неравенств (II), должно совпадать со всем множеством Q. Это завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 3. При любой функции $u \in Lip^1(Q, \rho)$ для определяемого по формуле (9) функционала L имеет место равенство

$$\|L\| = \|u\|. \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любых $u \in Lip^1(Q, \rho)$, $\varphi \in \Phi_0(B)$ и $\psi \in \Psi_\varphi$ на основании (2) имеем:

$$L(\varphi) = \int_Q u(x) \varphi(dx) = \int_Q u(x) [\psi(Q, dx) - \psi(dx, Q)] =$$

$$= \int_Q u(y)\psi(Q, dy) - \int_Q u(x)\psi(dx, Q) =$$

$$= \iint_{QQ} [u(y) - u(x)]\psi(dx, dy) \leq \|u\| \cdot \iint_{QQ} r(x,y)\psi(dx, dy). \qquad (13)$$

Отсюда, ввиду произвольности функции $\psi \in \Psi_\varphi$, получаем:

$$L(\varphi) \leq \|u\| \cdot \inf_{\psi \in \Psi_\varphi} \iint_{QQ} r(x,y)\psi(dx, dy) = \|u\| \cdot \|\varphi\|,$$

т.е.

$$\|L\| \leq \|u\|. \qquad (14)$$

Для получения противоположного неравенства достаточно рассмотреть функции $\varphi_{x_0 y_0} \in \Phi_0(B)$, представимые в виде:

$$\varphi_{x_0 y_0} = \varphi_{y_0} - \varphi_{x_0}, \quad x_0 \in Q, \quad y_0 \in Q, \qquad (15)$$

где

$$\varphi_x(e) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in e, \\ 0 \text{ при } x \overline{\in} e. \end{cases}$$

При этом функция

$$\psi_{x_0 y_0}(e, e') = \begin{cases} 1 \text{ при } x_0 \in e,\ y_0 \in e', \\ 0 \text{ -- в остальных случаях,} \end{cases}$$

как легко видеть, содержится в множестве $\Psi_{\varphi_{x_0 y_0}}$. Поэтому

$$\|\varphi_{x_0 y_0}\| = \inf_{\psi \in \Psi_{\varphi_{x_0 y_0}}} \iint_{QQ} r(x,y)\psi(dx, dy) \leq$$

$$\leq \iint_{QQ} r(x,y)\psi_{x_0 y_0}(dx, dy) = r(x_0, y_0).$$

Но тогда для любого функционала (9), определяемого функцией $u \in Lip^1(Q, \rho)$, имеем:

$$u(y_0) - u(x_0) = \int_Q u(x)\psi_{x_0 y_0}(dx) =$$

$$= L(\varphi_{x_0 y_0}) \leq \|L\| \cdot \|\varphi_{x_0 y_0}\| \leq \|L\| \cdot r(x_0, y_0),$$

и, следовательно,

$$\|u\| \leq \|L\|. \tag{16}$$

Из (I4) и (I6) получаем требуемое равенство (I2).

Следующая теорема характеризует те функции $\psi \in \Psi_\varphi$, для которых достигается равенство

$$\iint_{Q\,Q} r(x,y)\,\psi(dx,dy) = \|\varphi\|. \tag{17}$$

ТЕОРЕМА I. Определяемый функцией $\psi \in \Psi_\varphi$ допустимый план перевозок в том и только том случае является оптимальным, если найдется функция $u: Q \longrightarrow R$ такая, что

$$u(y) - u(x) \leq r(x,y), \quad x \in Q, \ y \in Q, \tag{18}$$

причем в этих неравенствах достигаются равенства, если $\psi(e,e') > 0$ для любых окрестностей e_x и e_y соответствующих точек x и y.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $\psi \in \Psi_\varphi$ и $u \in Lip^1(Q,r)$ с $\|u\| = 1$ на основании леммы 3 и соотношений (I3) и (7) получаем:

$$\|\varphi\| \geq \int_Q u(x)\varphi(dx) = \iint_{Q\,Q} [u(y) - u(x)]\,\psi(dx,dy) \leq$$

$$\leq \iint_{Q\,Q} r(x,y)\,\psi(dx,dy) \geq \|\varphi\|. \tag{19}$$

Допустим теперь, что функция $\psi \in \Psi_\varphi$ определяет оптимальный план перевозок, т.е. удовлетворяет условию (I7), причем $\|\varphi\| \neq 0$. Тогда на основании леммы I и леммы 3 найдется функция $u \in Lip^1(Q,r)$ с $\|u\| = 1$, для которой в первом неравенстве из (I9) достигается равенство. Так как, кроме того, по предположению равенство достигается также в последнем неравенстве из (I9) и крайние члены в этом соотношении совпадают, то для указанной функции u, удовлетворяющей неравенствам (I8), имеем:

$$\iint_{Q\,Q} [u(y) - u(x)]\,\psi(dx,dy) = \iint_{Q\,Q} r(x,y)\,\psi(dx,dy).$$

Но тогда рассматриваемая функция u удовлетворяет требуемому

условию. А именно, если $\psi(e_x, e_y) > 0$ для любых окрестностей точек x и y, то в (I8) достигается равенство.

Для завершения доказательства в сторону необходимости остается рассмотреть случай, когда в соотношении (I7) $\|\varphi\| = 0$. Нетрудно проверить, что в этом случае в качестве интересующей нас функции может быть принята произвольная константная функция, т.е. функция $u(x) = const$, $x \in Q$.

Для доказательства теоремы в сторону достаточности предположим, что для функции $\psi \in \Psi_\varphi$ имеется функция $u: Q \to R$, удовлетворяющая условию (I8) и притом такая, что в неравенствах (I8) достигаются равенства, если $\psi(e_x, e_y) > 0$ для любых окрестностей e_x и e_y соответствующих точек x и y. Нетрудно проверить, что при выполнении указанного условия в среднем неравенстве из (I9) достигается равенство. Но тогда равенство достигается также в последнем неравенстве из (I9), т.е. справедливо соотношение (I7) и теорема полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть замкнутое множество $M \subset Q$ содержит носитель функции $\varphi \in \Phi_0(B)$, т. е. $\varphi(e) = \varphi(e \cap M)$, $e \in B$. Тогда для решения исходной задачи достаточно решить аналогичную задачу для сужения φ_M функции φ на множество

$$B_M = \{e \in B : e \subset M\}. \tag{20}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аналогии с предыдущим через Ψ_{φ_M} обозначим множество σ-аддитивных по каждому аргументу функций $\psi_M : B_M \times B_M \to R_+$, удовлетворяющих условию

$$\psi_M(M, e) - \psi_M(e, M) = \varphi_M(e), \quad e \in B_M.$$

Предположим теперь, что функция $\psi_M \in \Psi_{\varphi_M}$ отвечает оптимальному плану перевозок на M, т.е. на этой функции достигают минимума затраты

$$\mu_M(\psi_M) = \iint_{MM} r(x,y)\, \psi_M(dx, dy). \tag{2I}$$

Покажем, что в этом случае определенная на $B \times B$ функция

$$\psi(e,e')=\psi_M(e\cap M,\ e'\cap M) \tag{22}$$

из Ψ_φ отвечает оптимальному плану перевозок на Q, т.е. на этой функции достигают минимума затраты (3), которые, очевидно, совпадают с затратами (2I).

Действительно, в силу доказанной теоремы I в рассматриваемом случае найдется такая функция $u_M: M\to R$, что

$$u_M(y)-u_M(x)\le r(x,y),\quad x\in M,\ y\in M,$$

причем в этих неравенствах достигаются равенства, если $\psi_M(e_x\cap M, e_y\cap M)>0$ для любых окрестностей e_x и x_y. Далее, на основании леммы 2 функция $u_M: M\to R$ может быть распространена до функции $u: Q\to R$ с сохранением неравенств (I8). Но тогда построенная функция (22) опять-таки в силу теоремы I определяет оптимальный план перевозок на Q, что и требовалось показать.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для функции* $\varphi\in\Phi_0(B)$, *имеющей конечный носитель* $M\subset Q$, *всегда существует функция* $\psi\in\Psi_\varphi$, *удовлетворяющая условию* (I7) *и притом такая, что*

$$\psi(Q,Q)=\varphi^+(Q)=\varphi^-(Q). \tag{23}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании предыдущего следствия можно утверждать, что если φ_M - сужение исходной функции φ на множество (20) и при этом на $\psi_M\in\Psi_{\varphi_M}$ достигают минимума затраты (2I), то функция (22) из Ψ_φ удовлетворяет условию (I7) и для нее имеет место очевидное равенство

$$\psi(Q,Q)=\psi_M(M,M).$$

С другой стороны, так как множество M в рассматриваемом случае является конечным, то определение оптимальной перевозки на этом множестве сводится к решению классической конечномерной транспортной задачи линейного программирования. Поэтому с помощью хорошо известных численных методов может быть найдена функция $\psi_M\in\Psi_{\varphi_M}$, минимизирующая затраты (2I) и притом такая, что

$$\psi_M(M,M)=\varphi_M^+(M)=\varphi_M^-(M)=\varphi^+(Q)=\varphi^-(Q).$$

Но тогда в качестве искомой может быть принята функция (22).

ТЕОРЕМА 2. Для любой функции $\varphi \in \Phi_0(B)$ существует оптимальный план перевозок, т.е. такая функция $\psi \in \Psi_\varphi$, для которой достигается равенство (I7). Более того, указанная функция всегда может быть найдена среди функций $\psi \in \Psi_\varphi$, удовлетворяющих дополнительному условию (23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [I] было показано, что для любой функции $\varphi \in \Phi_0(B)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая линейная комбинация $\bar{\varphi}$ функций вида (I5), что

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_1 < \varepsilon, \quad \bar{\varphi}^+(Q) = \bar{\varphi}^-(Q) \leq \varphi^+(Q) = \varphi^-(Q).$$

А это означает, что для рассматриваемой функции $\varphi \in \Phi_0(B)$ может быть построена последовательность функций $\varphi_n \in \Phi_0(B)$, каждая из которых имеет конечный носитель и удовлетворяет соотношениям:

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leq \|\varphi - \varphi_n\|_1 < \frac{1}{n}, \quad \varphi_n^+(Q) = \varphi_n^-(Q) \leq \varphi^+(Q) = \varphi^-(Q).$$

Из этих соотношений, как было показано в той же работе [I] (см. теорему 2), вытекает, что функции φ_n, если их рассматривать как функционалы в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q с метрикой (I), будут слабо сходиться к функции φ. Из этих же соотношений с учетом (I0) следует, что

$$-\frac{1}{n} < -\|\varphi_n - \varphi\| \leq \|\varphi\| - \|\varphi_n\| \leq \|\varphi - \varphi_n\| < \frac{1}{n},$$

т.е.

$$\lim_{n \to +\infty} \|\varphi_n\| = \|\varphi\|.$$

Далее, для указанных функций $\varphi_n \in \Phi_0(B)$ на основании следствия 2 из теоремы I найдутся функции $\psi_n \in \Psi_{\varphi_n}$, удовлетворяющие условиям:

$$\iint_{Q\,Q} r(x,y)\psi_n(dx,dy) = \|\varphi_n\|, \quad \psi_n(Q,Q) = \varphi_n^+(Q) \leq \varphi^+(Q), \quad n = 1,2,\ldots$$

Функции $\psi_n \in \Psi_{\varphi_n}$ можно рассматривать как функционалы в пространстве $C(Q \times Q)$ непрерывных функций на компакте $Q \times Q$. При этом так как вариации всех этих функций ограничены одной и той же величиной $\varphi^+(Q)$, то найдется подпоследовательность ψ_{n_k}, слабо сходящаяся к некоторой неотрицательной σ—аддитивной по каждому аргументу функции $\psi: B\times B \to R_+$.

Остается проверить, что указанная предельная функция ψ удовлетворяет условиям (2) и (17).

Для доказательства равенство (17) достаточно заметить, что несимметричная метрика r является непрерывной относительно симметричной метрики (1), и, следовательно, на основании определения слабого предела имеем:

$$\iint\limits_{QQ} r(x,y)\psi(dx,dy) = \lim_{k\to+\infty} \iint\limits_{QQ} r(x,y)\psi_{n_k}(dx,dy) = \lim_{k\to+\infty} \|\varphi_{n_k}\| = \|\varphi\|.$$

Для доказательства справедливости соотношений (2) заметим, что из слабой сходимости функций $\psi_{n_k}(\cdot,\cdot)$ к функции $\psi(\cdot,\cdot)$, следует также слабая сходимость функций $\psi_{n_k}(Q,\cdot)$ и $\psi_{n_k}(\cdot,Q)$ к функциям $\psi(Q,\cdot)$ и $\psi(\cdot,Q)$. Действительно, для любой функции $f\in C(Q)$ имеем:

$$\int\limits_Q f(y)\psi_{n_k}(Q,dy) = \iint\limits_{QQ} f(y)\psi_{n_k}(dx,dy) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \iint\limits_{QQ} f(y)\psi(dx,dy) = \int\limits_Q f(y)\psi(Q,dy),$$

$$\int\limits_Q f(x)\psi_{n_k}(dx,Q) = \iint\limits_{QQ} f(x)\psi_{n_k}(dx,dy) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \iint\limits_{QQ} f(x)\psi(dx,dy) = \int\limits_Q f(x)\psi(dx,Q).$$

Переходя к слабому пределу в соотношениях

$$\psi_{n_k}(Q,\cdot) - \psi_{n_k}(\cdot,Q) = \varphi_{n_k}(\cdot),$$

вытекающих из определения множеств $\Psi_{\varphi_{n_k}}$, получаем:

$$\psi(Q,\cdot) - \psi(\cdot,Q) = \varphi(\cdot).$$

Следовательно, функция ψ удовлетворяет соотношениям (2), которые оставалось проверить. Отметим, что рассмотрение последо-

вательностей функций, а не их значений, существенно, так как для множеств $e \in B$ соответствующие величины $\psi_{n_k}(Q,e)$, $\psi_{n_k}(e,Q)$ и $\varphi_{n_k}(e)$ не обязательно сходятся к значениям предельных функций $\psi(Q,e)$, $\psi(e,Q)$ и $\varphi(e)$.

В заключение заметим, что определённая на $\Phi_0(\dot{B})$ несимметричная преднорма (7), по-видимому, является несимметричной нормой, т.е.

$$\|\varphi\| = \|-\varphi\| = 0 \iff \varphi = 0.$$

Однако для доказательства этого факта необходимо получить некоторый аналог известной теоремы Пуанкаре о возвращении полутраекторий, определяемых сохраняющими меру точечными отображениями, для более общих отображений, задаваемых с помощью σ-аддитивных по каждому аргументу функций $\psi : B \times B \longrightarrow R_+$, удовлетворяющих условию:

$$\psi(Q,e) = \psi(e,Q), \quad e \in B.$$

Литература

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - "Вестник Ленинградского университета", 1958, № 2. Математика, механика, астрономия, выпуск 7, с. 52-59.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В. О перемещении масс. - "Докл. АН СССР", 1942, т. 37, № 7-8, с. 227-229.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В. Об одной проблеме Монжа. -"Успехи мат. наук", 1948, т. 3, № 2, с. 225-226.
4. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах.-"Докл. АН СССР", 1957, т. 115, № 6, с. 1058-1061.
5. КРЕЙН М.Г., НУДЕЛЬМАН А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., "Наука", 1973, 551 с.

Поступила в ред.-изд. отд.
12. XII. 1974 г.