УДК 513.88:519.53

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МЕРАХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА СИСТЕМЕ БОРЕЛЕВСКИХ МНОЖЕСТВ МЕТРИЧЕСКОГО КОМПАКТА

А.Н.Козырев

В работе Г.Ш.Рубинштейна [I], посвященной некоторым классам неаддитивных функций на σ-алгебрах подмножеств фиксированного множества, приведены предложения о характеристике полиномиальных функций, в частности полиномиальных мер. При этом указывается, что в одном из докладов Г.Ш.Рубинштейна была намечена схема доказательства этих предложений для случая функций, определенных на борелевской системе подмножеств метрического компакта. В настоящей заметке эта схема реализуется с некоторыми дополнениями.

I. Приведем некоторые определения из [I]. Пусть $\mathcal{B}$ - некоторая σ-алгебра подмножеств фиксированного множества Q, а $C_0(\mathcal{B})$ - совокупность всех непрерывных[ж)] вещественнозначных функций, определенных на $\mathcal{B}$ и обращающихся в нуль на пустом множестве Φ. Тогда каждая аддитивная функция $\varphi \in C_0(\mathcal{B})$, как известно, является σ-аддитивной. Функция $\varphi \in C_0(\mathcal{B})$ называется полиномиальной порядка n, если она представима в виде диагонального сечения некоторой n-кратной аддитивной функции[жж)] $\psi : \mathcal{B}^n \to R$, т.е.

ж) Непрерывность понимается в смысле теоретико-множественного перехода.

жж) Под этим понимается σ-аддитивность по каждому аргументу.

$$\varphi(e) = \psi(e, e, \ldots, e), \quad e \in B. \qquad (1)$$

Для характеристики полиномиальных функций каждой функции $\varphi \in C_0(B)$ сопоставим последовательность вспомогательных функций $\chi^m : B^m \to R$, определяемую соотношениями

$$\chi^m(e_1, e_2, \ldots, e_m) = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{m-r} \sum_{\{i_s\} \in \mathcal{J}_{m,r}} \varphi\Big(\bigcup_{s=1}^{r} e_{i_s}\Big), \qquad (2)$$

где $\mathcal{J}_{m,r}$ – совокупность r-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Нетрудно проверить, что

$$\chi^1(e) = \varphi(e), \quad e \in B,$$

а при $m > 1$ справедливо рекуррентное соотношение

$$\chi^m(e_1, e_1', e_2, \ldots, e_{m-1}) = \chi^{m-1}(e_1 \cup e_1', e_2, \ldots, e_{m-1}) - \chi^{m-1}(e_1', \ldots, e_{m-1}) - \chi^{m-1}(e_1, \ldots, e_{m-1}). \qquad (3)$$

Кроме того, если $e = \bigcup_{k=1}^{m} e_k$, то

$$\varphi(e) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{\{k_i\} \in \mathcal{J}_{m,r}} (e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_r}), \qquad (4)$$

где $\mathcal{J}_{m,r}$ имеет такой же смысл, что и в формуле (2).

В [I] отмечается, что если функция $\varphi \in C_0(B)$ является полиномиальной порядка n, то она удовлетворяет следующему условию (P_n): отвечающие функции φ вспомогательные функции (2) при $m > n$ обращаются в нуль на любом дизъюнктном семействе $\{e_i\}_{i=1}^{m} \subset B$.

В следующих пунктах для некоторых частных случаев доказывается справедливость обратного утверждения. Интересующее нас утверждение устанавливается предварительно для конечного множества Q, а затем для случая, когда B является борелевской системой множеств произвольного метрического компакта. При доказательстве последнего мы ограничиваемся рассмотрением так называемых надмер $\varphi \in C_0(B)$, для которых все вспомогательные функции (2) принимают неотрицательные значения на любых дизъюнктных семействах $\{e_i\}_{i=1}^{m} \subset B$.

2. Пусть $Q = \{1, 2, \ldots, N\}$ – конечное множество, а B – совокупность всех его подмножеств. В этом случае n-кратная аддитивная функция $\psi : B^n \longrightarrow R$, очевидно, полностью определяется своими значениями на одноэлементных множествах.

ЛЕММА I. Если $\varphi \in C_0(B)$ удовлетворяет условию P_n, то она является полиномиальной порядка n, т. е. совпадает с диагональным сочетанием некоторой n-кратной аддитивной функции $\psi : B^n \longrightarrow R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (4) каждая функция, удовлетворяющая условию P_n, в данном случае однозначно определяется своими значениями на множествах $e \in B$, содержащих не более n элементов. В частности, это относится к полиномиальным функциям порядка n, которые, как отмечалось, удовлетворяют условию P_n. Поэтому для доказательства леммы достаточно построить полиномиальную функцию порядка n, совпадающую с функцией φ на указанных $e \in B$.

Рассмотрим функции вида

$$\varphi_\ell(e) = \sum_{\{i_j\} \in \mathcal{J}_{|e|,\ell}} \chi^\ell(\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_\ell\}),$$

где $|e|$ – число элементов в множестве $e \in B$.

Можно проверить, что для каждого $\ell = 1, 2, \dots, n$ функция φ_ℓ удовлетворяет условию P_ℓ, кроме того, при $\ell > m$ для любых различных $i_1, i_2, \dots, i_m$ из Q отвечающая φ_ℓ вспомогательная функция χ_ℓ^m такова, что $\chi_\ell^m(\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_m\}) = 0$. Для функций φ_ℓ, $\ell = 1, 2, \dots, n$, в качестве порождающих их ℓ-кратных аддитивных функций могут быть приняты функции ψ_ℓ, значения которых на одноэлементных множествах определяются по формуле

$$\psi_\ell(\{i_1\}, \dots, \{i_\ell\}) = \frac{\varphi(\{i_1, \dots, i_\ell\})}{\ell!}.$$

Искомая функция $\psi : B^n \longrightarrow R$ получается из функций ψ_ℓ с помощью равенства

$$\psi(e_1, e_2, \dots, e_n) = \sum \psi_\ell(e_1, e_2, \dots, e_{\ell-1}, \bigcap_{k=\ell}^{n} e_k),$$

и лемма доказана.

3. Перейдем теперь к случаю, когда Q – метрический компакт, а B – система его борелевских подмножеств. Символом B_m будем обозначать систему борелевских подмножеств компакта Q^m.

Построим такую последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ конечных измельчающихся разбиений компакта Q на борелевские множества, что $diam(\alpha) < \frac{1}{2^k}$ для любого $\alpha \in \tau_k$.

Минимальная σ-алгебра, содержащая $\tau = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tau_k$, совпадает с совокупностью B всех борелевских множеств компакта Q. Это следует из очевидной представимости каждого открытого множества $G \subset Q$ в виде объединения содержащихся в нём множеств $\alpha \in \tau$.

Рассмотрим теперь систему алгебр $\mathcal{A}_k$, $k=1,2,\ldots$, состоящих из множеств $d \in B$, представимых в виде конечных объединений некоторых $\alpha_i \in \tau_k$.

Так как $\mathcal{A}_{k+1} \supset \mathcal{A}_k$, то система $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k$ также является алгеброй, причем $\tau \subset \mathcal{A} \subset B$.

ЛЕММА 2. Функция $\varphi \in C_0(B)$, обращающаяся в нуль на элементах алгебры $\mathcal{A}$, тождественно равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G - открытое множество и G_k - объединение всех $\alpha \in \tau_k$, содержащихся в G. Тогда

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = \lim_{k\to\infty} G_k .$$

Поэтому из обращения в нуль на $\mathcal{A}$ функции $\varphi \in C_0(B)$ следует, что

$$\varphi(G) = \lim_{k\to\infty} \varphi(G_k) = 0.$$

Переход от открытых множеств к произвольным множествам $e \in B$ осуществляется стандартным образом с помощью трансфинитной индукции.

Предположим теперь, что функция $\varphi \in C_0(B)$ является надмерой, удовлетворяющей условию P_n. В силу леммы 2 она однозначно определяется своим сужением на алгебру $\mathcal{A}$, которое мы обозначим также буквой φ. Для $\nu = 1,2,\ldots,n$ и каждого $e \in \mathcal{A}$ положим

$$\varphi_\nu(e) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k^\nu(e)} \chi^\nu(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n), \qquad (5)$$

где под α понимается набор $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)$ дизъюнктивных множеств, а под $\mathcal{A}_k^\nu(e)$-совокупность всех таких наборов при условии, что $\alpha_i \in \mathcal{T}_k$ и $\alpha_i \subset e$. Покажем, что предел в правой части соотношения (5) существует. Непосредственно из (3) получаем соотношение

$$\chi^{\nu+1}(\alpha_1', \alpha_1'', \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) = \chi^\nu(\alpha_1' \cup \alpha_1'', \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) - \chi^\nu(\alpha_1', \ldots, \alpha_\nu) - \chi^\nu(\alpha_1'', \ldots, \alpha_\nu),$$

из которого следует, что величина

$$\sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\alpha \in A_{k(e)}} \chi^\nu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$$

не возрастает с увеличением индекса k. Поэтому существуют пределы

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\alpha \in A_k(e)} \chi^\nu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$$

для $m = 1, \ldots, n$, а также пределы в правой части выражения (5), что означает корректность определения функций $\varphi_m : \mathcal{A} \to R_+$ для всех $m = 1, \ldots, n$.

Будем называть надмеру $\varphi : \mathcal{A} \to R_+$ чистой n-степенью, если для всех $m \neq n$ имеет место $\varphi_m = 0$.

Покажем, что построенные нами функции φ_m являются чистыми m-степенями. Для этого нам придется построить последовательности функций χ_m^k, $k = 1, 2, \ldots$, для каждой функции $\varphi_m : \mathcal{A} \to R_+$ и показать, что выполняются условия:

а) $\chi_m^k \geq 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$,

в) $\chi_m^k = 0$ для $k > m$,

с) $(\varphi_m)_m = \varphi_m$,

д) $\varphi_m \in C_0(B)$.

Доказательство непрерывности функций φ_m приводится ниже, в лемме 3, а пока предположим, что все функции φ_m непрерывны, и поэтому нам достаточно проверить лишь условия „а" – „с".

По определению φ_m и χ_m^k, имеем

$$\chi_m^k(e_1, \ldots, e_k) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \sum_{\mathcal{J}_{r,k}} \lim_{\nu \to \infty} \sum_{\alpha \in A_\nu^m(\bigcup_{i \in \mathcal{J}_{m,k}} e_i)} \chi^m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m). \quad (6)$$

Все суммы в правой части соотношения (6) конечны, поэтому предел можно вынести за знаки сумм и рассмотреть выражение

$$\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\sum_{\mathcal{I}_{r,k}}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_\nu^m(\bigcup_{i\in\mathcal{I}_{r,k}} e_i)}\chi^m(\alpha_1,\dots,\alpha_m). \tag{7}$$

При $k>m$ эта сумма обращается в нуль, откуда сразу следует, что выполняется условие „в", или функция φ_m удовлетворяет условию P_m. При $k\le n$ в (7) остаются лишь слагаемые, присутствующие только в первом члене, т.е. такие, что для каждого индекса $i=1,\dots,k$ найдется индекс j_i, для которого $\alpha_{j_i}\subset e_k$. Поскольку все эти слагаемые неотрицательны, функция χ_m^k неотрицательна, т.е. выполняется условие „а".

Рассмотрим более детально случай, когда $k=m$. При этом имеет место довольно простая формула:

$$\chi_m^m(e_1,\dots,e_m)=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{\substack{\alpha_i\in\tau_\nu\\ \alpha_i\in e_i}}\chi^m(\alpha_1,\dots,\alpha_m),$$

из которой получаем нужное нам соотношение „с":

$$(\varphi_m)_m=\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\mathcal{A}_\mu^m(e)}\sum_{\substack{\alpha_i\in\tau_\nu\\ \alpha_i\in e_i}}\chi^m(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=$$

$$=\lim_{\mu\to\infty}\lim_{\nu\to\infty}\sum_{\mathcal{A}_\mu^m(e)}\sum_{\substack{\alpha_i\in\tau_\nu\\ \alpha_i\in e_i}}\chi^m(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{\mathcal{A}_\nu^m(e)}\chi^m(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\varphi_m(e).$$

Заметим, что, по определению функций φ_m, всегда выполняется соотношение

$$\varphi(e)=\sum_{m=1}^{n}\varphi_m(e). \tag{8}$$

В частности, выполняется соотношение

$$\varphi_m(e)=\sum_{k=1}^{m}(\varphi_m)_k(e).$$

Но

$$\varphi_m(e)=(\varphi_m)_m(e),\quad (\varphi_m)_k(e)\ge 0,\quad k=1,\dots,n,$$

следовательно, $(\varphi_m)_k(e)=0$ для всех $e\in\mathcal{A}$ и всех $k<m$.

Этим объясняется достаточность условий „a" – „c" для того, чтобы функция φ_m была чистой степенью. Значит, из непрерывности функций φ_m следует, что (8) есть разложение надмеры на чистые степени.

4. Предположим теперь, что у нас имеется чистая m-степень $\varphi_m : \mathcal{A} \to R_+$ и мы хотим построить m-кратную аддитивную функцию $\psi_m : \mathcal{B} \to R_+$ такую, что

$$\varphi_m(e) = \psi_m(e, e, \ldots, e), \quad e \in \mathcal{A}.$$

Обозначим через $\mathcal{A}_k^m$ прямое произведение m экземпляров алгебры $\mathcal{A}_k$. Поскольку в алгебре $\mathcal{A}_k$ имеется лишь конечное число элементов, мы можем воспользоваться леммой I и получить последовательность мер $\{\psi_m^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\psi_m^k : \mathcal{A}_k^m \to R_+$, $k = 1, 2, \ldots$, для каждой из которых имеет место соотношение

$$\psi_m^k(e, e, \ldots, e) = \varphi_m(e)$$

при любом множестве $e \in \mathcal{A}_k$. По построению функций ψ_m^k (см. лемму I), для любого набора множеств $(e_1, \ldots, e_m) \in \mathcal{A}_k^m$ выполняется равенство

$$\psi_m^k(e_1, \ldots, e_m) = \sum_{\ell=1}^{m} \varphi_{m,\ell}^k \left(e_1, e_2, \ldots, e_{\ell-1}, \bigcap_{k=\ell}^{m} e_k\right). \qquad (9)$$

Если в соотношении (4) принять $\nu = m$ и учесть условия P_n для φ_m, то получим новое соотношение

$$\chi_m^m(\alpha_1' \cup \alpha_1'', \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = \chi_m^m(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_m) + \chi_m^m(\alpha_1'', \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$

которое с учетом равенства (9) означает, что для всех наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ дизъюнктных множеств $\alpha_i \in \tau_k$ значение функций $\psi_m^{k+\ell}$ постоянно, т.е. при всех $\ell \geqslant 1$ имеет место равенство

$$\psi_m^k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = \psi_m^{k+\ell}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m).$$

Из свойств чистых степеней вытекают предельные соотношения:

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_{m,\ell}^k = 0, \quad \lim_{k \to \infty} \psi_{m,\ell}^k = 0.$$

А это с учетом (9) означает, что для любых множеств $E \in \mathcal{A}^m$ существуют пределы

$$\lim \psi_m^k(E) = \psi_m(E).$$

Определенная таким образом функция $\psi_m : \mathcal{A}^m \to R$ будет аддитивной. Чтобы показать её σ-аддитивность по каждому аргументу и распространить эту функцию на $\mathcal{B}^m$, нам потребуется непрерывность функции φ_m, которую мы в этом пункте предполагаем.

Если зафиксировать $m-1$ компонент множества $E = e_1 \times \ldots \times e_m$, т.е. все, кроме некоторого e_{i_1}, то получим алгебру $\mathcal{A}_{i_1}(e_1 \times e_2 \times \ldots \times e_{i_1-1} \times e_{i_1+1} \times \ldots \times e_m)$, изоморфную алгебре A. Если функция φ_m непрерывна, то функция ψ_m σ-аддитивна на элементах алгебры $\mathcal{A}_{i_1}(e_1 \times e_2 \times \ldots \times e_{i_1-1} \times e_{i_1+1} \times \ldots \times e_m)$, поэтому её можно распространять на σ-алгебру $\mathcal{B}_{i_1}(e_1 \times e_2 \times \ldots \times e_{i_1-1} \times e_{i_1} \times \ldots \times e_m)$, изоморфную σ-алгебре $\mathcal{B}$. Если теперь фиксировать i_1-й сомножитель $e_{i_1} \in \mathcal{B}$ и сделать переменным i_2-й сомножитель множества $E = e_1 \times e_2 \times \ldots \times e_m$, то снова получим алгебру, изоморфную алгебре $\mathcal{A}$. Покажем, что функция ψ_m аддитивна на этой алгебре, а поскольку функция φ_m непрерывна, то функция ψ_m будет и σ-аддитивной.

Чтобы показать аддитивность функции ψ_m по аргументу с номером i_2, выберем произвольные множества $e_{i_1} \in \mathcal{B}$ и $\varepsilon > 0$. Пользуясь регулярностью меры $\psi_m(\ldots, Q, \ldots, Q, \ldots)$, найдём открытое множество $G \in \mathcal{B}$ и замкнутое множество $F \in \mathcal{B}$ такие, что $G \supset e_{i_1} \supset F$ и $\psi_m(Q, \ldots, Q, G \setminus F, Q, \ldots, Q) < \varepsilon$.

Найдется такое $e_i' \in \mathcal{A}$, что $G \supset e_{i_1}' \supset F$, а значит,

$$\psi_m(Q, \ldots, Q, e_i \Delta e_i', Q, \ldots, Q) < \varepsilon.$$

Оценим теперь разность

$$\psi(e_1, \ldots, e_{i_2}' \cup e_{i_2}'', \ldots, e_m) - \psi(e_1, \ldots, e_{i_2}', \ldots, e_m) - \psi(e_1, \ldots, e_{i_2}'', \ldots, e_m), \quad (10)$$

где $e_{i_2}', e_{i_2}'' \in \mathcal{A}$, $e_{i_2}' \cap e_{i_2}'' = \Phi$. Имеем

$$\left| \psi(e_1, \ldots, e_{i_2} \cup e_{i_2}'', \ldots, e_m) - \psi(e_1, \ldots, e_{i_2}', \ldots, e_m) - \psi(e_1, \ldots, e_i'', \ldots, e_m) \right| \leq$$

$$\leq \left| \psi(\ldots, e_i', \ldots, e_{i_2}' \cup e_{i_2}'', \ldots) - \psi(\ldots, e_i, \ldots, e_{i_2}' \cup e_{i_2}'', \ldots) \right| +$$

$$+ \left| \psi(\ldots, e_i', \ldots, e_{i_2}' \cup e_{i_2}'', \ldots) - \psi(\ldots, e_i', \ldots, e_{i_2}'') - \psi(\ldots, e_{i_1}', \ldots, e_{i_2}'', \ldots) \right| +$$

$$+ \left| \psi(\ldots, e_i', \ldots, e_{i_2}', \ldots) - \psi(\ldots, e_{i_1}, \ldots, e_{i_2}'', \ldots) \right| +$$

$$+ \left| \psi(\ldots, e_{i_1}', \ldots, e_{i_2}', \ldots) - \psi(\ldots, e_{i_1}, \ldots, e_{i_2}'', \ldots) \right| \leq 3\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, выражение (I0) есть тождественный нуль, что и означает аддитивность функции ψ_m. Непрерывность ψ_m требуется проверить только в нуле, т.е. проверить, что из $e_{i_2}^k \to \Phi$ следует $\psi_m(e_1,\ldots,e_{i_1},\ldots,e_{i_2}^k,\ldots,e_m) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Однако для любого набора множеств $(e_1,\ldots,e_{i_2}^k,\ldots,e_m)$ имеет место оценка $\psi(e_1,\ldots,e_{i_2}^k,\ldots,e_m) \le \psi(Q,\ldots,Q,e_{i_2}^k,Q,\ldots,Q)$, а из непрерывности φ_m следует, что $\psi(Q,\ldots,Q,e_{i_2}^k,Q,\ldots,Q) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Поэтому функцию ψ_m можно единственным образом распространить на σ-алгебру, изоморфную σ-алгебре $\mathcal{B}$. Поступая таким образом, мы через m шагов получим функцию $\psi_m : \mathcal{B}^m \quad R_+$ такую, что

$$\psi_m(e,e,\ldots,e) = \varphi_m(e)$$

для всех $e \in \mathcal{A}$ и σ-аддитивную по каждому аргументу. Последнее утверждение проверяется так же, как и σ-аддитивность функции ψ_m по i_2-му аргументу после её распространения по i_1-му аргументу. Диагональное сечение функции ψ_m является непрерывным распространением функции φ_m на σ-алгебру $\mathcal{B}$. Согласно лемме I такое распространение единственно.

5. ЛЕММА 3. Надмеру $\varphi \in C(\mathcal{A})$, удовлетворяющую условию P_n, можно представить в виде суммы чистых m-степеней:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства нам достаточно показать, что функции φ_m, $m=1,2,\ldots,n$, получаемые в п. 3, непрерывны. Докажем, что непрерывны функции $\bar{\varphi}_m$, $m=1,\ldots,n$, где $\bar{\varphi}_m = \sum_{\ell=1}^{m} \varphi_\ell$. Для этого достаточно проверить выполнение предельного перехода для случая монотонных последовательностей. Пусть имеется последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ множеств $e_k \in \mathcal{A}$ таких, что $e_{k+1} \supset e_k$, $k=1,2,\ldots$, и $\bigcup_{k=1}^{\infty} e_k = e \in \mathcal{A}$. Тогда, по определению функции φ_m, $m=1,\ldots,n$, имеем

$$\left|\bar{\varphi}_m(e)-\bar{\varphi}_m(e)\right| = \left|\sum_{l=1}^{m} \lim \sum_{\alpha\in A_k^l(e)} \chi^l(\alpha_1,\ldots,\alpha_l) -\right.$$
$$\left.-\sum_{l=1}^{m} \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\alpha\in A_\nu^l(e_k)} \chi^l(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)\right| \le$$
$$\le \left|\sum_{l=1} \lim \sum_{\alpha\in A_k^l(e)} \chi^l(\alpha_1,\ldots,\alpha_l) - \sum_{l=1}^{n} \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\alpha\in A_\nu^l(e_k)} \chi^l(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)\right| =$$
$$= \varphi(e) - \varphi(e_k).$$

Поскольку функция φ непрерывна, отсюда следует, что

$$\bar{\varphi}_m(e)-\bar{\varphi}_m(e_k)\to 0, \quad k\to\infty.$$

В случае, если последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ убывающая, проверка производится аналогично. Поскольку функции φ_m, $m=1,\ldots,n$, представимы в виде $\varphi_m=\bar{\varphi}_m-\bar{\varphi}_{m-1}$, их непрерывность следует из непрерывности функций $\bar{\varphi}_m$, $m=1,2,\ldots,n$.

ТЕОРЕМА I. Надмера $\varphi\in C_0(B)$, удовлетворяющая условию P_n, представима в виде диагонального сечения n-кратной аддитивной функции*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь леммой 3, представим надмеру в виде суммы чистых m-степеней. Согласно доказательству в п. 4 для чистых степеней наша теорема верна, и мы можем построить систему функций, аддитивных по каждому аргументу и таких, что $\psi_m(e,\ldots,e)=\varphi_m(e)$, $e\in B$ (можно считать, что функции определены на σ-алгебре B). Для каждой функции $\psi_m: B^m\to R_+$ построим функцию $\tilde{\psi}_m: B^n\to R_+$ следующим образом:

$$\tilde{\psi}_m(e_1,e_2,\ldots,e_n)=\psi_m(e_1,\ldots,e_{m-1},\bigcap_{k=m}^{n} e_k).$$

Очевидно, что при любом $m=1,\ldots,n$ функция $\tilde{\psi}_m$ является σ-аддитивной по каждому аргументу. Функция $\psi=\sum_{m=1}^{n}\tilde{\psi}_m$ тоже σ-аддитивна по каждому аргументу. При этом для любого $e\in B$ имеет место соотношение

---

*) Более сильное утверждение доказано В.А.Васильевым в работе [2], но используемая им техника существенно сложнее.

$$\psi(e,e,\ldots,e) = \sum^{n} \tilde{\psi}_m(e,e,\ldots,e) = \varphi(e),$$

которое нам и нужно. Теорема полностью доказана.

В заключение хочется выразить глубокую благодарность Г.Ш.Рубинштейну за постановку задачи, всестороннюю помощь и поддержку в работе.

Литература

I. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О некоторых классах неаддитивных функций множеств. – В кн.: Оптимизация. Вып. 9(26). Новосибирск, 1973, с. 157-164.

2. ВАСИЛЬЕВ В.А. Об одном представлении полиномиальных мер. – В кн.: Оптимизация. Вып. 14(31). Новосибирск, 1974, с. 103-123.

Поступила в ред.-изд. отд.
15. I. 1976 г.