УДК 519.3

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ КРИТЕРИЯМИ

Син Дон Ха

Пусть задано Ω - выпуклое замкнутое множество в R^n, а также упорядоченная совокупность целевых функций $\langle g_0, g_1, \dots, g_m \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Направление $\bar{S}$ будем называть направлением линейности функции $F: R^n \longrightarrow R$, если при всех $z \in R^n$ и $y \in R$ имеет место равенство $F(z+y\bar{S}) = F(z) + y[F(z+\bar{S}) - F(z)]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $F: R^n \longrightarrow R$ будем называть невырожденной, если всякое направление $\bar{S}$, для которого существуют точка $\bar{x} \in R^n$ и число $\bar{\lambda} > 0$ такие, что $F(\bar{\bar{x}} + \lambda\bar{\bar{S}}) = F(\bar{\bar{x}}) + \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \times$ $\times [F(\bar{\bar{x}} + \bar{\lambda}\bar{\bar{S}}) - F(\bar{\bar{x}})]$ при $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$, является направлением линейности.

Введем следующие обозначения:

$\mathcal{L}_F$ - подпространство, образованное направлениями линейности функции F;

$$\Omega_F = \{\bar{\bar{x}} \in \Omega : F(\bar{\bar{x}}) = \min\{F(y) : y \in \Omega\}\}.$$

Пусть функции $g_i : R^n \longrightarrow R$, $i = \overline{0,m}$, выпуклые и невырожденные. Пусть также выполнены условия:

$$\mathcal{L}_{g_0} \cap \mathcal{L}_{g_1} \cap \dots \cap \mathcal{L}_{g_m} = \{0\}, \tag{1}$$

$$\Omega_{g_0} \cap \Omega_{g_1} \cap \dots \cap \Omega_{g_m} = \emptyset \tag{2}$$

и на Ω достигаются $\inf_{\Omega} g_i = g_i^*$, $i = \overline{0,m}$.

Рассмотрим лексикографическую задачу математического программирования:

1) $\Omega_0^* = \{\bar{x} \in \Omega : g_0(\bar{x}) = \inf\{g_0(y) : y \in \Omega\}\}$,

2) $\Omega_1^* = \{\bar{x} \in \Omega_0^* : g_1(\bar{x}) = \inf\{g_1(y) : y \in \Omega_0^*\}\}$,

3) $\Omega_2^* = \{\bar{x} \in \Omega_1^* : g_2(\bar{x}) = \inf\{g_2(y) : y \in \Omega_1^*\}\}$,

. . . .

$m+1$) $\Omega_m^* = \{\bar{x} \in \Omega_{m-1}^* : g_m(\bar{\bar{x}}) = \inf\{g_m(y) : y \in \Omega_{m-1}^*\}\}$.

Ввиду (I) $\Omega_m^* = \{\bar{\bar{x}}^*\}$, т.е. Ω_m^* состоит из одной точки.

Для поставленной задачи рассмотрим регуляризованную задачу

$\min\{g_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g_i(\bar{x}) : \bar{\bar{x}} \in \Omega\}$, где $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1,m}$,

и положим $g_0(\bar{\bar{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g_i(\bar{x}) = F(\bar{\bar{x}}; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$. При любых $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, F - строго выпуклая функция, причем на Ω достигается $\inf\{F(\bar{\bar{x}}; \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_m) : \bar{\bar{x}} \in \Omega\} = F(\bar{\bar{x}}_\varepsilon)$.

Точку $\bar{\bar{x}}_\varepsilon = \bar{\bar{x}}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m}$ будем называть решением регуляризованной задачи.

§ I. Лексикографическая задача при ограниченном Ω

Здесь будем предполагать, что Ω - ограниченное многогранное множество в пространстве R^n, в котором мы введем евклидову норму.

ЛЕММА I. *Пусть Ω - многогранное множество в R^n, x^*, $\tilde{x} \in \Omega$ и $x^* \neq \tilde{x}$. Какова бы ни была шаровая окрестность $S_{\rho_1}(x^*)$ точки x^*, не содержащая точки $\tilde{x}$, найдется шаровая окрестность $S_{\rho_2}(\tilde{x})$ точки $\tilde{x}$ такая, что точка $z + (1 - \rho_1/2\,\|x^* - \tilde{x}\|)(x^* - \tilde{x})$ принадлежит множеству $S_{\rho_1}(x^*) \cap \Omega$ при любом $z \in S_{\rho_2}(\tilde{x}) \cap \Omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega=\{x\in R^n : a_i x \leqslant b_i,\ i\in I\}$, где I - некоторое конечное множество индексов. Образуем множество $\tilde{I}\subseteq I$, включив в него те i, для которых выполняется неравенство $a_i\tilde{x}<b_i$. Положим $\bar{x}=x^*-(\rho_1/2\,\|x^*-x\|)\times$ $\times(x^*-\tilde{x})$. Так как $x^*\in\Omega$, то при $i\in\tilde{I}$ выполняются неравенства $a_i\bar{x}<b_i$. В качестве радиуса шаровой окрестности точки $\tilde{x}$ возьмём $\rho_2=\min\{\min\{\frac{b_i-a_i\bar{x}}{\|a_i\|}: i\in\tilde{I}\},\frac{\rho_1}{2}\}$. Для точки $z\in S_{\rho_2}(\tilde{x})\cap\Omega$ рассмотрим точку

$$w=z+(1-\rho_1/2\,\|x^*-\tilde{x}\|)(x^*-\tilde{x})=z-\tilde{x}+\bar{x}$$

и покажем, что $w\in S_{\rho_1}(x^*)$. Действительно, $\|w-x^*\|\leqslant\|z-\tilde{x}\|+\frac{\rho_1}{2}\leqslant\rho_1$.

Теперь покажем, что w является допустимой точкой. При $i\in\tilde{I}$, ввиду определения радиуса ρ_2, оказывается, что $a_i\bar{x}\leqslant b_i-\|a_i\|\rho_2$. Поэтому $a_i w=a_i(z-\tilde{x})+a_i\bar{x}\leqslant b_i$. При $i\bar{\in}\tilde{I}$ имеем, что $a_i z\leqslant b_i$ и $a_i\tilde{x}=b_i$. Следовательно, $a_i(z-\tilde{x})\leqslant 0$, и поэтому $a_i w\leqslant a_i\bar{x}\leqslant b_i$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА I. Если x^* - решение лексикографической задачи математического программирования с ограниченным многогранным множеством Ω, а $\varepsilon_1>0,\dots,\varepsilon_m>0$, то $x_\varepsilon\longrightarrow x^*$, если $\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i\longrightarrow 0$, $i=\overline{1,m-1}$, и $\varepsilon_1\longrightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{x}$ - предельная точка для x_ε. Значит, существует последовательность $\varepsilon^k=(\varepsilon_1^k,\varepsilon_2^k,\dots,\varepsilon_m^k)$, $k=1,2,\dots$, такая, что $\lim\limits_k\varepsilon_1^k=0$, $\lim\limits_k\varepsilon_{i+1}^k/\varepsilon_i^k=0$, $i=\overline{1,m-1}$, $\lim\limits_k x_{\varepsilon^k}=\tilde{x}$. По определению решения регуляризованной задачи имеем, что $g_0(x_\varepsilon)\longrightarrow g_0^*$ при $\varepsilon_i\longrightarrow 0$, $i=\overline{1,m}$, следовательно, $\lim\limits_k g_0(x_{\varepsilon^k})=g_0^*$. По непрерывности функции g_0 имеем $g_0(\tilde{x})=g_0^*$, т.е. $\tilde{x}\in\Omega_{g_0}=\Omega_0^*$.

Предположим, что $\tilde{x}\in\Omega_i^*$, и покажем $\tilde{x}\in\Omega_{i+1}^*$, где $i\leqslant m-1$. Пусть $\tilde{x}\bar{\in}\Omega_{i+1}^*$. Так как $x^*\in\Omega_{i+1}^*$, то $x^*\neq\tilde{x}$. Но x^*, $\tilde{x}\in\Omega_i^*$, и, следовательно, направление $x^*-\tilde{x}$ является направлением линейности невырожденных функций $g_0,\dots$ $\dots,g_i$, причём вдоль этого направления функции $g_0,\dots,g_i$ принимают постоянные значения. Но $g_{i+1}(x^*)=\inf\limits_{x\in\Omega_i^*}g_{i+1}(x)$, и поэтому

$g_{i+1}(x^*) < g_{i+1}(\tilde{x})$. Положим $\delta = g_{i+1}(\tilde{x}) - g_{i+1}(x^*)$. Выберем шаровые окрестности $S_{\rho_1}(x^*)$ и $S_{\rho_2'}(\tilde{x})$ точек x^* и $\tilde{x}$ такие, что $g_{i+1}(y) > g_{i+1}(x) + \frac{1}{2}\delta$ при всех $y \in S_{\rho_2'}(\tilde{x})$ и $x \in S_{\rho_1}(x^*)$. Теперь возьмем за окрестность точки $\tilde{x}$ шар радиуса $\rho_2'' = \min\{\rho_2, \rho_2'\}$, где ρ_2 – радиус окрестности, гарантированной леммой I. Так как $x_{\varepsilon^k} \to \tilde{x}$, то существует такой номер $k_0 > 0$, что при $k > k_0$ точки $x_{\varepsilon^k} \in S_{\rho_2''}(\tilde{x}) \cap \Omega$. Тогда точка $w^k = x_{\varepsilon^k} + (1 - \rho_1/2\|x^* - \tilde{x}\|) \times (\tilde{x}^* - \tilde{x})$ по выбору ρ_2'' принадлежит множеству $S_{\rho_1}(x) \cap \Omega$ при любом $k > k_0$. Так как при $k > k_0$, $x_{\varepsilon^k} \in S_{\rho_2''}(x) \cap \Omega$ и $w^k \in S_{\rho_1}(x^*) \cap \Omega$, то $g_{i+1}(x_{\varepsilon^k}) - g_{i+1}(w^k) \geq \frac{1}{2}\delta > 0$. Поскольку $\varepsilon_j^k / \varepsilon_{i+1} \to 0$, $j > i+1$, а множество Ω ограничено, то существует такой номер $k_1 > k_0$, что при $k > k_2$

$$\left[g_{i+1}(x_{\varepsilon^k}) - g_{i+1}(w^k)\right] + \sum_{j=i+2}^{m} \frac{\varepsilon_j^k}{\varepsilon_{i+1}^k}\left[g_j(x_{\varepsilon^k}) - g_j(w^k)\right] > 0$$

или

$$\sum_{j=1+i}^{m} \varepsilon_j g_j(x_{\varepsilon^k}) > \sum_{j=1+i}^{m} \varepsilon_j g_j(w^k). \qquad (3)$$

Учитывая, что $g_j(x_{\varepsilon^k}) = g_j(w^k)$ при $j = \overline{0, i}$, из (3) при $k > k_1$ получим

$$\inf\{F(x; \varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_m^k) : x \in \Omega\} = F(x_{\varepsilon^k}; \varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_m^k) > F(w^k; \varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_m^k),$$

хотя $w^k \in \Omega$. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{x} \in \Omega_{i+1}^*$. Таким образом, $\tilde{x} \in \Omega_m^*$ и совпадает с x^*. Ввиду ограниченности $\{x_\varepsilon\}$ и произвольности предельной точки $\tilde{x}$, получаем утверждение теоремы.

§ 2. Лексикографическая задача при неограниченном Ω

Предположим теперь, что Ω – неограниченное многогранное множество в R^n.

ЛЕММА 2. П у с т ь $\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_m > 0$, $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i \to 0$, $i = \overline{1, m-1}$, и x_ε – р е ш е н и е р е г у л я р и з о в а н н о й з а д а ч и. Т о г д а с у щ е с т в у ю т $M > 0$ и $\varepsilon_i^0 > 0$, $i = \overline{1, m}$, т а к и е, ч т о п р и

$\varepsilon_i < \varepsilon_i^o$, $i=\overline{1,m}$, выполняется неравенство

$$\|x_\varepsilon\| \leqslant M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, можно считать, что решение лексикографической задачи x^* совпадает с началом координат, т.е. $x^*=0$. Проведем доказательство от противного. Пусть существует стремящаяся к нулю последовательность $\varepsilon^k=(\varepsilon_1^k,\dots,\varepsilon_m^k)$ такая, что $\|x_{\varepsilon^k}\| \longrightarrow +\infty$. Можно считать, что $\|x_{\varepsilon^k}\| \geqslant 1$, и существует $\lim\limits_k x_{\varepsilon^k}/\|x_{\varepsilon^k}\| = x_o$.

Заключим точку x_o в многогранную ограниченную окрестность S, не содержащую нуля, и положим $L=S\cap\Omega$. Пусть P – выпуклая оболочка нуля и множества L. Заметим, что P – ограниченное многогранное множество и существует такое k_o, что при $k>k_o$ оказывается $x_{\varepsilon^k}/\|x_{\varepsilon^k}\| \in L$. Так как функция $F(x;\varepsilon_1^k,\dots,\varepsilon_m^k)$ строго выпуклая по x, то $\min\limits_{x\in P} F(x;\varepsilon_1^k,\dots,\varepsilon_m^k)$ достигается в точке $\tilde{x}_k$, принадлежащей L. Действительно, пусть $\tilde{x}_k=\alpha\cdot 0+(1-\alpha)\tilde{\tilde{x}}_k$, где $\alpha\in(0,1)$, а $\tilde{\tilde{x}}_k \in L$. На отрезке $\{\tilde{\tilde{x}}_k+\lambda(x_{\varepsilon^k}-\tilde{\tilde{x}}_k): 1\geqslant\lambda\geqslant 0\}$ функция $F(x;\varepsilon_1^k,\dots,\varepsilon_m^k)$ достигает минимума при $\lambda=1$ и, следовательно, строго возрастает при уменьшении λ до нуля. Но если $\alpha>0$, то при достаточно малом положительном λ окажется $(1-\alpha)(1-\lambda)+\lambda\|x_{\varepsilon^k}\|<1$, и, следовательно, точка $\tilde{x}_k+\lambda(x_{\varepsilon^k}-\tilde{x}_k)=(1-\alpha)(1-\lambda)\tilde{\tilde{x}}_k+\lambda x_{\varepsilon^k}\in P$, что противоречит выбору $\tilde{x}_k$. Таким образом, $\alpha=0$ и $\tilde{x}_k\in L$. В то же время точка 0 является решением лексикографической задачи на множестве Ω, а следовательно, и на множестве $P\subset\Omega$ (при том же наборе критериев). По теореме I, $\lim\limits_k \tilde{x}_k=0$, что невозможно при $\tilde{x}_k\in L$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Утверждение теоремы I имеет место без предположения об ограниченности Ω.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 существует ограниченный многогранник S, содержащий точки x^* и x_{ε^k} при $0<\varepsilon^k<\varepsilon^o$. Рассмотрев лексикографическую задачу на ограниченном многограннике $S\cap\Omega$, по теореме I найдём, что $x_{\varepsilon^k}\longrightarrow x^*$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В поставленной задаче является несущественным условие (2). Если $\Omega_{g_0} \cap \ldots \cap \Omega_{g_m} \neq \emptyset$, то точки минимума x_ε регуляризованной задачи $\inf F(x;\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m) > 0$, совпадают с x^* .

Литература

1. ПОДИНОВСКИЙ В.В., ЛЕБЕДЕВ Б.Д., СТЫРИПОВИЧ Р.С. Задачи оптимизации по упорядоченной совокупности критериев. - "Экономика и математические методы", 1971, т.7, вып. 4, с. 612-616.
2. ПОДИНОВСКИЙ В.В. Лексикографическая задача линейного программирования. - "Журн. вычисл. матем. и матем. физ.", 1972, т.6, № 12, с. 1568-1571.
3. St.Cruceanu. Sur la minimisation des fonctionnelles "C.R. Acad.Sci.", 1971, 273 No.17, A 763-A 765.
4. ЕРЁМИН И.И. О задачах последовательного программирования. "Сиб. матем. журнал", 1973, т. XIУ, №1, с. 53-63.

Поступила в ред.-изд. отд.
14. УI. 1975 г.