УДК 512.25:330.115

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С МАТРИЦАМИ РАЗВЕТВЛЕННОЙ БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЫ

В.А.Булавский, Р.А.Звягина

Излагается универсальный подход к использованию блочного строения прямоугольной матрицы A при решении систем линейных уравнений с любой ее квадратной неособенной подматрицей (называемой в дальнейшем базисной), разбитой на клетки с учетом строения исходной матрицы A. Кроме того, указываются способы перестройки клеточного разбиения базисной матрицы в случае замены в ней столбца или строки, а также при ее усечении или окаймлении. Все это позволяет построить новый алгоритм для решения задач линейного программирования, основанный на методе последовательного улучшения [1]. От опубликованного ранее алгоритма 2,3 этот алгоритм отличается выбором хранимой информации и превосходит его полной симметрией относительно типов блочных структур, а также уменьшением вычислительной работы за счет введения новых процедур.

§ 1. Разветвленная блочная структура

Под разветвленным блочным строением матрицы мы понимаем следующее: если в матрице A отрезать горизонтальную или вертикальную полосу, то оставшаяся ее часть распадается на блоки; если в каждом из блоков отрезать горизонтальную или вертикальную полосу, то оставшаяся часть в каждом из блоков

в свою очередь распадается на независимые подблоки и так далее. Глубина такого эшелонированного раскроя матрицы A может быть любой конечной.

При последовательном раскрое матрицы A получится совокупность окончательных и промежуточных блоков, куда мы включим и саму матрицу A. Все эти блоки можно разделить на три группы: блоки, которые не подвергались раскрою и являются окончательными; блоки, которые подвергались горизонтальному раскрою (отрезалась горизонтальная полоса); и блоки, раскроенные вертикально. При этом устанавливается иерархия блоков: старшим является блок A, ему подчинены блоки, полученные при раскрое матрицы A, каждому блоку подчинены подблоки, полученные при его раскрое, и так далее. Эту иерархию можно изобразить в виде ориентированного графа (дерева), если каждый блок отождествить с вершиной графа и связать с ним направленной дугой блоки, полученные при его раскрое.

Дадим формальное определение описанной конструкции. Пусть $A=A[M,N]$ - матрица с множествами $M=\{1,2,\dots,m\}$ номеров строк и $N=\{1,2,\dots,n\}$ номеров столбцов. Пусть, кроме того, задан ориентированный граф с множествами вершин P и дуг Q, являющийся деревом с корнем в вершине τ_0. Ориентация каждой дуги выбрана так, что ее начальная вершина расположена по графу дальше от корня, чем конечная. Для каждой вершины $k\in P$ через $P(k)$ обозначим совокупность начальных вершин тех дуг, для которых вершина k является конечной. Положим $P_{max}=\{k\in P: P(k)=\varnothing\}$. Приняв множество P за множество индексов, выберем семейство пар множеств

$$(M^{\tau},N^{\tau}),\quad \tau\in P, \tag{I.I}$$

где $M^{\tau}\subset M$, $N^{\tau}\subset N$ при всех $\tau\in P$, и положим

$$M_0^k=\bigcup_{\tau\in P(k)} M^{\tau},\quad N_0^k=\bigcup_{\tau\in P(k)} N^{\tau},\quad k\in P. \tag{I.2}$$

Граф (P,Q) с разделением множества $P\setminus P_{max}$ на две части $P_{гор}$ и $P_{вер}$ вместе с семейством (I.I) будем называть разветвленной блочной структурой матрицы $A[M,N]$, если

а) $(M^{\tau_0},N^{\tau_0})=(M,N)$;

б) $M_0^k \subset M^k$, $N_0^k \subset N^k$ при всех $k \in P$;

в) $M^\tau \cap M^\sigma = \emptyset$ и $N^\tau \cap N^\sigma = \emptyset$ при несовпадающих τ и σ из множества $P(k)$;

г) все ненулевые элементы матрицы $A[M_0^k, N^k]$ при $k \in P_{гор}$ или матрицы $A[M^k, N_0^k]$ при $k \in P_{вер}$ сосредоточены в блоках $A[M^\tau, N^\tau]$, $\tau \in P(k)$.

Если положить

$$M_k = M^k \setminus M_0^k,\ k \in P_{гор},\quad N_k = N^k \setminus N_0^k,\ k \in P_{вер}, \qquad (I.3)$$

то описанный выше раскрой матрицы $A[M,N]$ теперь можно осуществить, отрезая от блока $A[M^k, N^k]$ горизонтальную полосу $A[M_k, N^k]$, если $k \in P_{гор}$, и вертикальную полосу $A[M^k, N_k]$, если $k \in P_{вер}$.

Для более удобного описания алгоритма выделим на графе (P, Q) для каждого $k \in P$ подмножество вершин $\tau \in P$, которые можно связать с k направленной цепочкой

$$k = \tau_1 \longleftarrow \tau_2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow \tau_s = \tau\ , \qquad (I.4)$$

содержащей не менее одной дуги, и обозначим это подмножество через P^k (рис. I.I). Для каждого $k \in P_{гор}$ (или $k \in P_{вер}$) назовем зоной горизонтального (или вертикального) окаймления множество $\bar{P}^k$ вершин $\tau \in P^k$, для которых в цепочке (I.4) $\tau_\nu \in P_{гор}$ (или $\tau_\nu \in P_{вер}$) для всех $\nu = 2, 3, \ldots, s-1$.

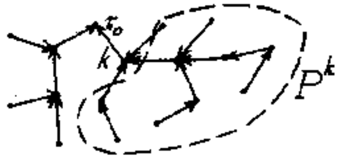

Рис. I.I

§ 2. Разбиение базисной матрицы на клетки

Пусть $A[I, J]$ – квадратная неособенная подматрица матрицы $A[M, N]$, разветвленная блочная структура которой описана в предыдущем параграфе. С каждой вершиной k графа (P, Q) свяжем пару множеств (I^k, J^k) таким образом, что при всех $k \in P$

а) матрица $A[I^k, J^k]$ квадратная и неособенная;

б) $I^\tau \subset I^k \cap M^\tau$, $J^\tau \subset J^k \cap N^\tau$ при $\tau \in P(k)$

в) $I^k \setminus \bigcup_{\tau\in P(k)} I^\tau = I^k \cap M_k$ при $k\in P_{гор}$

и $J^k \setminus \bigcup_{\tau\in P(k)} J^\tau = J^k \cap N_k$ при $k\in P_{вер}$;

г) $I^{\tau_0} = I$, $J^{\tau_0} = J$.

Если теперь положить

$$I_k = I^k \setminus \bigcup_{\tau\in P(k)} I^\tau, \quad J_k = J^k \setminus \bigcup_{\tau\in P(k)} J^\tau, \quad k\in P,$$

то можно проследить, как описанным выделением пар (I^k, J^k) осуществляется последовательное разделение на клетки матрицы $A[I,J] = A[I^{\tau_0}, J^{\tau_0}]$. Сначала в ее блочной части $A[I\setminus I_{\tau_0}, J]$, если $\tau_0\in P_{гор}$, или $A[I, J\setminus J_{\tau_0}]$, если $\tau_0\in P_{вер}$, выделяется квадратная неособенная подматрица, распадающаяся на квадратные неособенные блоки

$$A[I^k, J^k], \quad k\in P(\tau_0), \tag{2.1}$$

причем ранг этой матрицы максимальный, так как,по свойству в), $I_{\tau_0} = I\cap M_{\tau_0}$ при $\tau_0\in P_{гор}$ и $J_{\tau_0} = J\cap N_{\tau_0}$ при $\tau_0\in P_{вер}$. Затем каждый из блоков (2.1) в соответствии с принадлежностью вершины k множеству $P_{гор}$ или $P_{вер}$ разбивается на клетки с выделением в его блочной части квадратной неособенной матрицы максимального ранга и т.д.

Опишем теперь ту информацию, которой мы будем пользоваться при решении систем с матрицей $A[I,J]$. Для каждого $k\in P$ обозначим через $\mathcal{D}_k[J^k, I^k]$ матрицу, обратную к $A[I^k, J^k]$, и будем считать, что хранится лишь ее часть $\mathcal{D}_k[J_k, I_k]$, так что от всех обратных матриц мы сохраним массивы

$$\mathcal{D}_k[J_k, I_k], \quad k\in P. \tag{2.2}$$

Заметим, что $I_k = I^k$ и $J_k = J^k$ для $k\in P_{max}$. Далее, для каждого $k\in P^k$ обозначим через $R_k[J^k, J]$ решение системы

$$A[I^k, J^k]\cdot R_k[J^k, J] = A[I^k, J], \tag{2.3}$$

т.е. коэффициенты разложения столбцов $A[I^k, j]$, $j\in J$, по столбцам матрицы $A[I^k, J^k]$. Чтобы описать хранимую часть матрицы $R_k[J^k, J]$, для каждого $k\in P$ введем множества

J_{1k} следующим образом. Пусть

$$\tau_0 \leftarrow \tau_1 \leftarrow \cdots \leftarrow \tau_{s-1} \leftarrow \tau_s = k \tag{2.4}$$

– цепочка, связывающая вершину k с корнем τ_0 (в силу иерархичности графа (P, Q) эта цепочка определяется однозначно вершиной k). Если $k = \tau_0$ или $\tau_{s-1} \in P_{вер}$, то положим $J_{1k} = \varnothing$. В противном случае найдем наименьший номер ν , при котором $\tau_\sigma \in P_{гор}$ для всех $\sigma = \nu, \nu+1, \ldots, s-1$, и положим

$$J_{1k} = \Big(\bigcup_{\nu \le \sigma \le s-1} J_{\tau_\sigma} \Big) \cap N^k .$$

Хранить мы будем матрицы

$$R_k[J^k, J_{1k}],\ k \in P_{вер} \cup P_{max},\ \ R_k[J_k, J_{1k}],\ k \in P_{гор} . \tag{2.5}$$

Аналогично для каждого $k \in P$ матрицу $T_k[I, I^k]$ определим равенством

$$T_k[I, I^k] \cdot A[I^k, J^k] = A[I, J^k] \tag{2.6}$$

и положим $I_{1k} = \varnothing$, если $k = \tau_0$ или $\tau_{s-1} \in P_{гор}$ в цепочке (2.4). В противном случае найдем наименьший номер μ , при котором $\tau_\sigma \in P_{вер}$ для всех $\sigma = \mu, \mu+1, \ldots, s-1$, и положим

$$I_{1k} = \Big(\bigcup_{\mu \le \sigma \le s-1} I_{\tau_\sigma} \Big) \cap M^k . \tag{2.7}$$

Хранить мы будем матрицы

$$T_k[I_{1k}, I^k],\ k \in P_{гор} \cup P_{max},\ \ T_k[I_{1k}, I_k],\ k \in P_{вер} . \tag{2.8}$$

Отказ от хранения полных матриц $T_k[I_{1k}, I^k]$ при $k \in P_{вер}$ проявится в том, что при решении систем линейных уравнений нам придется для $\tau \in \bar{P}^k \cap P_{вер}$ вычисление столбца

$$\beta_\tau[I_{1\tau}] = T_\tau[I_{1\tau}, I^\tau] \cdot u_k[I^\tau], \tag{2.9}$$

где $u_k[I]$ – некоторый столбец, заменить рекуррентным процессом

$$\beta_\tau[I_{1\tau}] = \bar{\beta}_\tau[I_{1\tau}] + T_\tau[I_{1\tau}, I_\tau] \cdot (u_k[I_\tau] - \bar{\beta}_\tau[I_\tau]), \quad \text{[illegible]} \ (*)$$

где

$$\bar{\beta}_\tau[(I_{1\tau} \cup I_\tau) \cap M^\sigma] = \beta_\sigma[(I_{1\tau} \cup I_\tau) \cap M^\sigma],\ \sigma \in P \text{ [illegible]} \ (*)$$

(*) (символы в оригинале не читаются)

Здесь, согласно определению (2.7), $(I_{1\tau} \cup I_{\tau}) \cap M^{\sigma} = I_{1\sigma}$, поскольку $\tau \in P_{вер}$, $\sigma \in P(\tau)$. При этом вершины $\tau \in \bar{P}^{k} \cap P_{вер}$ следует перебирать в порядке их приближения к вершине k , так как для $\sigma \in \bar{P}^{k} \cap (P_{гор} \cup P_{max})$ столбцы (2.9) можно вычислить непосредственно.

Аналогично отказ от хранения полных матриц $R_k[J^k, J_{1k}]$ при $k \in P_{гор}$ потребует проведения для всех $\tau \in \bar{P}^{k} \cap P_{гор}$ рекуррентного процесса

$$\gamma_{\tau}[J_{1\tau}] = \bar{\gamma}_{\tau}[J_{1\tau}] + (\sigma_k[J_{\tau}] - \bar{\gamma}_{\tau}[J_{\tau}]) \cdot R_{\tau}[J_{\tau}, J_{1\tau}], \quad (2.12)$$

где $\sigma_k[J]$ – некоторая строка, а

$$\bar{\gamma}_{\tau}[(J_{1\tau} \cup J_{\tau}) \cap N^{\sigma}] = \gamma_{\sigma}[(J_{1\tau} \cup J_{\tau}) \cap N^{\sigma}], \quad \sigma \in P(\tau), \quad (2.13)$$

вместо непосредственного вычисления строки

$$\gamma_{\tau}[J_{1\tau}] = \sigma_k[J^{\tau}] \cdot R_{\tau}[J^{\tau}, J_{1\tau}], \quad \tau \in \bar{P}^{k} \cap P_{гор}.$$

Недостающие столбцы и строки матриц $\mathcal{D}_k[J^k, I^k]$ определяются системами уравнений

$$A[I^k, J^k] \cdot \mathcal{D}[J^k, i'] = E[I^k, i'], \quad \mathcal{D}[j'', I^k] \cdot A[I^k, J^k] = E[j'', J^k], \quad (2.14)$$

где $j'' \in J^k$, $i' \in I^k$, а матрицы $E[J, J]$ и $E[I, I]$ единичные. Недостающий столбец $R_k[J^k, j']$ определяется соответствующей системой (2.3), а строка $T_k[i'', I^k]$ – соответствующей системой (2.6).

§ 3. Решение систем линейных уравнений

С целью выявления плана для решения, например, системы

$$A[I, J] \cdot g[J] = u[I] \quad (3.1)$$

относительно столбца $g[J]$ построим для матрицы $A[I, J]$ некоторое мультипликативное представление, учитывающее ее структурное разбиение на клетки.

Обозначим через L_k совокупность вершин $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}$ в цепочке (2.4), а через S_t – множество тех $k \in P$, для которых число вершин в множестве L_k равно t . Пусть ℓ – наибольшее из чисел элементов в множествах L_k, $k \in P_{max}$. Чтобы

в матрице $A[I,J]$ обратить в нуль блочно-диагональные клетки $A[I_k, J^k \setminus J_k]$, $k \in P_{вер}$, и $A[I^k \setminus I_k, J_k]$, $k \in P_{гор}$, умножим ее последовательно при каждом $t = 0,1,\ldots, \ell-1$ слева на матрицу $(\mathcal{T}_t[I,I])^{-1}$, получаемую заменой при всех $\tau \in P(k)$ и $k \in S_t \cap P_{вер}$ нулевых клеток $E[I_k \cap M^\tau, I^\tau]$ единичной матрицы $E[I,I]$ на клетки $-T_\tau[I_k \cap M^\tau, I^\tau]$, а справа на матрицу $(\mathcal{R}_t[J,J])^{-1}$, получаемую заменой при всех $\tau \in P(k)$ и $k \in S_t \cap P_{гор}$ нулевых клеток $E[J^\tau, J_k \cap N^\tau]$ единичной матрицы $E[J,J]$ на клетки $-R_\tau[J^\tau, J_k \cap N^\tau]$. В получившейся матрице $V[I,J]$, очевидно, отличны от нуля лишь клетки

$$V[I^k, J_k],\ k \in P_{вер},\quad V[I_k, J^k],\ k \in P_{гор},\quad V[I^k, J^k],\ k \in P_{max}.$$

Таким образом, матрицу $A[I,J]$ можно представить в виде:

$$A[I,J] = \mathcal{T}_0[I,I] \cdot \mathcal{T}_1[I,I] \cdot \ldots \cdot \mathcal{T}_{\ell-1}[I,I] \cdot V[I,J]$$

$$\mathcal{R}_{\ell-1}[J,J] \cdot \ldots \cdot \mathcal{R}_1[J,J] \cdot \mathcal{R}_0[J,J].$$

Заметим, что матрица $V[I,J]$ блочно-треугольная с точностью до перестановки строк и столбцов, а матрицы $\mathcal{T}_t[I,I]$ и $\mathcal{R}_t[J,J]$ ($0 \le t < \ell$) отличаются от обратных к ним лишь знаками ненулевых элементов вне главной диагонали.

Если теперь представление матрицы $A[I,J]$ подставить в систему (3.1), то ее решение сведется к последовательному решению систем с матрицами

$$\mathcal{T}_t[I,I],\ t = 0,1,\ldots,\ell-1,\quad V[I,J],\quad \mathcal{R}_t[J,J],\ t = \ell-1,\ldots,1,0.$$

Правой частью для каждой следующей системы служит решение предыдущей, а для первой системы – столбец $u[I]$. Нетрудно проверить, что при таком способе решения системы (3.1) сначала для каждого $k \in P_{вер} \cap S_t$, где $t = 0,1,\ldots, \ell-1$, вычисляется столбец $g_k[J_k]$ – часть решения системы

$$A[I^k, J^k] \cdot g_k[J^k] = u_k[I^k], \tag{3.2}$$

правая часть которой определяется по формуле

$$u_k[I] = u[I] - \sum_{z \in L_k \cap P_{вер}} A[I, J_z] \cdot g_z[J_z]. \tag{3.3}$$

Затем при всех $k \in (P_{гор} \cup P_{max}) \cap S_t$, где $t = \ell, \ell-1, \ldots$ $\ldots, 1, 0$, вычисляются столбцы $g_k[J^k]$.

3.1. Посмотрим теперь, как можно получить столбец $g[J] = g_{\tau_0}[J^{\tau_0}]$, используя лишь имеющуюся информацию (2.2), (2.5), (2.8) и рекуррентный процесс (2.10) и (2.11).

3.1.1. Нахождение $g_k[J_k]$ при $k \in P_{вер}$. Пусть уже найдены части $g_\tau[J_\tau]$ столбцов $g_\tau[J^\tau]$ для вершин $\tau \in L_k \cap P_{вер}$ и, следовательно, известен столбец $u_k[I]$. Парами (I_k, J_k) и $(I^k \setminus I_k, J^k \setminus J_k)$ матрица системы (3.2) разбивается на клетки (рис. 3.1), причем неособенная матрица $A[I^k \setminus I_k, J^k \setminus J_k]$ распадается на блоки $A[I^\tau, J^\tau]$, $\tau \in P(k)$. Через решения $\bar{g}_\tau[J^\tau]$ систем

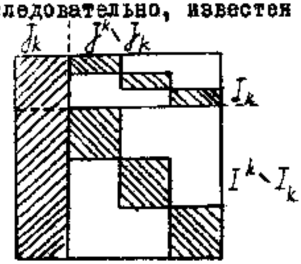

Рис. 3.1.

$$A[I^\tau, J^\tau] \cdot \bar{g}_\tau[J^\tau] = u_k[I^\tau], \ \tau \in P(k), \quad (3.4)$$

столбец $g_k[J_k]$ выражается формулой

$$g_k[J_k] = \mathcal{D}_k[J_k, I_k] \cdot a_k[I_k], \quad (3.5)$$

где

$$a_k[I_k] = u_k[I_k] - \sum_{\tau \in P(k)} A[I_k, J^\tau] \cdot \bar{g}_\tau[J^\tau]. \quad (3.6)$$

Однако, подставив вместо $\bar{g}_\tau[J^\tau]$ его выражение из системы (3.4) и воспользовавшись определением (2.6) матрицы $T_\tau[I_k, I^\tau]$, в которой отлична от нуля разве лишь часть $T_\tau[I_k \cap M^\tau, I^\tau]$, получим

$$a_k[I_k \cap M^\tau] = u_k[I_k \cap M^\tau] - T_\tau[I_k \cap M^\tau, I^\tau] \cdot u_k[I^\tau], \ \tau \in P(k). \quad (3.7)$$

Таким образом, при $\tau \in P(k) \cap (P_{гор} \cup P_{max})$ можно воспользоваться формулами (3.7), а при $\tau \in P(k) \cap P_{вер}$ применить процесс (2.10), (2.11). Полагая затем $a_k[I_k] = \tilde{a}_k[I_k] - \beta_k[I_k]$, по формуле (3.5) можно найти столбец $g_k[J_k]$.

3.1.2. Нахождение $g_k[J^k]$ при $k \in P_{гор}$. Предположим, что известны столбцы

$$g_\tau[J^\tau], \ \tau \in P(k) \cup (\bar{P}^k \cap (P_{вер} \cup P_{max})), \ g_\tau[J_\tau], \ \tau \in (\bar{P}^k \setminus P(k)) \cap P_{гор},$$

Поскольку $k \in P_{гор}$, то при всех $\tau \in \bar{P}^k$, согласно определению (3.3), $u_\tau[I]=u_k[I]$. Поэтому $\bar{g}_\tau[J^\tau]=g_\tau[J^\tau]$ для всех $\tau \in \bar{P}(k)$, и можно по формуле (3.6) вычислить столбец $a_k[I_k]$, а затем по формуле (3.5) – столбец $g_k[J_k]$. При любом $\sigma \in \bar{P}^k$ из представления (3.2) следует

$$A[I^\sigma, J^k]\cdot g_k[J^k]=u_k[I^\sigma],$$

и поскольку в матрице $A[I^\sigma, J^k \setminus J^\sigma]$ может быть отлична от нуля ра…е лишь часть $A[I^\sigma, J_{1\sigma} \cap J^k]$, то, согласно определению (2.4) матрицы $R_\sigma[J^\sigma, J_{1\sigma}]$,

$$g_k[J^\sigma]=g_\sigma[J^\sigma]-R_\sigma[J^\sigma, J_{1\sigma} \cap J^k]\cdot g_k[J_{1\sigma} \cap J^k]. \tag{3.8}$$

Кроме того, объединение семейства множеств

$$J_k;\ J_\sigma,\ \sigma \in \bar{P}^k \cap P_{гор};\quad J^\sigma,\ \sigma \in \bar{P}^k \cap (P_{вер} \cup P_{max}),$$

дает множество J^k, следовательно, для вычисления столбца $g_k[J^k]$ достаточно перебирать вершины $\sigma \in \bar{P}^k$ в порядке их удаления от k и по формуле (3.8) вычислять части $g_k[J_\sigma]$ для $\sigma \in \bar{P}^k \cap P_{гор}$ и полные столбцы $g_k[J^\sigma]$ для $\sigma \in \bar{P}^k \cap (P_{вер} \cup P_{max})$.

3.I.3. В соответствии со сказанным выше решение системы (3.I) следует начать с вычисления частей $g_k[J_k]$ столбцов $g_k[J^k]$, перебирая вершины $k \in P_{вер}$ в порядке их удаления от корня τ_0 с соблюдением условия процедуры 3.I.I. Затем при всех $k \in P_{max}$ можно вычислить столбцы

$$g_k[J^k]=\mathcal{D}_k[J^k, I^k]\cdot u_k[I^k],$$

поскольку $I_k=I^k$, $J_k=J^k$ для всех $k \in P_{max}$. Закончить процесс следует вычислением столбцов $g_k[J^k]$, перебирая вершины $k \in P_{гор}$ в порядке их приближения к корню τ_0, например так, чтобы каждая вершина $k \in P_{гор}$ следовала за всеми вершинами из множества $P^k \cap P_{гор}$. Условия процедуры 3.I.2 при этом выполняются автоматически, поскольку столбцы $g_\tau[J^\tau]$ уже известны для всех $\tau \in \bar{P}^k \cap P_{вер}$. Действительно, объединение семейства множеств

$$J_\tau;\ J_\sigma,\ \sigma \in \bar{P}^\tau \cap P_{вер};\ J^\sigma,\ \sigma \in \bar{P}^\tau \cap (P_{гор} \cup P_{max}),$$

дает множество J^τ и, кроме того, согласно формулам (3.2) и (3.3) $g_\tau[J^\sigma] = g_\sigma[J^\sigma]$ для всех $\sigma \in \bar P^\tau$.

3.2. Строка $h[I]$ – решение системы

$$h[I]\cdot A[I,J] = v[J] \qquad (3.9)$$

– получается совершенно симметрично по отношению к столбцу $g[J]$ в процедуре 3.I. Обозначим через $h_k[I^k]$ решение системы

$$h_k[I^k]\cdot A[I^k, J^k] = v_k[J^k],$$

где

$$v_k[J] = v[J] - \sum_{\tau \in L_k \cap P_{гор}} h_\tau[I_\tau]\cdot A[I_\tau, J].$$

3.2.I. Нахождение $h_k[I_k]$ при $k \in P_{гор}$ и найденных частях $h_\tau[I_\tau]$ строк $h_\tau[I^\tau]$ для вершин $\tau \in L_k \cap P_{гор}$. Через решения $\bar h_\tau[I^\tau]$ систем

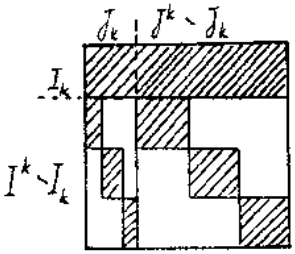

Рис. 3.2

$$\bar h_\tau[I^\tau]\cdot A[I^\tau, J^\tau] = v_k[J^\tau], \quad \tau \in P(k),$$

строка $h_k[I_k]$ выражается формулой

$$h_k[I_k] = b_k[J_k]\cdot \mathcal{D}_k[J_k, I_k], \qquad (3.10)$$

где

$$b_k[J_k] = v_k[J_k] - \sum_{\tau \in P(k)} \bar h_\tau[I^\tau]\cdot A[I^\tau, J_k],$$

или, учитывая блочное строение матрицы $A[I^k \setminus I_k, J_k]$ (рис.3.2),

$$b_k[J_k \cap N^\tau] = v_k[J_k \cap N^\tau] - v_k[J^\tau]\cdot R_\tau[J^\tau, J_k \cap N^\tau], \quad \tau \in P(k). \qquad (3.11)$$

Таким образом, при $\tau \in P(k) \cap (P_{вер} \cup P_{max})$ можно воспользоваться формулами (3.II), а при $\tau \in P(k) \cap P_{гор}$ применить процесс (2.I2), (2.I3). Полагая затем $b_k[J_k] = v_k[J_k] - \gamma_k[J_k]$, по формуле (3.IO) можно найти строку $h_k[I_k]$.

3.2.2. Нахождение $h_k[I^k]$ при $k \in P_{вер}$ и известных строках

$$h_\tau[I^\tau],\ \tau \in P(k) \cup (\bar P^k \cap (P_{гор} \cup P_{max})),\ h_\tau[I_\tau] \quad \in (\bar P^k \setminus P(k)) \cap P_{вер}.$$

Поскольку $k \in P_{вер}$, то $v_\tau[J] = v_k[J]$ при вс $\in \bar P^k$ и.

следовательно, $\bar{h}_\tau[I^\tau] = h_\tau[I^\tau]$ для всех $\tau \in P(k)$. Поэтому можно вычислить строку $h_k[I_k]$ по формуле (3.10), а для вычисления остальных компонент строки $h_k[I^k]$ применить формулу

$$h_k[I^\sigma] = h_\sigma[I^\sigma] - h_k[I_{k\sigma} \cap I^k] \cdot T_\sigma[I_{k\sigma} \cap I^k, I^\sigma], \qquad (3.12)$$

перебирая вершины $\sigma \in \bar{P}^k$ в порядке их удаления от k и вычисляя по формуле (3.12) части $h_k[I_\sigma]$ для $\sigma \in \bar{P}^k \cap P_{вер}$ и полные строки $h_k[I^\sigma]$ для $\sigma \in \bar{P}^k \cap (P_{гор} \cup P_{max})$.

3.2.3. Решение системы (3.9) следует начать с вычисления частей $h_k[I_k]$, перебирая вершины $k \in P_{гор}$ в порядке их удаления от корня τ_0. Затем при всех $k \in P_{max}$ можно вычислить строки

$$h_k[I^k] = v_k[J^k] \cdot \mathcal{D}_k[J^k, I^k].$$

Наконец, используя процедуру 3.2.2, нужно найти строки $h_k[I^k]$, перебирая вершины $k \in P_{вер}$ в порядке их приближения к корню τ_0. При этом мы учитываем, что $h_\tau[I^\sigma] = h_\sigma[I^\sigma]$ при $\tau \in \bar{P}^k \cap P_{гор}$ и $\sigma \in \bar{P}^\tau$.

§ 4. Преобразование структурного разбиения

В связи с изменениями множеств I и J, происходящими на каждом шаге метода последовательного улучшения, нам потребуются некоторые перестройки в парах множеств (I^k, J^k) и (I_k, J_k), $k \in P$. Все преобразования делаются в предположении, что остаются выполненными требования а) и б) второго параграфа, структурное же условие в) может временно нарушаться. Кроме того, мы предполагаем, что недостающие части матриц $\mathcal{D}_k[J^k, I^k]$, $R_k[J^k, J]$ и $T_k[I, I^k]$ в нужный момент восстанавливаются, например, с помощью решения систем типа (2.14) или (2.3), (2.6) для одного столбца или одной строки. Прослеживая общую схему преобразований, мы опускаем вывод формул для пересчета хранимой информации.

4.1. Циклическая перестановка столбцов. Пусть заданы вершины $k_0 \in P_{гор}$ и $k_t \in \bar{P}^{k_0}$, а также номера $j_0 \in J_{k_0}$ и $j'' \in J_{k_t}$ такие, что $R_{k_1}[j'', j_0] \neq 0$, где k_1 – номер в цепочке

$$k_0 \longleftarrow k_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow k_{t-1} \longleftarrow k_t , \qquad (4.1)$$

соединяющей вершину k_t с k_0. Требуется определить последовательность номеров $j_\nu \in J_{k_\nu} \cup \{j_{\nu-1}\}$, $\nu = 1,2,\ldots,t-1$, таким образом, чтобы была допустима циклическая перестановка

$$\begin{pmatrix} j_0 & j_1 & \cdots & j_{t-1} & j'' \\ j'' & j_0 & \cdots & j_{t-2} & j_{t-1} \end{pmatrix}, \qquad (4.2)$$

т.е. чтобы были неособенными матрицы

$$A[I^{k_\nu}, (J^{k_\nu} \cup \{j_{\nu-1}\}) \setminus \{j''\}], \quad \nu = 1,2,\ldots t$$

(матрица $A[I^{k_0}, J^{k_0}]$ не меняется). При $\nu = 1$ эта неособенность является следствием условия $R_{k_1}[j'', j_0] \neq 0$, а для $\nu = 2,3,\ldots, t$ в качестве $j_{\nu-1}$ следует выбирать номер, на котором реализуется максимум

$$max\{|R_{k_\nu}[j'', j]| : j \in (J_{k_{\nu-1}} \cup \{j_{\nu-2}\}) \cap N^{k_\nu}\},$$

отличный, как нетрудно проверить, от нуля. При этом множества J_{k_ν}, $\nu = 0,1,\ldots,t$, в структурном разбиении матрицы $A[I, J]$ и в определении хранимых массивов (2.2) и (2.5) заменяются соответственно множествами

$$\bar{J}_{k_0} = (J_{k_0} \cup \{j''\}) \setminus \{j_0\}; \; \bar{J}_{k_\nu} = (J_{k_\nu} \cup \{j_{\nu-1}\}) \setminus \{j_\nu\}, 1 \le \nu < t; \; \bar{J}_{k_t} = (J_{k_t} \cup \{j_{t-1}\}) \setminus \{j''\},$$

а множества J_{1k_ν}, $\nu = 1,2,\ldots,t$, – соответственно множествами

$$\bar{J}_{1k_\nu} = (J_{1k_\nu} \setminus \{j_{\nu-1}\}) \cup \{j''\}, \quad 1 \le \nu \le t.$$

После циклической перестановки (4.2) лишь в случае $k_t \in P_{вер}$ и $j_{t-1} \notin N_{k_t}$ нарушается структурное требование в) второго параграфа.

4.2. Циклическая перестановка строк. Пусть заданы вершины $k_0 \in P_{вер}$ и $k_t \in \bar{P}^{k_0}$, связанные цепочкой (4.1), а также номера $i' \in I_{k_t}$ и $i_0 \in I_{k_0}$ такие, что $T_{k_1}[i_0, i'] \neq 0$. Требуется определить номера $i_\nu \in I_{k_\nu} \cup \{i_{\nu-1}\}$, $\nu = 1,2,\ldots,t-1$, из условия, что очередной номер i_ν доставляет максимум (отличный от нуля) выражению

$$max\{|T_{k_{\nu+1}}[i, i']| : i \in (I_{k_\nu} \cup \{i_{\nu-1}\}) \cap M^{k_{\nu+1}}\},$$

так что матрицы

$$A\left[(I^{k_\nu}\cup\{i_{\nu-1}\})\setminus\{i'\},\ J^{k_\nu}\right],\quad \nu=1,2,\ldots,t,$$

неособенные. При этом множества I_{1k_ν}, $\nu=1,2,\ldots,t$, и I_{k_ν}, $\nu=0,1,\ldots,t$, заменяются соответственно на множества

$$(I_{1k_\nu}\setminus\{i_{\nu-1}\})\cup\{i'\},\quad \nu=1,2,\ldots,t,$$

$$(I_{k_0}\cup\{i'\})\setminus\{i_0\};\ (I_{k_\nu}\cup\{i_{\nu-1}\})\setminus\{i_\nu\},\ 1\le\nu<t;\ (I_{k_t}\cup\{i_{t-1}\})\setminus\{i'\}.$$

После циклической перестановки $\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & \ldots & i_{t-1} & i' \\ i' & i_0 & \ldots & i_{t-2} & i_{t-1}\end{pmatrix}$ лишь в случае $k_t\in P_{гор}$ и $i_{t-1}\notin M_{k_t}$ нарушается требование в) второго параграфа.

4.3. Исправление структурных нарушений. Возможны два случая.

4.3.1. Случай "чужого" столбца. Пусть для некоторого $k_0\in P_{вер}$ номер $j'\in J_{k_0}$ не принадлежит N_{k_0}. Нас интересуют лишь случаи, когда либо $k_0=\tau_0$, либо $k_0\in P(k)$ при некотором $k\in P_{гор}$ (см. конец процедуры 4.1), так что $I_{1\tau}\subset I^{k_0}$ при всех $\tau\in\bar P^{k_0 гор}$. Поскольку, согласно условию б) второго параграфа, $j'\in N^{k_0}$, то найдется вершина $\bar\tau\in P^{k_0}\cap(P_{вер}\cup P_{max})$, при которой $j'\in N_{\bar\tau}$. Так как $\bar\tau\in P^{k_0}$, то существует цепочка, соединяющая вершину $\bar\tau$ с вершиной k_0. Рассмотрим ту часть

$$k_0\leftarrow k_1\leftarrow\cdots\leftarrow k_t \qquad (4.3)$$

этой цепочки, которая попадает в $\bar P^{k_0}$, т.е. $k_t=\bar\tau$, если $\bar\tau\in\bar P^{k_0}$, и $k_t\in\bar P^{k_0}\cap P_{гор}$, если $\bar\tau\notin\bar P^{k_0}$. Требуется определить последовательность номеров $i_1\in I_{k_0}$, $i_{\nu+1}\in I_{k_\nu}\cup\{i_\nu\}$, $\nu=1,2,\ldots,t-1$, таким образом, чтобы матрицы

$$A\,[I^{k_\nu}\cup\{i_\nu\},\ J^{k_\nu}\cup\{j'\}],\quad \nu=1,2,\ldots,t,$$

являющиеся результатом окаймления неособенных матриц, также оказались неособенными. Для этого, как известно [4], в качестве i_ν, $\nu=1,2,\ldots,t$, достаточно выбирать номер, доставляющий максимум величине

$$max\,\{|\alpha_{k_\nu}[i]|:\ i\in\bar I_{k_{\nu-1}}\cap M^{k_\nu}\}, \qquad (4.4)$$

где $\tilde{I}_{k_0} = I_{k_0}$, $\tilde{I}_{k_{\nu-1}} = I_{k_{\nu-1}} \cup \{i_{\nu-1}\}$, $\nu = 2,3,\ldots,t$, а столбец $\varkappa_{k_\nu}[I_{1k_\nu}]^{\nu-1}$, $1 \le \nu \le t$, определяется по формуле

$$\varkappa_{k_\nu}[I_{1k_\nu}] = A[I_{1k_\nu}, j'] - A[I_{1k_\nu}, J^{k_\nu}] \cdot R_{k_\nu}[J^{k_\nu}, j'] .$$

Величины (4.4) отличны от нуля: при $\nu = 1$ это является следствием неособенности матрицы $A[I^{k_0}, J^{k_0}]$, а при $\nu > 1$ – следствием того, что матрица $A[I^{k_{\nu-1}} \cup \{i_{\nu-1}\}, J^{k_{\nu-1}} \cup \{j'\}]$, полученная ранее окаймлением, является неособенной.

Пары множеств (I_{k_ν}, J_{k_ν}) в определении хранимых массивов (2.2), (2.5) и (2.8) заменяются на $(\bar{I}_{k_\nu}, \bar{J}_{k_\nu})$, $\nu = 0,1,\ldots,t$, где

$$\bar{I}_{k_0} = I_{k_0} \setminus \{i_1\}; \quad \bar{I}_{k_\nu} = (I_{k_\nu} \cup \{i_\nu\}) \setminus \{i_{\nu+1}\}, 1 \le \nu < t; \quad \bar{I}_{k_t} = I_{k_t} \cup \{i_t\};$$

$$\bar{J}_{k_0} = J_{k_0} \setminus \{j'\}; \quad \bar{J}_{k_\nu} = J_{k_\nu}, 1 \le \nu < t; \quad \bar{J}_{k_t} = J_{k_t} \cup \{j'\},$$

а множества I_{1k_ν} в массивах (2.8) – на $I_{1k_\nu} \setminus \{i_\nu\}$, $\nu = 1,2,\ldots,t$.

Особо следует выделить случай $k_t \in P_{гор}$. В связи с расширением множества J_{k_t} расширятся и множества $J_{1\tau_\nu}$, $\nu = 2,3,\ldots,s$, где τ_ν – вершины в цепочке

$$k_t = \tau_1 \leftarrow \tau_2 \leftarrow \cdots \leftarrow \tau_s \leftarrow \tau_{s+1} \leftarrow \cdots \leftarrow \bar{\tau}, \tag{4.5}$$

причем $\tau_s \in \bar{P}^{k_t} \cap (P_{вер} \cup P_{max})$: мы должны положить $\bar{J}_{1\tau_\nu} = J_{1\tau_\nu} \cup \{j'\}$, $2 \le \nu \le s$. Кроме того, при $k_t \in P_{гор}$ индекс $i_t \in \bar{I}_{k_t}$ может не принадлежать множеству M_{k_t} (см. следующую процедуру).

4.3.2. Случай "чужой" строки. Предположим, что для некоторого $k_0 \in P_{гор}$ номер $i'' \in I_{k_0}$ не принадлежит множеству M_{k_0}, при этом либо $k_0 = \tau_0$, либо $k_0 \in P(k)$ при некотором $k \in P_{вер}$. Найдем вершину $\bar{\tau} \in \bar{P}^{k_0} \cap (P_{гор} \cup P_{max})$, при которой $i'' \in M_{\bar{\tau}}$, и выделим часть (4.3) цепочки, идущей из $\bar{\tau}$ в k_0, таким образом, что все ее вершины принадлежат $\bar{P}^{k_0}$. Определим последовательность номеров $j_1, j_2, \ldots, j_t$, на которых реализуются максимумы

$$max\{|\varkappa_{k_\nu}[j]| : j \in \tilde{J}_{k_{\nu-1}} \cap N^{k_\nu}\},$$

где $\tilde{J}_{k_0} = J_{k_0}$, $\tilde{J}_{k_{\nu-1}} = J_{k_{\nu-1}} \cup \{j_{\nu-1}\}$, $\nu = 2,3,\ldots,t$, а строки $\varkappa_{k_\nu}[J_{1k_\nu}]$, $1 \le \nu \le t$, определяются формулой

$$\alpha_{k_\nu}[J_{1k_\nu}] = A[i'', J_{1k_\nu}] - T_{k_\nu}[i'', I^{k_\nu}]\cdot A[I^{k_\nu}, J_{1k_\nu}].$$

Пары множеств (I_{k_ν}, J_{k_ν}) заменяются на $(\bar I_{k_\nu}, \bar J_{k_\nu})$, $\nu=0,1,\ldots,t$, где

$$\bar I_{k_0} = I_{k_0}\setminus\{i''\};\quad \bar I_{k_\nu} = I_{k_\nu},\ 1\le\nu<t;\ \bar I_{k_t} = I_{k_t}\cup\{i''\};$$

$$\bar J_{k_0} = J_{k_0}\setminus\{j_1\};\ \bar J_{k_\nu} = (J_{k_\nu}\cup\{j_\nu\})\setminus\{j_{\nu+1}\},\ 1\le\nu<t;\ \bar J_{k_t} = J_{k_t}\cup\{j_t\}.$$

Кроме того, в массивах (2.5) множества J_{1k_ν} заменяются на $J_{1k_\nu}\setminus\{j_\nu\}$ при $\nu=1,2,\ldots,t$.

Случай $k_t\in P_{вер}$ связан с расширением множеств $I_{1\tau_\nu}$, $\nu=2,3,\ldots,s$, для вершин τ_ν из цепочки (4.5): $\bar I_{1\tau_\nu} = I_{1\tau_\nu}\cup\{i''\}$. Кроме того, при $k_t\in P_{вер}$ индекс $j_t\in\bar J_{k_t}$ может не принадлежать множеству N_{k_t}, что соответствует случаю 4.3.1.

4.4. Операция усечения. Пусть задана вершина $k_0\in P\setminus P_{max}$ такая, что либо $k_0=\tau_0$, либо в цепочке $\tau_0\leftarrow\cdots\leftarrow k_{-1}\leftarrow k_0$ вершины k_0 и k_{-1} не попадают одновременно в множество $P_{гор}$ или $P_{вер}$. Кроме того, выбраны вершина $k_t\in\bar P^{k_0}\cup\{k_0\}$ и номера $j''\in\bar J_{k_t}$ и $i'\in I_{k_t}$ такие, что

$$\mathcal{D}_{k_\nu}[j'', i']\ne 0,\quad \nu=t,t-1,\ldots,0, \tag{4.6}$$

где k_ν - номера цепочки

$$k_0\leftarrow k_1\leftarrow\cdots\leftarrow k_{t-1}\leftarrow k_t.$$

Следствием условия (4.6) является неособенность матриц

$$A[I^{k_\nu}\setminus\{i'\}, J^{k_\nu}\setminus\{j''\}],\quad \nu=t,t-1,\ldots,0,$$

получаемых в результате усечения неособенных матриц $A[I^{k_\nu}, J^{k_\nu}]$ по i'-й строке и j''-му столбцу. Множества I_{k_t} и J_{k_t} заменяются соответственно на $I_{k_t}\setminus\{i'\}$ и $J_{k_t}\setminus\{j''\}$. В дальнейшем эта операция используется либо в условиях $k_0=k_t=\tau_0$, либо является начальным этапом двух процедур, описываемых ниже. Поэтому здесь мы не останавливаемся на том, где оседают номера i' и j''.

4.5. Прогонка столбца через зону вертикального окаймления. Пусть задана вершина $k\in P_{вер}$ такая, что либо $k=\tau_0$, либо $k\in P(\tau)$ при некотором $\tau\in P_{гор}$, и задан номер $j''\in J^k\setminus\bar J_k$, который нужно переместить в множество $\bar J_k$.

Предположим сначала, что $j'' \in J_{k_o}$ и $k_o \in \bar{P}^k \cap (P_{вер} \cup P_{max})$. Для вершин цепочки

$$k = k_t \leftarrow k_{t-1} \leftarrow \cdots \leftarrow k_1 \leftarrow k_o \qquad (4.7)$$

мы определим последовательность номеров $i_o \in I_{k_o}$, $i_\nu \in I_{k_\nu} \cup \{i_{\nu-1}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, t-1$, таким образом, чтобы матрицы

$$A[I^{k_\nu} \setminus \{i_\nu\},\ J^{k_\nu} \setminus \{j''\}], \quad \nu = 0, 1, \ldots, t-1,$$

были неособенными. Для этого достаточно выбирать в качестве i_ν номер, на котором реализуется максимум (отличный от нуля)

$$max\{|\mathcal{D}_{k_\nu}[j'', i]| : i \in \tilde{I}_{k_\nu}\},$$

где $\tilde{I}_{k_o} = I_{k_o}$, $\tilde{I}_{k_\nu} = I_{k_\nu} \cup \{i_{\nu-1}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, t-1$. При этом мы положим

$$\bar{I}_{k_o} = I_{k_o} \setminus \{i_o\};\ \bar{I}_{k_\nu} = (I_{k_\nu} \cup \{i_{\nu-1}\}) \setminus \{i_\nu\},\ 1 \le \nu < t;\ \bar{I}_{k_t} = I_{k_t} \cup \{i_{t-1}\};$$

$$\bar{J}_{k_o} = J_{k_o} \setminus \{j''\};\ \bar{J}_{k_\nu} = J_{k_\nu};\ 1 \le \nu < t;\ \bar{J}_{k_t} = J_{k_t} \cup \{j''\}.$$

Если же $j'' \in J^{k_o}$ и $k_o \in \bar{P}^k \cap P_{гор}$, то дополнительно предположим, что заданы номер i_o и вершина $z \in \bar{P}^{k_o} \cup \{k_o\}$ такая, что $i_o \in I_z$ и $j'' \in J_z$, а также что для $k_t = z$, $i' = i_o$ и имеющихся номеров j'' и k_o можно выполнить операцию усечения (т.е. выполнены условия (4.6)). После усечения к основной процедуре можно приступить, минуя выбор номера i_o.

4.6. Прогонка строки через зону горизонтального окаймления. Пусть задана вершина $k \in P_{гор}$, причем либо $k = z_o$, либо $k \in P(z)$ при некотором $z \in P_{вер}$, и задан номер $i' \in I^k \setminus I_k$, который требуется переместить в множество I_k.

Предположим, что $i' \in I_{k_o}$ и $k_o \in \bar{P}^k \cap (P_{гор} \cup P_{max})$. Для вершин цепочки (4.7) мы определим последовательно номера $j_o \in J_{k_o}$, $j_\nu \in J_{k_\nu} \cup \{j_{\nu-1}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, t-1$, таким образом, чтобы матрицы

$$A[I^{k_\nu} \setminus \{i'\},\ J^{k_\nu} \setminus \{j_\nu\}], \quad \nu = 0, 1, \ldots, t-1,$$

были неособенными. Выбор очередного номера j_ν осуществляется из условия

$$|\mathcal{D}_{k_\nu}[j_\nu, i']| = max\{|\mathcal{D}_{k_\nu}[j, i']| : j \in \tilde{J}_{k_\nu}\},$$

где $\tilde{J}_{k_0}=J_{k_0}$, $\tilde{J}_{k_\nu}=J_{k_\nu}\cup\{j_{\nu-1}\}$, $\nu=1,2,\ldots,t-1$. При этом мы положим

$$\bar{I}_{k_0}=I_{k_0}\setminus\{i'\};\quad \bar{I}_{k_\nu}=I_{k_\nu},\quad 1\le\nu<t;\quad \bar{I}_{k_t}=I_{k_t}\cup\{i'\};$$

$$\bar{J}_{k_0}=J_{k_0}\setminus\{j_0\};\ \bar{J}_{k_\nu}=(J_{k_\nu}\cup\{j_{\nu-1}\})\setminus\{j_\nu\},\quad 1\le\nu<t;\ \bar{J}_{k_t}=J_{k_t}\cup\{j_{t-1}\}.$$

Если же $i'\in I^{k_0}$ и $k_0\in\bar{P}^k\cap P_{вер}$, то дополнительно предполагается, что заданы номер j_0 и вершина $z\in\bar{P}^{k_0}\cup\{k_0\}$ такая, что $j_0\in J_z$ и $i'\in I_z$. Номера j_0 и z должны быть выбраны так, что для $k_t=z$, $j''=j_0$ и имеющихся номеров i' и k_0 допустима операция усечения. К основной процедуре можно приступить, минуя выбор номера j_0.

§ 5. Изменение базисной пары множеств

В этом параграфе мы проследим, как с помощью процедур 4.1 – 4.6 можно осуществить следующие преобразования матрицы $A[I,J]$: замену столбца или строки, окаймление одной строкой и одним столбцом или усечение по одной строке и одному столбцу. Рассмотрим сначала для каждого из этих преобразований наиболее благоприятные ситуации, а затем покажем, что и все остальные можно свести к таковым.

5.1. Замена столбца. В базисной паре (I,J) множество J заменяется на $\bar{J}=(J\setminus\{j''\})\cup\{j'\}$, причем $j''\in J_{\bar{z}}$, где либо $\bar{z}=\tau_0$, либо $\tau_0\in P_{гор}$ и $\bar{z}\in\bar{P}^{\tau_0}$. Расширим граф (P,Q), добавив фиктивную вершину $\bar{\tau}_0$ и связав с ней дугой $\bar{\tau}_0\leftarrow\tau_0$ корень τ_0. Вершину $\bar{\tau}_0$ отнесем к множеству $P_{гор}$, так что $\bar{z}\in\bar{P}^{\bar{\tau}_0}$, и положим $M_{\bar{\tau}_0}=N_{\bar{\tau}_0}=\varnothing$. Базисную матрицу $A[I,J]$ окаймим по схеме

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline A[I,j'] & A[I,J] \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\,0 \\ \}\,I \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{j'} & \underbrace{\qquad\qquad}_{J} \end{array} & \end{array},$$

положив $I_{\bar{\tau}_0}=\{0\}$, $J_{\bar{\tau}_0}=\{j'\}$ и $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0}[j',0]=1$. Поскольку $R_{\tau_0}[j'',j']\neq 0$, что является условием неособенности матрицы $A[I,\bar{J}]$, то можно применить процедуру 4.1 циклической пере-

становки столбцов, положив в ней $k_o=\bar{\tau}_o$, $k_t=\bar{\tau}$, $j_o=j'$. Отбросив фиктивную вершину $\bar{\tau}_o$, следует произвести исправление структурного нарушения, которое может возникнуть лишь в случае $\bar{\tau}\in P_{вер}$ и $j_{t-1}\notin N_{\bar{\tau}}$.

5.2. Замена строки. В базисной паре (I,J) множество I заменяется на $\bar{I}=(I\setminus\{i'\})\cup\{i''\}$, причем $i'\in I_\tau$, где либо $\tau=\tau_o$, либо $\tau_o\in P_{вер}$ и $\tau\in\bar{P}^{\tau_o}$. Введя фиктивную вершину $\bar{\tau}_o$ $(\bar{\tau}_o\longleftarrow\tau_o)$ и отнеся ее к $P_{вер}$, так что $\tau\in\bar{P}^{\bar{\tau}_o}$, окаймим базисную матрицу по схеме

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} 1 & A[i'',J] \\ \hline 0 & A[I,J] \end{array}\right]\begin{array}{l} \}\, i'' \\ \}\, I \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{0} & \underbrace{\qquad\qquad}_{J} \end{array} \end{array}$$

и положим $I_{\bar{\tau}_o}=\{i''\}$, $J_{\bar{\tau}_o}=\{0\}$, $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_o}[0,i'']=1$. Поскольку неравенство $T_{\tau_o}[i',i'']\neq 0$ является условием неособенности матрицы $A[\bar{I},J]$, то можно применить процедуру 4.2 циклической перестановки строк, положив в ней $k_o=\bar{\tau}_o$, $k_t=\tau$ и $i_o=i''$. Затем, отбросив вершину $\bar{\tau}_o$, сделаем исправление структурного нарушения, которое может появиться лишь в случае $\tau\in P_{гор}$ и $i_{t-1}\notin M_\tau$.

5.3. Усечение матрицы. Базисная пара (I,J) заменяется на $(\bar{I},\bar{J})$, где $\bar{I}=I\setminus\{i'\}$, $\bar{J}=J\setminus\{j''\}$. Рассмотрим два благоприятных случая.

а) $\tau_o\in P_{гор}$, причем $i'\in I_{\tau_o}$, $j''\in J_{\bar{\tau}}$ и $\bar{\tau}\in\bar{P}^{\tau_o}\cup\{\tau_o\}$, кроме того, $\mathcal{D}_{\tau_o}[j'',i']\neq 0$, что является условием неособенности матрицы $A[\bar{I},\bar{J}]$. Если $\bar{\tau}=\tau_o$, то можно сразу же применить операцию усечения, положив $k_o=k_t=\tau_o$. Если же $\bar{\tau}\in\bar{P}^{\tau_o}$, то предварительно применим циклическую перестановку столбцов, положив $k_o=\tau_o$, $k_t=\bar{\tau}$ и выбрав в качестве j_o номер, на котором реализуется максимум

$$max\{|R_{\tau_1}[j'',j]|: j\in J_{\tau_o}\},$$

где τ_1 – элемент в цепочке

$$\tau_o\longleftarrow\tau_1\longleftarrow\dots\longleftarrow\tau_{s-1}\longleftarrow\tau_s \qquad (5.1)$$

при $\tau_s=\bar{\tau}$. Теперь можно выполнить операцию усечения при $k_o=k_t=\tau_o$, а затем, если нужно, исправить структурные нарушения.

б) $\tau_0 \in P_{вер}$, причем $j'' \in J_{\tau_0}$, $i' \in I_z$ и $z \in \bar{P}^{\tau_0} \cup \{\tau_0\}$, кроме того, $\mathcal{D}_{\tau_0}[j'', i'] \neq 0$. Если $z = \tau_0$, то сразу применим операцию усечения при $k_o = k_b = \tau_0$. Если же $z \in \bar{P}^{\tau_0}$, то сделаем циклическую перестановку строк, положив $k_o = \tau_0$, $k_b = z$ и выбрав в качестве i_0 номер, на котором реализуется максимум

$$max\{|T_{\tau_1}[i, i']| : i \in I_{\tau_0}\},$$

где τ_1 – элемент в цепочке (5.I) при $\tau_s = z$.

5.4. Окаймление матрицы. В этом случае $\bar{I} = I \cup \{i''\}$, $\bar{J} = J \cup \{j'\}$. Введя фиктивную вершину $\bar{\tau}_0$ и отнеся ее к $P_{гор}$, если $\tau_0 \in P_{гор}$, или к $P_{вер}$, если $\tau_0 \in P_{вер}$, положим $M_{\bar{\tau}_0} = N_{\bar{\tau}_0} = \phi$ и окаймим матрицу $A[I, J]$ по схеме

$$\left[\begin{array}{c|c} A[i'', j'] & A[i'', J] \\ \hline A[I, j'] & A[I, J] \end{array}\right].$$

При этом мы примем $I_{\bar{\tau}_0} = \{i''\}$, $J_{\bar{\tau}_0} = \{j'\}$ и $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0}[j', i''] = 1/\alpha$. Здесь число $\alpha = A[i'', j'] - A[i'', J] \cdot R_{\tau_0}[J, j']$ отлично от нуля, что является условием неособенности матрицы $A[\bar{I}, \bar{J}]$. Теперь достаточно применить операцию исправления структурных нарушений, положив для нее $k_o = \bar{\tau}_0$. После этого фиктивную вершину можно отбросить.

5.5. Займемся теперь исследованием неблагоприятных ситуаций.

5.5.I. Предположим, что $i' \in I_{\tau_s}$ и в цепочке (5.I) левее вершины τ_s имеются вершины из множества $P_{гор}$.

Стандартный шаг. Пусть либо $\tau_s \in P_{вер}$, либо $\tau_{s-1} \in P_{вер}$ при $\tau_s \in P_{гор} \cup P_{max}$. Определим в цепочке (5.I) самую левую вершину τ_ρ, при которой в частичной цепочке

$$\tau_\rho \leftarrow \tau_{\rho+1} \leftarrow \cdots \leftarrow \tau_{s-1} \leftarrow \tau_s \qquad (5.2)$$

вершины $\tau_\rho, \tau_{\rho+1}, \ldots, \tau_{s-1}$ принадлежат множеству $P_{вер}$. Требуется определить такую вершину τ_ν, $\rho \le \nu \le s$, чтобы после циклической перестановки строк (при $\nu \ne s$) в условиях $k_o = \tau_\nu$ и $k_b = \tau_s$ была затем выполнима операция усечения при $k_o = \tau_\rho$ и $k_b = \tau_\nu$, т.е. должен существовать номер $j'' \in J_{\tau_\nu}$, при котором $\mathcal{D}_{\tau_\mu}[j'', i'] \neq 0$ для всех $\mu = \nu, \nu-1, \ldots, \rho$.

На обеспечение этого условия и нацелена описываемая ниже процедура выбора номера ν : мы построим последовательность номеров j_μ , $\mu = s, s-1, \dots, p$, на которых реализуются максимумы

$$max\{|\mathcal{D}_{\tau_\mu}[j,i']|: j\in \tilde{J}_{\tau_\mu}\},$$

где $\tilde{J}_{\tau_s} = J_{\tau_s}$, $\tilde{J}_{\tau_\mu} = J_{\tau_\mu} \cup \{j_{\mu+1}\}$, $\mu = s-1, s-2, \dots, p$, и в качестве ν выберем номер, для которого $j_0 \in J_{\tau_\nu}$, так что $j_p = j_{p+1} = \dots = j_\nu$, но $j_\nu \neq j_{\nu+1}$ (при $\nu \neq s$).

Теперь можно реализовать намеченный план. Если $\nu \neq s$, то применим операцию циклической перестановки строк, положив $k_t = \tau_s$, $k_0 = \tau_\nu$ и в качестве i_0 выбрав номер, на котором реализуется максимум

$$max\{|T_{\tau_{\nu+1}}[i,i']|: i\in I_{\tau_\nu} \cap M^{\tau_{\nu+1}}\}.$$

После этого применим процедуру 4.6 прогонки строки через зону горизонтального окаймления (для случая $k_0 \in P_{вер}$), положив $k_0 = \tau_p$, $j_0 = j_\nu$, а в качестве k_t выбрав в цепочке (5.I) самую левую вершину τ_q , при которой частичная цепочка

$$\tau_q \longleftarrow \tau_{q+1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \tau_{p-1} \tag{5.3}$$

содержит вершины только из множества $P_{гор}$. Если $\nu = s$, то прогонка осуществляется сразу, минуя циклическую перестановку строк.

К концу стандартного шага, продвинувшись по цепочке (5.I), мы окажемся либо в тех же условиях, в каких были перед его началом (и тогда этот шаг нужно повторить), либо в благоприятных условиях после устранения структурного нарушения (случай "чужой" строки при $k_0 = \tau_s$), которое может возникнуть разве лишь при $\tau_s \in P_{гор}$.

Нестандартный шаг. Пусть $i' \in I_{\tau_s}$, $\tau_s \in P_{гор} \cup P_{max}$ и $\tau_{s-1} \in P_{гор}$. В цепочке (5.I) найдем самую левую вершину τ_q , для которой частичная цепочка

$$\tau_q \longleftarrow \tau_{q+1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \tau_{s-1} \tag{5.4}$$

содержит вершины только из $P_{гор}$. После прогонки строки через зону горизонтального окаймления при $k_0 = \tau_s$ и $k_t = \tau_q$ мы окажемся либо в условиях начала стандартного шага, либо в благоприятных.

5.5.2. Ситуации для номера j'' совершенно симметричны рассмотренным. Пусть $j'' \in J_{\tau_s}$ и в цепочке (5.I) левее вершины τ_s имеются вершины из множества $P_{вер}$.

Стандартный шаг осуществляется в следующих ситуациях: либо $\tau_s \in P_{гор}$, либо $\tau_{s-1} \in P_{гор}$ при $\tau_s \in P_{вер} \cup P_{max}$. Определим в цепочке (5.I) самую левую вершину τ_ρ, при которой в частичной цепочке (5.2) вершины τ_ρ, $\tau_{\rho+1}, \ldots, \tau_{s-1}$ принадлежат множеству $P_{гор}$. Построим последовательность номеров $i_\mu \in \tilde{I}_{\tau_\mu}$, $\mu = s, s-1, \ldots, \rho$, где $\tilde{I}_{\tau_s} = I_{\tau_s}$, $\tilde{I}_{\tau_\mu} = I_{\tau_\mu} \cup \{i_{\mu+1}\}$, $\mu = s-1, s-2, \ldots, \rho$, выбирая в качестве i_μ номер, на котором реализуется максимум

$$max\{|\varpi_{\tau_\mu}[j'', i]|: i \in \tilde{I}_{\tau_\mu}\}.$$

В качестве ν выберем наибольший номер, для которого $i_\rho \in I_{\tau_\nu}$, т.е. $i_\rho = i_{\rho+1} = \ldots = i_\nu$, но $i_\nu \neq i_{\nu+1}$ (при $\nu \neq s$).

При $\nu \neq s$ применим операцию циклической перестановки столбцов, положив $k_t = \tau_s$, $k_o = \tau_\nu$ и в качестве j_o выбрав номер, на котором реализуется максимум

$$max\{|R_{\tau_{\nu+1}}[j'', j]|: j \in J_{\tau_\nu} \cap N^{\tau_{\nu+1}}\}.$$

Затем применим процедуру 4.5 прогонки столбца через зону вертикального окаймления (для случая $k_o \in P_{гор}$), положив $k_o = \tau_\rho$, $i_o = i_\nu$, а в качестве k_t выбрав в цепочке (5.I) самую левую вершину τ_q, при которой цепочка (5.3) содержит вершины только из множества $P_{вер}$. Нарушение структурных требований возможно разве лишь в случае $\tau_s \in P_{вер}$. Если $\nu = s$, то прогонка производится сразу, без циклической перестановки столбцов.

Нестандартный шаг. Пусть $j'' \in J_{\tau_s}$, $\tau_s \in P_{вер} \cup P_{max}$ и $\tau_{s-1} \in P_{вер}$. В цепочке (5.I) найдем самую левую вершину τ_q, для которой частичная цепочка (5.4) содержит вершины только из $P_{вер}$, и применим операцию прогонки столбца через зону вертикального окаймления.

§ 6. Принцип выбора блочной структуры

В этом параграфе мы дадим способ описания расположения ненулевых элементов в матрице $A[M,N]$ и сформулируем некоторый

признак согласованности с этим расположением заданной блочной структуры.

Предположим, что заданы пары непустых множеств

$$(M_k, N'_k),\ k\in\bar{P}_{гор},\quad (M'_k, N_k),\quad k\in\bar{P}_{вер}, \tag{6.1}$$

удовлетворяющие следующим требованиям:

а) $\bar{P}_{гор}\cap\bar{P}_{вер}=\emptyset$;

б) $M_k\subset M$, $N'_k\subset N$ для всех $k\in\bar{P}_{гор}$; $N_k\subset N$, $M'_k\subset M$ для всех $k\in\bar{P}_{вер}$;

в) $M_k\cap M_\tau=\emptyset$ для различных k и τ из $\bar{P}_{гор}$; $N_k\cap N_\tau=\emptyset$ для различных k и τ из $\bar{P}_{вер}$;

г) все ненулевые элементы матрицы $A[M,N]$ заключены в блоках, вырезаемых парами (6.1).

Элементы τ и σ из множества $P=\bar{P}_{гор}\cup\bar{P}_{вер}$ будем называть зацепленными, если реализуется хотя бы один из следующих случаев:

$$M'_\tau\cap M'_\sigma\neq\emptyset,\quad \tau\in\bar{P}_{вер},\ \sigma\in\bar{P}_{вер}\ (\tau\neq\sigma); \tag{6.2}$$

$$N'_\tau\cap N'_\sigma\neq\emptyset,\quad \tau\in\bar{P}_{гор},\ \sigma\in\bar{P}_{гор}\ (\tau\neq\sigma);$$

$$M_\tau\cap M'_\sigma\neq\emptyset\ \text{ или } N_\sigma\cap N'_\tau\neq\emptyset,\ \tau\in\bar{P}_{гор},\ \sigma\in\bar{P}_{вер}.$$

Рассмотрим некоторый граф (P,Q), являющийся ориентированным деревом с корнем τ_0 и с разделением множества P на $P_{гор}$, $P_{вер}$ и P_{max}. Пусть $P_{гор}\subset\bar{P}_{гор}$ и $P_{вер}\subset\bar{P}_{вер}$. Для каждого $k\in P$ определим множества M^k и N^k рекуррентными соотношениями, начиная с $k\in P_{max}$:

$$M^k=\begin{cases} M_k\cup\left(\bigcup_{\tau\in P(k)} M^\tau\right), & k\in\bar{P}_{гор},\\ \left(M'_k\setminus\left(\bigcup_{\sigma\in L_k\cap P_{гор}} M_\sigma\right)\right)\cup\left(\bigcup_{\tau\in P(k)} M^\tau\right), & k\in\bar{P}_{вер},\end{cases} \tag{6.3}$$

$$N^k=\begin{cases} N_k\cup\left(\bigcup_{\tau\in P(k)} N^\tau\right), & k\in\bar{P}_{вер},\\ \left(N'_k\setminus\left(\bigcup_{\sigma\in L_k\cap P_{вер}} N_\sigma\right)\right)\cup\left(\bigcup_{\tau\in P(k)} N^\tau\right), & k\in\bar{P}_{гор}.\end{cases}$$

ПРИЗНАК СОГЛАСОВАННОСТИ. При заданных парах (6.1) граф (P,Q) вместе с парами (M^k, N^k), $k\in P$, тогда (а в случаях $\bar{P}_{гор}=\emptyset$

или $\bar{P}_{вер} = \varnothing$ и только тогда) **определяет разветвленную блочную структуру матрицы** $A[M,N]$, **когда компоненты любой зацепленной пары** (τ,σ) **в графе** (P,Q) **соединены ориентированной цепочкой.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Особой проверки требуют лишь свойства в) и г) разветвленной блочной структуры, сформулированные в § I. Докажем сначала свойство в), предположив противное: пусть, например, $M^{\tau_1} \cap M^{\tau_2} \neq \varnothing$ для некоторых несовпадающих номеров τ_1 и τ_2 из $P(k)$. В силу определения (6.3) множество M^k содержится в объединении семейства множеств

$$M_\tau,\ \tau \in (P^k \cup \{k\}) \cap \bar{P}_{гор}, \qquad M'_\sigma,\ \sigma \in (P^k \cup \{k\}) \cap \bar{P}_{вер}$$

для любого $k \in P$. Это означает, что найдутся такие номера $\tau \in P^{\tau_1} \cup \{\tau_1\}$ и $\sigma \in P^{\tau_2} \cup \{\tau_2\}$, что либо $M_\tau \cap M'_\sigma \neq \varnothing$ при $\tau \in \bar{P}_{гор}$ и $\sigma \in \bar{P}_{вер}$, либо $M'_\tau \cap M'_\sigma \neq \varnothing$ при $\tau \in \bar{P}_{вер}$, $\sigma \in \bar{P}_{вер}$: $\sigma \neq \tau$, т.е. пара (τ,σ) оказывается зацепленной, и, следовательно, либо $\tau \in P^\sigma$, либо $\sigma \in P^\tau$. Для определенности примем $\tau \in P^\sigma$. Но тем самым $\tau \in P^{\tau_2}$, поскольку $P^\sigma \subset P^{\tau_2}$. Кроме того, $\tau \in P^{\tau_1} \cup \{\tau_1\}$. Так как τ_1 и τ_2 не лежат на одной цепочке, то из вершины τ выходят по меньшей мере две дуги в сторону корня τ_0, что невозможно.

Проверку свойства г) проведем, например, для $k = \tau_0 \in P_{гор}$. Пусть элемент $A[i,j]$ в матрице $A[M_0^{\tau_0},N]$ отличен от нуля. По свойству г) определения пар (6.I), либо $i \in M'_\tau$, $j \in N_\tau$ при некотором $\tau \in \bar{P}_{вер}$, либо $i \in M_\tau$, $j \in N'_\tau$ при некотором $\tau \in \bar{P}_{гор}$. В первом случае либо $i \in M^\tau$, либо $i \in M_\sigma$ при некотором $\sigma \in P_{гор} \cap L_\tau$, т.е. σ принадлежит цепочке

$$k = \tau_0 \leftarrow \tau_1 \leftarrow \cdots \leftarrow \tau_{s-1} \leftarrow \tau_s = \tau$$

($\sigma \neq \tau_0$, так как иначе элемент $A[i,j]$ находился бы в клетке $A[M_{\tau_0},N]$). Так как $i \in M^\tau$ (или $i \in M_\sigma$), причем $\tau \neq \tau_0$, то $i \in M^{\tau_1}$ и $j \in N^{\tau_1}$, поскольку $M^\tau \subset M^{\tau_1}$ (или $M_\sigma \subset M^\sigma \subset M^{\tau_1}$) и $N_\tau \subset N^\tau \subset N^{\tau_1}$, т.е. элемент $A[i,j]$ находится в клетке $[M^{\tau_1}, N^{\tau_1}]$, $\tau_1 \in P(\tau_{(*)})$ Во втором случае

(*) (символы в оригинале не читаются)

$(i \in M_\tau, j \in N'_\tau)$ аналогично $j \in N^\tau$ или $j \in N_\sigma$ при некотором $\sigma \in P_{вер} \cap L_\tau$. Следовательно, $i \in M^{\tau_1}$ и $j \in N^{\tau_1}$, поскольку здесь также $\tau \neq \tau_0$ и $\sigma \neq \tau_0$. Для случаев $k = \tau_0 \in P_{вер}$ и $k \in P \setminus (P_{max} \cup \{\tau_0\})$ проверка свойства г) блочной структуры аналогична: вместо матрицы $A[M_0^{\tau_0}, N]$ следует взять матрицу $A[M, N_0^{\tau_0}]$ при $k = \tau_0 \in P_{вер}$, а при $k \neq \tau_0$ матрицу $A[M_0^k, N^k]$, если $k \in P_{гор}$, или матрицу $A[M^k, N_0^k]$, если $k \in P_{вер}$.

Необходимость оформулированного признака докажем, например, для случая $\bar{P}_{гор} = \varnothing$. Предположим, что выполняются все свойства разветвленной блочной структуры. Пусть (τ, σ) – зацепленная пара, т.е. выполнено условие (6.2), но τ и σ не лежат на одной цепочке. Тогда $\tau \in P^{z_1} \cup \{z_1\}$ и $\sigma \in P^{z_2} \cup \{z_2\}$ при некоторых несовпадающих номерах z_1 и z_2 из $P(k)$ (и $k \in P \setminus P_{max}$). Из условия (6.2) и определения (6.3) следует, что $M^{z_1} \cap M^{z_2} \neq \varnothing$, а это противоречит свойству в) определения блочной структуры.

Литература

1. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд. АН СССР, 1959, 347 с.
2. ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. О методе решения задач линейного программирования на основе многоступенчатой блочной структуры с окаймлением. - "Докл. АН СССР", 1974, т. 217, № 2, с. 268-271.
3. ЗВЯГИНА Р.А. Многоступенчатая окаймленность в линейном программировании. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1974, № 15(32), с. 32-49.
4. ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.- Л., Физматгиз, 1963, 734 с.

Поступила в ред.-изд. отд.
20. 5. 1976 г.