УДК 519.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.М.Крепкий

В настоящей статье предлагается алгоритм отыскания минимума выпуклой функции на выпуклом замкнутом телесном множестве. Рассматриваемый алгоритм отличается от ранее известных методов аналогичного типа [3 - 5] способом аппроксимации целевой функции, а от методов, изложенных в [3, 4], - способом выбора длины шага, учитывающим целесообразность предотвращения мелких шагов вдали от оптимума. Алгоритм основывается на аппроксимации целевой функции последовательностью линейных и квадратичных функций. Для минимизации квадратичной функции на телесном выпуклом множестве предлагается использовать комбинацию метода сопряженных направлений и метода возможных направлений.

Пусть f, $g_1, \dots, g_m$ - выпуклые дифференцируемые функции, заданные в пространстве R^ν; $\Omega = \{x \mid g_j(x) \leq 0, j \in J = (1, \dots, m)\}$ - телесный компакт. Рассматривается задача минимизации функции на множестве Ω. Допустим, что к началу процесса известна некоторая точка $x^0 \in \Omega$, а в результате n-го шага алгоритма получена точка $x^n \in \Omega$.

Рассмотрим далее квадратичную функцию вида:

$$f_n(x) = (f'(x^n), x - x^n) + \frac{1}{2}(A_n(x - x^n), x - x^n), \qquad (1)$$

где матрица A_n (способ её построения аналогичен предложен-

ному в [7]) при $n \geq \nu-1$ определяется системой уравнений:

$$A_n \Gamma^{n-i} = e^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, \nu-1.$$

Здесь $\Gamma^n = y^n - x^n$, $e^{n-i} = f'(y^{n-i}) - f'(x^{n-i})$, f' – градиент функции f, а точка y^n выбирается произвольным образом, но так, чтобы обеспечивалось выполнение следующих условий:

а) система векторов $\Gamma^n, \ldots, \Gamma^{n-\nu+1}$ должна быть линейно-независимой;

б) $\|\Gamma^n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Если $0 \leq n \leq \nu-2$, а также если при каком-либо $n \geq \nu-1$ матрица A_n, определенная из системы уравнений, не будет положительно определенной, то либо изменяем вектор Γ^n и заново строим матрицу A_n, либо решаем задачу минимизации

$$(f'(x^n), x - x^n) \to \min \tag{2}$$

на множестве Ω.

Обозначим через $\bar{x}^n$ решение одной из описанных выше вспомогательных задач (1) или (2). В дальнейшем $n+1$ шаг реализуется следующим образом. Ищем точку $x^{n+1} = x^n + \lambda_n(\bar{x}^n - x^n)$ такую, что $x^{n+1} \in \Omega$ и $f(x^{n+1}) = \min\limits_{\lambda \geq 0} f(x^n + \lambda(\bar{x}^n - x^n))$, т.е. либо λ_n выбирается из условия $f'_\lambda(x^n + \lambda(\bar{x}^n - x^n)) = 0$, либо $\lambda_n = \max\{\lambda \geq 0 : x^n + \lambda(\bar{x}^n - x^n) \in \Omega\}$.

Обозначим через $f''(x) = \{\partial^2 f(x) / \partial x_i \partial x_k\}$ матрицу вторых производных в точке x.

ТЕОРЕМА. Если функция f дважды непрерывно дифференцируемая и сильно выпуклая (т.е. $m(h,h) \leq (f''(x)h, h) \leq M(h,h)$ для всех $x \in R^\nu$, $m > 0$, $M < +\infty$), то

$$\lim_{n \to \infty} f(x^n) = f^* = \min_{x \in \Omega} f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_n^1 = \frac{1}{\|\bar{x}^n - x^n\|} \inf\{\|x - y\| : y, x \in \Omega, \|f'(x) - f'(y)\| \geq \alpha_n(-f'(x^n), \frac{\bar{x}^n - x^n}{\|\bar{x}^n - x^n\|})\}$, α_n – фиксированное число из (0,1).

Выбираем λ_n^* из условия $\lambda_n^* = \lambda_n^1$, если $x^n + \lambda_n^1(\bar{x}^n - x^n) \in \Omega$, $\lambda_n^* = 1$ – в противном случае. По формуле Лагранжа получаем

$$f'(x^n+\lambda_n^*(\bar{x}^n-x^n))-f(x^n)=(f'(x^n+\tilde{\lambda}_n(\bar{x}^n-x^n)), \tag{3}$$
$$\lambda_n^*(\bar{x}^n-x^n))\ \tilde{\lambda}_n\in(0,\lambda_n^*).$$

Отсюда, из λ_n^1 и неравенства Коши-Буняковского

$$\left|\left(f'(x^n+\lambda(\bar{x}^n-x^n))-f'(x^n),\frac{\bar{x}^n-x^n}{\|\bar{x}^n-x^n\|}\right)\right|\leq\alpha_n\left(-f'(x^n),\frac{\bar{x}^n-x^n}{\|\bar{x}^n-x^n\|}\right),\ \lambda\in[0,\lambda_n^1]. \tag{4}$$

Из (3), (4) имеем

$$f(x^n)-f(x^n+\lambda_n^*(\bar{x}^n-x^n))\geq\inf\{\|x-y\|:x,y\in\Omega,\|f'(x)-f'(y)\|\geq$$
$$\geq\alpha_n\left(-f'(x^n),\frac{\bar{x}^n-x^n}{\|\bar{x}^n-x^n\|}\right)\}(1-\alpha_n)\left(f'(x^n),\frac{\bar{x}^n-x^n}{\|\bar{x}^n-x^n\|}\right). \tag{5}$$

Если $\lambda_n^*=1$, то

$$f(x^n)-f(x^n+\lambda_n^*(\bar{x}^n-x^n))\geq(1-\alpha_n)(-f'(x^n),\bar{x}^n-x^n). \tag{6}$$

Учитывая условия для выбора λ_n, имеем $\lambda_n\geq\lambda_n^*$. Следовательно,

$$f(x^n)-f(x^{n+1})\geq f(x^n+\lambda_n^*(\bar{x}^n-x^n)). \tag{7}$$

Из условий (5) - (7) и компактности Ω имеем

$$\lim_{n\to\infty}(f'(x^n),\bar{x}^n-x^n)=0. \tag{8}$$

Но так как

$$f(x^{n+1})=f(x^n)+(f'(x^n),x^{n+1}-x^n)+\frac{1}{2}(f''(\xi^n)(x^{n+1}-x^n),x^{n+1}-x^n),$$

$\xi\in(x^n,x^{n+1})$ и функция f сильно выпукла, получаем

$$(-f'(x^n),x^{n+1}-x^n)\geq\frac{m}{2}\|x^{n+1}-x^n\|^2. \tag{9}$$

Таким образом, выполнены все условия леммы из [7], поэтому $\|A_n-f''(x^n)\|\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда следует, что для любых M_1 и m_1 ($M_1>M$, $0<m_1<m$) найдется такое число n_1, что при $n\geq n_1$ для всякого $y\in R^\nu$, $m_1\|y\|^2\leq(A_ny,y)\leq M_1\|y\|^2$. Так как $f_n(\bar{x}^n)\leq 0$ и при $n\geq n_1$ имеем $(A_n(\bar{x}^n-x^n),\bar{x}^n-x^n)>0$, $(f'(x^n),\bar{x}^n-x^n)\leq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n(\bar{x}^n-x^n),\bar{x}^n-x^n)=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\bar{x}^n)=0$. (10)

Пусть $\bar{y}^n$ - точка минимума задачи (2), и предположим, что

$\lim\limits_{n\to\infty}(f'(x^n),\bar{y}^n-x^n)=-\rho<0$. Тогда для $y^n=x^n-\frac{(f'(x^n),\bar{y}^n-x^n)}{Md^2}(\bar{y}^n-x^n)$ имеем $f_n(y^n)\le -\frac{1}{2}\frac{(f'(x^n),\bar{y}^n-x^n)}{Md^2}$, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(y^n)\le -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(f'(x^n),\bar{y}^n-x^n)}{Md^2}=-\frac{\rho^2}{Md^2}<0,$$

где $d=\max\limits_{x,y\in\Omega}\|x-y\|$.

Это противоречит условию (10), так как $f_n(\bar{x}^n)\le f_n(y^n)$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(f'(x^n),\bar{y}^n-x^n)=0. \tag{11}$$

Из условия выпуклости и определения точки $\bar{y}^n$ имеем

$$0\le f(x^n)-f^*\le(f'(x^n),x^n-x^*)\le(f'(x^n),x^n-y^n). \tag{12}$$

Из (11), (12) получаем требуемое.

Если матрица A_n является положительно-определенной, то для квадратичной функции f_n в точке x^n строится система сопряженных направлений, получающихся в результате ортогонализации системы единичных векторов $\ell_1,\ldots,\ell_\nu$ в метрике, порождаемой матрицей $A_n'A_n$. Система сопряженных направлений имеет вид (см. [6]):

$$\nu_i(x^n)=\ell_i-j_{i1}(x^n)\nu_1(x^n)-\ldots-j_{ii-1}(x^n)\nu_{i-1}(x^n),$$

$$j_{ij}=\frac{(A_n'A_n\ell_i,\nu_j(x^n))}{(A_n'A_n\ell_j,\nu_j(x^n))}\qquad\begin{pmatrix}i=2,\ldots,\nu\\ j=1,\ldots,\nu-1\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Далее решение задачи минимизации построенной квадратичной функции на множестве Ω осуществляется методом сопряженных направлений с переходом к методу возможных направлений на тех шагах, когда эффективный спуск по сопряженным направлениям невозможен. При этом рассматривается следующая схема комбинирования указанных методов ж). Обозначим итерации процесса мини-

ж) Данная схема аналогична построенной в работе [2] для случая комбинирования метода покоординатного спуска и метода возможных направлений.

мизации f_n на Ω через $x^{n,k}$. Пусть к началу процесса мы имеем точку $x^{n,0}=x^n\in\Omega$, положительное число $\delta_{n,0}$ и сопряженные направления $\nu_1(x^n),\dots,\nu_\nu(x^n)$, а в результате k-го шага получены $x^{n,k}\in\Omega$ и $\delta_{n,k}>0$.

Пусть $\mathcal{J}(\delta_{n,k})=\{j: g_j(x^{n,k})\geq-\delta_{n,k}\}$. При отыскании точки $x^{n,k+1}$ на $(k+1)$-м шаге решается одна из двух следующих задач.

ЗАДАЧА Н. Максимизировать σ при ограничениях:

$$(f_n'(x^{n,k}),s)\leq-\sigma,$$

$$(g_j'(x^{n,k}),s)\leq-\sigma,\ j\in\mathcal{J}(\delta_{n,k}),\ s\in E,$$

$$E=\{\nu_i(x^n),\ i=1,2,\dots,\nu\}.$$

ЗАДАЧА $\mathcal{Z}$. Максимизировать σ при ограничениях:

$$(f_n'(x^{n,k}),s)\leq-\sigma;$$

$$(g_j'(x^{n,k}),s)\leq-\sigma,\ j\in\mathcal{J}(\delta_{n,k});$$

$$s\in S,\ S=\{\xi\in R^\nu:(\xi,\xi)\leq1\}$$

либо

$$S=\{\xi\in R^\nu:|\xi_i|\leq1,\ i=1,2,\dots,\nu\}.$$

Процесс минимизации f_n при данных $x^{n,0}\in\Omega$ и $\delta_{n,0}$ начинается с решения задачи H. В зависимости от того, как был реализован k-й шаг, на $(k+1)$-м шаге возможен один из двух исходов:

а) если на k-м шаге полученное значение $\sigma(\sigma_{n,k})$ оказалось не меньше $\delta_{n,k-1}$, на $(k+1)$-м шаге решается задача H. Если при этом получается, что $\sigma_{n,k+1}\geq\delta_{n,k}$, определяем точку $x^{n,k+1}=x^{n,k}+\lambda s^k$ такую, что $x^{n,k+1}\in\Omega$ и

$$f(x^{n,k+1})=\min_{\lambda>0}f(x^{n,k}+\lambda s^k),\tag{14}$$

и полагаем $\delta_{n,k+1}=\delta_{n,k}$. Если же $\sigma_{n,k+1}<\delta_{n,k}$, считаем $x^{n,k+1}=x^{n,k}$, $\delta_{n,k+1}=\delta_{n,k}$. Через s^k обозначен вектор s, соответствующий $\sigma_{n,k+1}$;

б) если на $(k+1)$-м шаге имеем $\sigma_{n,k}<\delta_{n,k-1}$, то на $(k+1)$-м шаге решается задача $\mathcal{Z}$. Точка $x^{n,k+1}$ определяется по формулам (14). В случае, когда $\sigma_{n,k+1}\geq\delta_{n,k}$, пола-

гаем $\delta_{n,k+1} = \delta_{n,k}$. Если же $\sigma_{n,k+1} < \delta_{n,k}$, берем $\delta_{n,k+1} = \frac{1}{2}\delta_{n,k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство сходимости процесса минимизации f_n на Ω по существу не отличается от приведенных в [I,2 .

Литература

I. ЗОЙТЕНДЕЙК Г. Методы возможных направлений. М., ИЛ., 1963.

2. КАПЛАН А.А. К вопросу о реализации метода возможных направлений. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5(22). Новосибирск. 1972, с. 99-105.

3. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., РУБИНОВ А.М. К задаче о минимизации гладкого функционала при выпуклых ограничениях. - "Докл. АН СССР", 1965, т. 160, № I, с.15-17.

4. БУЛАВСКИЙ В.А. О решении нелинейных неравенств и экстремальных задач методом повышенной точности. - В кн.: Оптимизация. Вып. 9(26). Новосибирск, 1973. с. 188-202.

5. J.W.Daniel. The Approximate Minimization of Functionals. Printice-Hall, Englewood Cliffs. N.J. 1971.

6. ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.

7. ДАНИЛИН Ю.М., ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. О методах минимизации с ускоренной сходимостью. -"Журнал вычисл. матем. и матем. физ.", 1970, т. 10, № 6, с. 1341-1354.

Поступила в ред.-изд. отд.

14. 10. 1975 г.