1975 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 17(34)

Смежные математические вопросы

УДК 513.88

О КООРДИНАТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МАРЦИНКЕВИЧА

Г.Я.Лозановский

В работе [1] в числе прочего был получен ряд результатов о строении и свойствах пространства $M(\psi)^*$, сопряженного к пространству Марцинкевича $M(\psi)$ на отрезке. В настоящей заметке с аналогичной точки зрения изучается пространство $M(c)^*$, где $M(c)$ есть координатное пространство Марцинкевича. Пусть $c=\{c_i\}$, $S_n=\sum_{i=1}^{n} c_i$ $(n\in N)$. Показано, что строение пространства $M(c)^*$ во многом зависит от величины $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_n}$. Именно, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_n}>1$, то пространство $M(c)^*$ слабо секвенциально полно. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_n}=1$, то $M(c)^*$ не только не является слабо секвенциально полным, но содержит замкнутую линейную подрешетку, изоморфную и изометрическую пространству $l^\infty_{[0,1]}$. Более того, в этом случае (в предположении справедливости континуум-гипотезы) $M(c)^*$ обладает одним свойством, которое несколько неожиданно с точки зрения теории векторных решеток. В конце заметки получено также усиление одного результата Джонсона о пространстве $(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus l^1_n)^*_{l^\infty}$.

I. Терминология и обозначения

Через $\mathbb{N}$ обозначается множество всех натуральных чисел. $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_\infty$, $\mathcal{P}_0$ означают соответственно совокупность всех, всех бесконечных, всех конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$. Сопряжённое к нормированному пространству X обозначается через X^*. В терминологии и обозначениях из теории векторных решеток мы в основном следуем [2]. Элементы x, y K-линеала X называются дизъюнктными (обозначение: $x d y$), если $|x| \wedge |y| = 0$. Дизъюнктным дополнением множества $H \subset X$ называется множество $H^d = \{x \in X : x d y$ для $\forall y \in H\}$. Множество $H \subset X$ называется компонентой, если $H = H^{dd}$. Через $E(X)$ обозначаем булеву алгебру всех компонент K-линеала X. Через $E_\infty(X)$ (соответственно $E_0(X)$) обозначаем множество всех бесконечномерных (соответственно конечномерных) компонент в X. Идеал Y в K-линеале X называется фундаментом, если $Y^d = \{0\}$. Элемент $x \in X$ будем называть элементом счётного типа, если любое множество ненулевых, попарно дизъюнктных, положительных и не превосходящих $|x|$ элементов из X не более чем счётно. K-линеалом счетного типа называется K-линеал, все элементы которого счетного типа (см. также [2, стр. 173]). Через $\tilde{X}$, $\bar{X}$, $\tilde{X}_{an}$ обозначаются пространства всех соответственно регулярных, вполне линейных, анормальных функционалов на K-линеале X. Напомним, что если $\bar{X}$ тотально на X, то $\tilde{X} = \bar{X} \oplus \tilde{X}_{an}$, то есть $\bar{X}$ и $\tilde{X}_{an}$ суть дополнительные друг к другу компоненты в $\tilde{X}$. Функционал $f \in \bar{X}$ будем называть функционалом счётного типа, если f счётного типа как элемент K-пространства $\bar{X}$. Напомним, что если X - KB-линеал, то $X^* = \tilde{X}$; в этом случае вместо $\tilde{X}_{an}$ будем писать также X^*_{an}.

KB-линеал X называется квазиравномерно выпуклым, если существует константа $\tau < 2$ такая, что $(x, y \in X_+,\ x d y,\ \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1) \Longrightarrow (\|x + y\| \leqslant \tau)$. KB-пространством называется KB-линеал X, являющийся K-пространством, в котором выполнены следующие два условия [2, стр. 207]:

(A) если $x_n \downarrow 0\ (n \in \mathbb{N})$, то $\|x_n\| \longrightarrow 0$;

(B) если $0 \leqslant x_n \uparrow\ (n \in \mathbb{N})$ и $\sup \|x_n\| < \infty$, то существует $\sup x_n \in X$.

Напомним, что KB-линеал является KB-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон как банахово пространство (теорема Огасавара).

Через c_0, l^{∞} обозначаются обычные пространства вещественных числовых последовательностей; $l^{\infty}_{[0,1]}$ есть пространство всех ограниченных вещественных функций на [0,I] с равномерной нормой.

2. Некоторые свойства функционалов в пространствах последовательностей

Всюду в этом пункте:

W – пространство всех последовательностей вещественных чисел;

$\{e_n\}$ – стандартный базис в W;

X – произвольный фундамент в W.

Пространство $X' = \{y = \{y_n\} \in W : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| < \infty$ для $\forall x = \{x_n\} \in X\}$ называется дуальным к X пространствам. Напомним, что $f \in \tilde{X}$ вполне линеен тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x \in X,$$

с $y \in X'$.

Напомним также, что $f \in \tilde{X}$ анормален тогда и только тогда, когда $f(e_n) = 0$ для $\forall n \in N$. Каждый $f \in \tilde{X}$ однозначно представим в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in \overline{X}$, $f_2 \in \tilde{X}_{an}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функционал $f \in \tilde{X}$ будем называть строго анормальным, если он анормален и для $\forall K \in E_{\infty}(X)$ $\exists K_1 \in E_{\infty}(X)$ такая, что $K_1 \subset K$ и $f(K_1) = \{0\}$. Совокупность всех строго анормальных функционалов на X обозначаем $\tilde{X}_{san}$ (или X^{*}_{san}, если X – банахово KN-пространство).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.

а) $\tilde{X}_{san}$ есть σ-замкнутый фундамент в $\tilde{X}_{an}$ (σ-замкнутость означает, что если $f_n \in \tilde{X}_{san}$ $(n \in N)$ и существует $\sup f_n \in \tilde{X}$, то

$\sup f_n \in \tilde{X}_{san}$);

б) если $f \in \tilde{X}_{an}$ счётного типа, то $f \in \tilde{X}_{san}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\tilde{X}_{san}$ есть идеал в $\tilde{X}_{an}$. Пусть $0 \leq f_n \in \tilde{X}_{san}$ $(n \in N)$, $f_n \uparrow f \in \tilde{X}$. Покажем, что $f \in \tilde{X}_{san}$. Так как $\tilde{X}_{an}$ есть компонента в $\tilde{X}$, то $f \in \tilde{X}_{an}$. Пусть $K \in E_\infty(X)$. Построим $K_n \in E_\infty(X)$ $(n \in N)$ так, что $K \supset K_n \supset K_{n+1}$ и $f_n(K_n) = \{0\}$ для $\forall n \in N$. Ясно, что найдётся $K' \in E_\infty(X)$ такая, что $K' \cap K_n^d \in E_0(X)$ для $\forall n \in N$. Так как $f_n \in \tilde{X}_{an}$, то $f_n(K' \cap K_n^d) = \{0\}$, а значит, $f_n(K') = \{0\}$ для $\forall n \in N$. Следовательно, $f(K') = \{0\}$. Тем самым $f \in \tilde{X}_{san}$. Итак, доказано, что $\tilde{X}_{san}$ есть σ-замкнутый идеал в $\tilde{X}_{an}$. Осталось доказать лишь утверждение б) ибо функционалы счетного типа образуют фундамент в $\tilde{X}$. Пусть $f \in \tilde{X}_{an}$ – счетного типа. Можно считать, что $f \geqslant 0$. Пусть $K \in E_\infty(X)$. По известной теореме Серпинского о почти дизъюнктном разбиении натурального ряда [3, стр. 81] существует семейство $K_\tau \in E_\infty(X)$, $\tau \in [0,1]$, такое, что $K_\tau \subset K$ и $K_{\tau_1} \cap K_{\tau_2} \in E_0(X)$ при $\tau_1 \neq \tau_2$. Для $\tau \in [0,1]$ положим

$$f_\tau(x) = f(P_{\tau K_\tau} x), \quad x \in X.$$

Ясно, что $0 \leq f_\tau \leq f$ и $f_{\tau_1} \, d \, f_{\tau_2}$ при $\tau_1 \neq \tau_2$. Так как f – счетного типа, то множество $\{\tau \in [0,1] : f_\tau \neq 0\}$ не более чем счетно. Поэтому $\exists \tau \in [0,1]$ такое, что $f_\tau = 0$, то есть $f(K_\tau) = \{0\}$. Тем самым $f \in \tilde{X}_{san}$. Предложение доказано.

Заметим, что из предложения 1 следует, например, что $(l^\infty)^*_{an} = (l^\infty)^*_{san}$, ибо $(l^\infty)^*$ есть KB-пространство, а значит, пространство счётного типа.

3. Основные результаты

Пусть, далее, $c = \{c_i\}$ – последовательность вещественных чисел

такая, что $c_i > 0$, $c_i \downarrow 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty$. Полагаем $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i$ $(n \in N)$. Через $M(c)$ обозначаем пространство Марцинкевича, состоящее из всех сходящихся к нулю последовательностей $x = \{x_i\}$ таких, что

$$\|x\|_{M(c)} = \sup_{n \in N} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^*}{s_n} < \infty,$$

где $x^* = \{x_i^*\}$ состоит из модулей членов последовательности $x = \{x_i\}$, расположенных в невозрастающем порядке.

Для $f \in M(c)^*$, $K \in E(M(c))$ полагаем

$$f^K(x) = f(P_{\tau_K} x), \quad x \in M(c).$$

Следующие две теоремы суть основные результаты работы.

ТЕОРЕМА I. Пусть

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{s_{2n}}{s_n} > 1. \tag{I}$$

Тогда пространство $M(c)$ квазиравномерно выпукло, $M(c)^*$ есть КВ-пространство и $M(c)^*_{an} = M(c)^*_{san}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{s_{2n}}{s_n} = 1. \tag{2}$$

Тогда $M(c)^*$ не является пространством счетного типа; более того, в этом случае $M(c)^*$ содержит замкнутую линейную подрешетку, изоморфную и изометричную пространству $l^{\infty}_{[0,1]}$. Кроме того, в предположении справедливости континуум - гипотезы, существует $f \in M(c)^*_{an}$ такой, что

$$\|f^K\|_{M(c)^*} = 1 \quad \forall K \in E_{\infty}(M(c)). \tag{3}$$

Тем самым в предположении

справедливости континуум-гипотезы в этом случае $M(c)^*_{an} \neq M(c)^*_{san}$.

Для доказательства этих теорем нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА 1. Если выполнено (1), то $\exists r<2$ такое, что

$$\frac{S_{n_1}+S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \leq r \quad \text{для } \forall n_1, n_2 \in N. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $a=\inf\left\{\frac{S_{2n}}{S_n} : n\in N\right\}$. Так как $S_{2n} > S_n$ для $\forall n$ и выполнено (1), то $a>1$. Заметим, что

$$\frac{S_{n_1}+S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} < 2 \quad \text{для } \forall n_1, n_2 \in N, \tag{5}$$

ибо $S_{n_1} < S_{n_1+n_2}$, $S_{n_2} < S_{n_1+n_2}$. Далее,

$$\frac{S_{n_1}+S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \leq \frac{2}{a}, \quad \text{если } n_1+n_2 \text{ четное.} \tag{6}$$

Действительно, в этом случае

$$\frac{S_{n_1}+S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \leq \frac{2S_{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}}{S_{n_1+n_2}} = \frac{2}{\frac{S_{n_1+n_2}}{\left[S_{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}\right]}} \leq \frac{2}{a}$$

Допустим, что требуемого r не существует. Тогда найдутся последовательности $n_1^{(K)}, n_2^{(K)} \in N$ $(K\in N)$ такие, что

$$\frac{S_{n_1^{(K)}}+S_{n_2^{(K)}}}{S_{n_1^{(K)}+n_2^{(K)}}} \xrightarrow[K\to\infty]{} 2. \tag{7}$$

Из (5) следует, что $n_1^{(K)}+n_2^{(K)} \xrightarrow[K\to\infty]{} \infty$. Можно считать, что $n_2^{(K)} \xrightarrow[K\to\infty]{} \infty$. Ясно, что замена $n_2^{(K)}$ на $n_2^{(K)}+1$ не нарушит справедливости (7), поэтому можно считать, что $n_1^{(K)}+n_2^{(K)}$ есть чётное число для $\forall K\in N$. Но тогда (7) противоречит (6). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если выполнено (2), то существует строго возрастающая

последовательность $m_k \in N$ $(k \in N)$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_{km_k}}{S_{m_k}} = 1. \qquad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\forall k \geqslant 3$ имеем

$$\frac{S_{kn}}{S_n} = \frac{S_n + (S_{2n} - S_n) + (S_{3n} - S_{2n}) + \dots + (S_{kn} - S_{(k-1)n})}{S_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{S_n + (k-1)(S_{2n} - S_n)}{S_n} = \frac{(k-1)\,S_{2n}}{S_n} + 2 - k,$$

откуда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_{kn}}{S_n} \leqslant k - 1 + 2 - k = 1 .$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{kn}}{S_n} = 1 \qquad \forall k \in N .$$

Отсюда, очевидно, немедленно вытекает требуемое. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Пусть x, $y \in M(c)_+$, $x \, d \, y$, $\|x\| = \|y\| = 1$. Пусть ξ, η – непустые, непересекающиеся, конечные подмножества в N, состоящие из n_1 и n_2 элементов соответственно. Используя лемму I, находим

$$\frac{\sum_{i\in\xi} x_i + \sum_{i\in\eta} y_i}{S_{n_1+n_2}} = \frac{S_{n_1}}{S_{n_1+n_2}} \cdot \frac{\sum_{i\in\xi} x_i}{S_{n_1}} + \frac{S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \cdot \frac{\sum_{i\in\eta} y_i}{S_{n_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{S_{n_1}}{S_{n_1+n_2}} \cdot 1 + \frac{S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \cdot 1 = \frac{S_{n_1} + S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \leqslant \tau .$$

Тем самым $\|x + y\| \leqslant \tau$. Итак, $M(c)$ квазиравномерно выпукло. В силу теоремы 3 из [4] заключаем, что $M(c)^*$ есть KB-пространство. Из предложения I теперь следует, что $M(c)^*_{an} = M(c)^*_{san}$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Фиксируем последовательность $\{m_k\}$ из леммы 2. Фиксируем также какой-нибудь $F \in (l^\infty)^*_+$ такой, что $\|F\|_{(l^\infty)^*} = 1$, $F(c_0) = \{0\}$.

Пусть $\xi \in \mathcal{P}$. Через ξ_1 обозначаем наименьший элемент в ξ, ξ_2 – наименьший элемент в $\xi \setminus \{\xi_1\}$, ..., ξ_{k+1} – наименьший элемент в $\xi \setminus \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$.

Пусть $\xi, \eta \in \mathcal{P}_\infty$, $n \in N$. Через $a(\xi, \eta; n)$ будем обозначать число элементов множества $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \cap \eta$. Будем писать $\xi \gg \eta$, если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_{a(\xi,\eta;n)}}{S_n} = 0, \tag{9}$$

причем полагаем $S_0 = 0$.

ЛЕММА 3.

а) Пусть $\xi, \eta \in \mathcal{P}_\infty$. Тогда существует $\zeta \in \mathcal{P}_\infty$ такое, что $\zeta \subset \eta$ и $\xi \gg \zeta$.

б) Пусть $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{P}_\infty$. Если $\xi \gg \eta$, $\zeta \setminus \eta \in \mathcal{P}_0$, то $\xi \gg \zeta$.

в) Пусть $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{P}_\infty$, $\xi \gg \eta$, $\xi \gg \zeta$. Тогда $\xi \gg \eta \cup \zeta$.

г) Пусть $\xi, \xi^n \in \mathcal{P}_\infty$ $(n \in N)$. Тогда существует $\eta \in \mathcal{P}_\infty$ такое, что $\eta \subset \xi$ и $\xi^n \gg \eta$ для $\forall n \in N$.

Действительно, справедливость а) и б) прямо следует из того, что $C_n \to 0$, $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Доказываем в). Так как, очевидно $a(\xi, \eta \cup \zeta; n) \leq a(\xi, \eta; n) + a(\xi, \zeta; n)$, то $S_{a(\xi,\eta\cup\zeta;n)} \leq S_{a(\xi,\eta;n)} + S_{a(\xi,\zeta;n)}$, отсюда вытекает требуемое. Доказываем г). В силу а) найдется $\eta^1 \in \mathcal{P}_\infty$ такое, что $\eta^1 \subset \xi$ и $\xi^1 \gg \eta^1$; найдется $\eta^2 \in \mathcal{P}_\infty$ такое, что $\eta^2 \subset \eta^1$ и $\xi^2 \gg \eta^2, \ldots,$ найдется $\eta^{n+1} \in \mathcal{P}_\infty$ такое, что $\eta^{n+1} \subset \eta^n$ и $\xi^{n+1} \gg \eta^{n+1}$. Возьмем теперь произвольные $k_n \in \eta^n$ $(n \in N)$ так, что $k_n < k_{n+1}$ для $\forall n \in N$. Ясно, что множество $\eta = \{k_n : n \in N\}$ требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть ω_1 – первый несчетный ординал и пусть задано семейство $\{\xi^\alpha \in \mathcal{P}_\infty : \alpha < \omega_1\}$. Тогда существует семейство $\{\eta^\alpha \in \mathcal{P}_\infty : \alpha < \omega_1\}$,

удовлетворяющее условиям:

$$\eta^{\alpha} \subset \xi^{\alpha} \text{ при всех } \alpha < \omega_1, \tag{10}$$

$$\eta^{\alpha} \geqslant \eta^{\beta} \text{ при всех } \alpha < \beta < \omega_1. \tag{11}$$

Несложное доказательство леммы 4 опускаем; требуемое семейство легко строится методом трансфинитной индукции с помощью леммы 3, г) .

Введем следующие обозначения. Пусть $x \in M(c)$, $\xi \in \mathcal{P}_{\infty}$, $k \in N$. Положим $\mathcal{D}(x,\xi,k) = \frac{1}{S_{m_k}} \cdot \sum_{i=1}^{m_k} x_{\xi_i}$.

Заметим, что

$$|\mathcal{D}(x,\xi,k)| \leqslant \|x\|. \tag{12}$$

Для $\xi \in \mathcal{P}_{\infty}$ через F^{ξ} обозначаем функционал на $M(c)$, действующий по формуле

$$F^{\xi}(x) = F(\{\mathcal{D}(x,\xi,k)\}_{k \in N}), \qquad x \in M(c).$$

Ясно, что

$$0 < F^{\xi} \in M(c)^*_{an}, \quad \|F^{\xi}\|_{M(c)^*} = 1. \tag{13}$$

ЛЕММА 5.

а) Пусть $\xi, \eta \in \mathcal{P}_{\infty}$, $\xi \cap \eta = \emptyset$. Тогда $F^{\xi} d F^{\eta}$.

б) Пусть $\xi^1, \dots, \xi^n \in \mathcal{P}_{\infty}$ — любой конечный набор попарно непересекающихся множеств. Тогда

$$\|\sum_{\beta=1}^{n} F^{\xi^{\beta}}\| \leqslant 1. \tag{14}$$

в) Пусть $\xi, \eta \in \mathcal{P}_{\infty}$, $\xi \geqslant \eta$. Тогда $F^{\xi} = F^{\xi \setminus \eta}$ и $F^{\xi} d F^{\eta}$.

г) Пусть $\xi^1, \dots, \xi^n \in \mathcal{P}_{\infty}$, причем $\xi^i \geqslant \xi^j$ при $i < j$.

Тогда справедливо (14).

Доказываем лемму 5. Утверждение а) очевидно. Докажем б) . Пусть $x = \{x_k\} \in M(c)_+$, $\|x\| \leqslant 1$. Для $\forall k \in N$, $k > n$, имеем

$$\sigma_\kappa \overset{def}{=} \sum_{\beta=1}^{n} \mathcal{D}(x,\xi^\beta,\kappa) \leqslant \frac{1}{S_{m_\kappa}} \cdot \sum_{i=1}^{nm_\kappa} x_i^* = \frac{S_{nm_\kappa}}{S_{m_\kappa}} \cdot \frac{1}{S_{nm_\kappa}} \cdot \sum_{i=1}^{nm_\kappa} x_i^* \leqslant$$

$$\leqslant \frac{S_{nm_\kappa}}{S_{m_\kappa}} \cdot \|x\| \leqslant \frac{S_{\kappa m_\kappa}}{S_{m_\kappa}} .$$

Отсюда

$$\sum_{\beta=1}^{n} F^{\xi^\beta}(x) \leqslant \overline{\lim_{\kappa\to\infty}}\, \sigma_\kappa \leqslant \lim_{\kappa\to\infty} \frac{S_{\kappa m_\kappa}}{S_{m_\kappa}} = 1.$$

Докажем в) . Для $x = \{x_\kappa\} \in M(c)_+$ имеем

$$\sum_{i=1}^{m_\kappa} x_{\xi_i} = \sum_{i=1}^{m_\kappa - a(\xi,\eta;m_\kappa)} x_{(\xi\setminus\eta)_i} + G(\kappa), \tag{I5}$$

где $G(\kappa)$ состоит из $a(\xi,\eta;m_\kappa)$ слагаемых, в силу чего

$$|G(\kappa)| \leqslant \sum_{i=1}^{a(\xi,\eta;m_\kappa)} x_i^* \leqslant \|x\| \cdot S_{a(\xi,\eta;m_\kappa)} . \tag{I6}$$

Аналогично

$$\sum_{i=1}^{m_\kappa} x_{(\xi\setminus\eta)_i} = \sum_{i=1}^{m_\kappa - a(\xi,\eta;m_\kappa)} x_{(\xi\setminus\eta)_i} + H(\kappa), \tag{I7}$$

где

$$|H(\kappa)| \leqslant \sum_{i=1}^{a(\xi,\eta;m_\kappa)} x_i^* \leqslant \|x\| \cdot S_{a(\xi,\eta;m_\kappa)} . \tag{I8}$$

Из (15) - (I8) находим

$$|\mathcal{D}(x,\xi,\kappa) - \mathcal{D}(x,\xi\setminus\eta,\kappa)| \leqslant 2\|x\| \cdot \frac{S_{a(\xi,\eta;m_\kappa)}}{S_{m_\kappa}} \xrightarrow[\kappa\to\infty]{} 0,$$

откуда $F^{\xi}(x) = F^{\xi\setminus\eta}(x)$. Остаётся применить а) . Докажем г) . Положим для $i = 1,\dots,n$ $\eta^i = \xi^i \setminus \bigcup_{i<j\leqslant n} \xi^j$. Так как $\xi^i \gg \bigcup_{i<j\leqslant n} \xi^j$ в силу леммы 3 в) , то $F^{\xi^i} = F^{\eta^i}$. Так как мно-

жества η^i попарно не пересекаются, то остаётся применить уже доказанное утверждение б). Лемма 5 доказана.

Продолжаем доказательство теоремы 2. В силу теоремы Серпинского [3, стр.81] существует семейство $\{\xi^\tau \in \mathcal{P}_\infty : \tau \in [0,1]\}$ такое, что $\xi^{\tau_1} \cap \xi^{\tau_2} \in \mathcal{P}_0$ при $\tau_1 \neq \tau_2$. В силу леммы 3 б) имеем $\xi^{\tau_1} \gtrdot \xi^{\tau_2}$ при $\tau_1 \neq \tau_2$. Из леммы 5 в) следует, что $F^{\xi^{\tau_1}} \, d \, F^{\xi^{\tau_2}}$ при $\tau_1 \neq \tau_2$. Кроме того, для любого конечного множества $\tau_1, \dots, \tau_n \in [0,1]$, $\tau_i \neq \tau_j$ при $i \neq j$, имеем

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} F^{\xi^{\tau_i}} \Big\| \leqslant 1$$

в силу леммы 5 г). Для $y \in l^\infty_{[0,1]}$ построим $Ry \in M(c)^*$ по формуле

$$(Ry)(x) = \sum_{\tau \in [0,1]} y(\tau) F^{\xi^\tau}(x), \quad x \in M(c).$$

Ясно, что R есть решеточный изоморфизм и изометрия пространства $l^\infty_{[0,1]}$ на некоторую векторную подрешетку в $M(c)^*$.

В предположении справедливости континуум-гипотезы существует взаимно-однозначное отображение $\alpha \to \xi^\alpha$ множества всех ординалов меньших ω_1 на $\mathcal{P}_\infty$. Пусть $\{\eta^\alpha \in \mathcal{P}_\infty : \alpha < \omega_1\}$ есть семейство из леммы 4, удовлетворяющее условиям (10) и (11). Положим

$$f(x) = \sum_{\alpha < \omega_1} \dot{F}^{\eta^\alpha}(x), \quad x \in M(c).$$

Ясно, что $f \in M(c)^*_{an}$ удовлетворяет (3). Теорема 2 доказана.

4. Об одном результате Джонсона

В этом пункте будет получен один результат, не связанный с пространствами Марцинкевича, но доказательство которого основано на той же идее, что и доказательство теоремы 2.

Пусть для $n \in N$ l^1_n есть n-мерное вещественное арифметическое пространство с нормой

$$\|x\|_{l^1_n} = |x_1| + \dots + |x_n|, \quad \text{где } x = (x_1, \dots, x_n) \in l^1_n.$$

Рассматриваем пространство $X=(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\, l^1_n)_{l^\infty}$, состоящее из всех $x=\{x^n\}_{n\in N}$, где $x^n\in l^1_n$ таких, что

$$\|x\|_X=\sup_n \|x^n\|_{l^1_n}<\infty .$$

Джонсон [5, стр.101] доказал, что X^* содержит подпространство изоморфное пространству l^∞. Мы докажем более сильный результат.

ТЕОРЕМА 3. Пространство X^* содержит замкнутую линейную подрешетку, изоморфную и изометричную пространству $l^\infty_{[0,1]}$. При этом $X^*_{an}=X^*_{san}$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

ЛЕММА 6. Пусть A_n $(n\in N)$ – последовательность непустых попарно непересекающихся конечных или бесконечных множеств, причём $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n=0$, где τ_n есть число элементов множества A_n. Тогда существует семейство $\{A^t_n : n\in N,\ t\in[0,1]\}$, обладающее следующими свойствами:

а) $\emptyset = A^t_n \subset A_n$ для $\forall n\in N$ $\forall t\in[0,1]$;

б) для любых $t_1\neq t_2$ из $[0,1]$ существует $n_0=n_0(t_1,t_2)$ такое, что

$$A^{t_1}_n\cap A^{t_2}_n=\emptyset \quad \text{для } \forall n>n_0 .$$

Доказательство этой леммы, аналогичное доказательству теоремы Серпинского о почти дизъюнктном разбиении натурального ряда [3, стр.81], мы опускаем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. Для $n\in N$ положим $A_n=\{(n,1),(n,2),\dots,(n,n)\}$ и построим семейство $\{A^t_n\}$ согласно лемме 6. Возьмём произвольный $x=\{x^n\}\in X$, где $x^n=(x^n_1,\dots,x^n_n)\in l^1_n$, и положим

$$\mathcal{D}(x,t,n)=\sum_{(n,q)\in A^t_n} x^n_q ,$$

где $n \in N$, $t \in [0,1]$.

Фиксируем какой-нибудь $F \in (l^\infty)^*_+$ такой, что $\|F\|_{(l^\infty)^*} = 1$, $F(c_0) = \{0\}$. Для $t \in [0,1]$ построим теперь функционал F_t по формуле $F_t(x) = F(\{\mathfrak{D}(x,t,n)\}_{n\in N})$, $x \in X$. Ясно, что $0 < F_t \in X^*_{an}$, $\|F_t\|_{X^*} = 1$. Кроме того, $F_{t_1}\, d\, F_{t_2}$ при $t_1 \neq t_2$ и для любого непустого конечного множества $T \subset [0,1]$ справедливо

$$\Big\|\sum_{t\in T} F_t\Big\|_{X^*} = 1.$$

Для $y \in l^\infty_{[0,1]}$ построим $Ry \in X^*$ по формуле

$$(Ry)(x) = \sum_{t\in[0,1]} y(t) F_t(x), \quad x \in X.$$

Ясно, что R есть решеточный изоморфизм и изометрия пространства $l^\infty_{[0,1]}$ на некоторую векторную подрешетку в X^*.

Наконец, равенство $X^*_{an} = X^*_{san}$ прямо вытекает из следующего очевидного факта: каждая $K \in E_\infty(X)$ содержит такую $K_1 \in E_\infty(X)$, что K_1 изоморфна и изометрична пространству l^∞. Теорема доказана.

Литература

I. ЛОЗАНОВСКИЙ Г.Я. О локализованных функционалах в векторных структурах. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. I9, I974, с. 66-80.

2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., I96I.

3. SIERPINSKI W., Cardinal and Ordinal numbers. PWN, Warszawa, I965.

4. АБРАМОВИЧ Ю.А., ЛОЗАНОВСКИЙ Г.Я. О некоторых числовых характеристиках KN-линеалов. -"Матем. заметки", т.I4, № 5, I973, с. 723-732.

5. LINDENSTRAUSS J., TZAFRIRI L. Classical Banach space. - In.: Lecture Notes in Math., I973, 338.

Поступила в ред.-изд. отд.

28. II. I975 г.