УДК 512.25/26

МЕТОД ШТРАФОВ И ДОПУСТИМОЕ РЕШЕНИЕ

Л.П.Черканова

Рассмотрим общую задачу выпуклого программирования: найти

$$\min z = F(x), \ x \in R^n, \tag{I}$$

в ограниченной области $Q = \{x \mid \varphi_i(x) \leq 0, \ i = 1, \ldots, m\}$, где $F(x)$, $\varphi_i(x)$ - выпуклые функции, принадлежащие классу $C^1(R^n)$.

Предполагается, что ограничения задачи удовлетворяют условию регулярности Слейтера:
существует $x \in Q$ такое, что

$$\varphi_i(x) < 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Заметим, что решение задачи (I) многими из известных методов требует знания начальной допустимой точки $X^{(0)}$.

Ниже предлагается алгоритм отыскания допустимого решения, основанный на применении метода штрафных функций.

В данном алгоритме используется дифференцируемая функция штрафа

$$\Psi_k(x) = \sum_{i=1}^{m} e^{A_k^i \varphi_i(x)}, \tag{3}$$

где k - номер шага, $A_k^i > 0$, $A_k^i \longrightarrow \infty$ при $k \longrightarrow \infty$.

С учетом (3) условие регулярности Слейтера принимает следующий вид:
существуют x, $A_0 > 0$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} e^{A_0 \varphi_i(x)} < 1. \tag{4}$$

Следовательно, при $m \geq 2$ задача отыскания точки $X^{(0)} \in \Omega$ заменится задачей нахождения допустимой точки для области

$$\Omega' = \{x \mid \sum_{i=1}^{m} e^{A_0 \varphi_i(x)} \leq 1\}. \tag{5}$$

Область Ω', вообще говоря, несколько уже, чем область Ω (в частности, граничные точки Ω не принадлежат Ω'), однако для любого $\delta > 0$ можно указать такое A_0, что

$$\sup_{x \in \Omega} \rho(x, \Omega') \leq \delta .$$

Поскольку теоретически трудно определить подходящее значение A_0, и, кроме того, при больших A_0 усложняется вычислительный процесс, то предлагается от этой задачи перейти к следующей задаче: найти

$$\min \sum_{i=1}^{m} e^{\varphi_i(x) C_i^{k+1}} , \tag{6}$$

где коэффициенты C_i^{k+1} задаются специальным образом (см. ниже) в зависимости от номера шага $k+1$.

Разработанный способ изменения коэффициентов C_i^{k+1} учитывает знак функции φ_i в точках X_{k-1} и X_k, причем для случая $\varphi_i(X_0) \geq 0$, $k=0$ он выражается в соответствующей нормировке ограничений ж):

$$C_1^1 = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \varphi_i(X_0) \leq 2, \\ 2/\varphi_i(X_0), & \text{если } \varphi_i(X_0) > 2, \end{cases}$$

X_0 - начальная точка.

При $k \geq 1$, $\varphi_i(X_{k-1}) \geq 0$ и $\varphi_i(X_k) \geq 0$ полагаем $C_i^{k+1} = C_i^1$.

Совершенно иначе приходится поступать, если $\varphi_i(X_{k-1}) < 0$, так как при этом нужно стремиться сохранить допустимость ограничения и не дать возможности точкам X_k подойти слишком близко к границе, где $\varphi_i(x) = 0$.

ж) Значения $\varphi_i(x_0) > 0$ можно ограничить и другим небольшим числом (из вычислительных соображений).

Поэтому для $\varphi_i(x_{k-1})<0$ полагаем $C_i^{k+1}=C_i^{k+1}(\lambda_k)$, где λ_k - шаг вдоль направления s_k антиградиента функции $\varphi_k(x)=\sum\limits_{\{i:\varphi_i(x_{k-1})\geq 0\}} e^{C_i^k\varphi_i(x)}$, именно, C_i^{k+1} для $k\geq 1$ выбираются так, чтобы

$$e^{C_i^{k+1}\varphi_i(x_{k-1}+\lambda_k s_k)}\leq \mathcal{E}_o, \qquad (7)$$

где $\mathcal{E}_o$ - предел точности вычислений. При этом C_i^1 таково, что

$$e^{C_i^1\varphi_i(x_o)}\leq \mathcal{E}_o .$$

Если при $k\geq 1$ имеем $\varphi_i(x_{k-1})\geq 0$, но $\varphi_i(x_k)<0$, то C_i^{k+1} находятся по формуле (7).

Остановимся более подробно на процедуре отыскания шага λ_k в случае $\varphi_i(x_{k-1})<0$.

Как уже отмечалось, шаг λ_k должен быть выбран так, чтобы нарушение ограничения $\varphi_i(x_{k-1})<0$ резко сказывалось на штрафе $\psi_k(x)$ и чтобы $\psi_k(x_k)<\psi_k(x_{k-1})$.

Итак, процедура нахождения шага состоит из 3 этапов:

I) определяем λ_k^+ из условия, что

$$\varphi_k(x_{k-1}+\lambda_k^+ s_k)=\min_{\lambda}(x_{k-1}+\lambda s_k);$$

2) находим $\lambda_k^-=\min\limits_{\{i:\varphi_i(x_{k-1})<0\}}\lambda_k^i$, т.е. решаем уравнения $\varphi_i(x_{k-1}+\lambda_k s_k)=0$ для тех i, где $\varphi_i(x_{k-1})<0$;

3) выбираем

$$\lambda_k=\begin{cases}\lambda_k^+, \text{ если } \lambda_k^+<\lambda_k^-, \\ q\cdot\lambda_k^-, \ 0<q<1, \text{ если } \lambda_k^+\geq\lambda_k^- .\end{cases}$$

В итоге

$$x_k=x_{k-1}+\lambda_k s_k .$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Определив допустимое решение $\lambda^o=X_n$ за конечное число шагов n (это обуславливается тем, что процесс можно прекратить в случае $\varphi_i(X_k)\leq 0$, $i=1,\dots,m$, не добиваясь экстремального значения в (6)), мы тем самым сможем указать оценку для значения A_o :

$$A_0 > \max_{\{i:\varphi_i(x_n)<0\}} C_i^n .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предлагаемый алгоритм целесообразно применять тогда, когда имеется точка, не удовлетворяющая лишь относительно небольшому количеству ограничений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Приведем задачу (I) к виду

$$\begin{aligned} &\varphi_0(\bar{x}) = F(x) - x^{n+1} \leqslant 0, \\ &\varphi_i(\bar{x}) = \varphi_i(x) \leqslant 0, \qquad i = 1, \dots, m, \\ &x^{n+1} \longrightarrow \min, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\bar{x} = (x, x^{n+1})$.

Учитывая свойство регулярности (4), будем аппроксимировать задачу (8) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{m} e^{\bar{A}_0 \varphi_i(\bar{x})} \leqslant 1, \\ &x^{n+1} \longrightarrow \min, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\bar{A}_0 > 0$ - некоторое заданное число, т.е. мы имеем экстремальную задачу с одним ограничением и целевой линейной функцией.

Отметим, что допустимая область $\bar{\Omega}_1$ в задаче (9) уже, чем допустимая область $\bar{\Omega}$ в задаче (8).

Так как мы все время имеем дело с допустимой областью, то естественно для решения задачи (9) применить один из основных методов выпуклого программирования, в котором процесс идет по допустимой области, - метод возможных направлений Зойтендейка.

В случае одного ограничения он значительно упрощается, и, кроме того, отпадает необходимость в применении специальных приемов ("антизигзагов") для осуществления сходимости к глобальному оптимуму.

Так как сделанные ранее замечания о выборе A_0 могут быть отнесены и к $\bar{A}_0$, то рекомендуется перейти от использования допустимой области $\bar{\Omega}_1$ к использованию областей $\bar{\Omega}_2^{k+1}$, $k > 1$, поскольку на $(k+1)$-м шаге нам понадобится только точка x_k' и некоторая ее окрестность (см. (IO)-(II)).

При описании алгоритма будем исходить из предположения, что область $\bar{\Omega}$ достаточно точно аппроксимирована областью $\bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}$.

Допустим, что на K-м шаге, $K>1$, исходная точка $\bar{x}'_{K-1} \in \bar{\Omega}_1$ и направление движения s_K найдены.

Так как в задаче (9) целевая функция линейная, а область $\bar{\Omega}_1$ задается только I ограничением, то мы должны двигаться до границы $\bar{\Omega}_1$.

Предлагается первоначально найти точку пересечения луча $\bar{x}'_{K-1} + \lambda s_K$, $\lambda > 0$, с областью $\bar{\Omega}$, т.е. точку $\bar{x}_K = \bar{x}'_{K-1} + \lambda_K s_K$, а затем вернуться внутрь области $\bar{\Omega}_1$, взяв точку [*]

$$\bar{x}'_K = \bar{x}'_{K-1} + \lambda_K s_K \cdot \mu, \tag{10}$$

где число $\mu < 1$ выбирается возможно большим, но так, чтобы $\bar{x}'_K \in int\ \bar{\Omega}_1$.

Чтобы определить направление движения на $(K+1)$-м шаге, нужно построить область

$$\bar{\Omega}_2^{K+1} = \{\bar{x} \mid \sum_{i=0}^{m} e^{\bar{C}_i^{K+1} \varphi_i(\bar{x})} \leq 1\}, \tag{11}$$

где коэффициенты $\bar{C}_i^{K+1}$ подбираем, исходя из следующих соображений.

Если $|\varphi_i(\bar{x}'_K)| > \varepsilon$ (ε - параметр метода возможных направлений), то $\bar{C}_i^{K+1}$ находятся из условия $e^{\bar{C}_i^{K+1} \varphi_i(\bar{x}'_K)} \leq \varepsilon_0$, в противном случае из соотношения для граничных точек

$$\sum_{i=1}^{z_K} e^{\bar{C}_i^{K+1} \varphi_i(\bar{x}'_K)} = 1,$$

где z_K - число ограничений, являющихся существенными на данном участке $\bar{\Omega}$.

Предположим, что на каждую функцию $\varphi_i(\bar{x})$, для которой $|\varphi_i(\bar{x}'_K)| < \varepsilon$, приходится одинаковая доля штрафа $\frac{1}{z_K}$; тогда

$$\bar{C}_i^{K+1} = -\frac{\ln z_K}{\varphi_i(\bar{x}'_K)} = \frac{\ln z_K}{|\varphi_i(\bar{x}'_K)|} \tag{12}$$

---

[*] Значение коэффициента μ можно варьировать в зависимости от близости к оптимальному решению

Конечно, такое предположение не гарантирует получения наилучшего (в смысле [I]) направления s_{k+1}, но оно обеспечивает движение в допустимой области Ω_1 и убывание целевой функции в задаче (9).

Итак, в нашем предположении

$$s_{k+1}^{j} = \begin{cases} -\dfrac{\ln z_k}{z_k} \cdot \sum\limits_{i=1}^{z_k} \dfrac{\nabla \varphi_i^{j}(\bar{x}_k')}{|\varphi_i(\bar{x}_k')|}, & \text{если } z_k > 1, \\ -\nabla \varphi_{i_{z_k}}(\bar{x}_k'), & \text{если } z_k = 1, \end{cases} \tag{13}$$

$k \geq 1$, $j = 1, \ldots, n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Чтобы иметь возможность использовать формулы (9)-(I3) при нахождении оптимального решения задачи (I), нужно вначале получить такую допустимую точку, которая была бы внутренней или принадлежала бы только I ограничению в задаче (8).

Если $\bar{x}_0$ - внутренняя точка, то $s_1 = \underbrace{\{0, \ldots, 0, -1\}}_{n+1}$, иначе s_1 считается по формулам (I3) для $z_k = 1$, $\bar{x}_k' = \bar{x}_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если обозначить

$$y(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{m} e^{\bar{c}_i^{k+1} \varphi_i(\bar{x})} - 1 \leq 0, \qquad \nabla y(\bar{x}_k') = u,$$

то в случае I ограничения получим

$$s_{k+1}^{n+1} = \begin{cases} \dfrac{-\sum\limits_{j=1}^{n} u_j^2}{1 - u_{n+1}}, & \text{если } z_k > 1, \\ 0, & \text{если } z_k = 1 \text{ и } |\varphi_0(\bar{x}_k')| < \varepsilon, \\ -1, & \text{если } z_k = 1 \text{ и } |\varphi_0(\bar{x}_k')| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Литература

1. ЗОЙТЕНДЕЙК Г. Методы возможных направлений. М., ИЛ., 1963, 176 с.
2. ЗУХОВИЦКИЙ С.И., АВДЕЕВА Л.И. Линейное и выпуклое программирование. Изд. 2-е, испр. и доп., М., "Наука", 1967, 460 с.

3. КАПЛАН А.А. Характеристические свойства штрафных функций.- -"Докл. АН СССР", 1973, т. 210, № 5, с. 1018-1021.

4. ЛЕВИТИН Е.С., ПОЛЯК Б.Г. Методы минимизации при наличии ограничений. - "Ж. выч. мат. и матем. физ.", 1966, т.6, № 5, с. 787-823.

5. МАЗУРОВ В.Д. Об экспоненциальном методе решения системы выпуклых неравенств. - "Журн. вычислит. математики и мат. физики", 1966, т.6, №2, с. 342-347.

6. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н., ДАНИЛИН Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., "Наука", 1975, 320 с.

7. ФИАККО А., МАК-КОРМИК Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М., "Мир", 1972, 240 с.

8. ХЕДЛИ Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., "Мир", 1967, 506 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
19.05.76 г.