1971 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 2(19)

УДК 51:330.115

ТЕОРЕМА О МАГИСТРАЛИ В ОДНОЙ МОДЕЛИ

А.Ж. Жафяров

В работе указываются необходимые и достаточные условия на начальное состояние[ж)], при которых в моделях типа Моришимы имеет место теорема о магистрали в сильной форме вида Никайдо (см. теоремы 4.3 и 4.4). Кроме того, здесь получено обобщение теоремы о магистрали в сильной форме вида Моришимы в случае, когда функция полезности u является линейной (см. теорему 4.2 и следствие из нее). В работе рассмотрены также вопросы, связанные с условиями, при которых темп роста всей модели совпадает с темпом роста подмодели некоторой суперпозиции этой модели (см. теоремы 2.1 - 2.6). Этот вопрос имеет существенное значение в теоремах о магистрали для более точной характеристики поведения оптимальных траекторий, исходящих из граничных точек конуса R^n_+ (см. теоремы 4.1 и 3.1), где R^n_+ - положительный ортант n-мерного евклидова пространства R^n.

1°. Модель Моришимы Z, приведенная в [7], определяется следующим образом. Предполагается, что модель Z удовлетворяет обычным требованиям, т.е.

T_1) конус Z - замкнутый в R^{2n}_+, пара $(0,y)\bar{\in} Z$ при $y\neq 0$, для любого $x\in R^n_+$ найдется $y\in R^n_+$, такой, что $(x,y)\in Z$; если пара $(x,y)\in Z$ и выполняются соотношения $x'\geqslant x$, $0\leqslant y'\leqslant y$, то $(x',y')\in Z$.

Кроме того, предполагается, что модель Z удовлетворяет следующим дополнительным ограничениям $T_2 - T_5$.

ж) В этой работе принята терминология [2].

T_2) Все n продуктов делятся на m непересекающихся групп, $1,2,\ldots,m$, причем продукты группы*) $i+1$ производятся только из продуктов группы i, $i=1,2,\ldots,m$.

T_3) Сильная супераддитивность имеет место для двух различных процессов с общими продуктами выпуска. Два процесса, которые не имеют общих продуктов выпуска, происходят одновременно так, что ни один из них не влияет на выпуск продукции другим.

Сильная супераддитивность процессов означает, что из двух различных процессов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) можно образовать третий (x_1+x_2, y_3) такой, что $y_3 \geqslant y_1+y_2$, т.е. хотя бы по одной координате имеет место строгое неравенство.

Чтобы сформулировать ограничения T_4 и T_5, введем следующие обозначения. Пусть Γ_i - грань конуса R^n_+, натянутая на орты с такими номерами, с какими продукты входят в группу i, $i=1,2,\ldots,m$. Обозначим через a_i сужение отображения a, графиком которого является конус Z, на грань Γ_i, $i=1,2,\ldots,m$. Пусть $(a^m)_i$ - сужение отображения a^m на грань Γ_i $(a^m = \overbrace{a\circ\ldots\circ a}^{m})$, Z_i - конус, являющийся графиком отображения a_i, $1\leqslant i \leqslant m$. Тогда в этих обозначениях ограничения T_4 и T_5 имеют вид:

T_4) Отображения $(a^m)_i$ примитивны, т.е. для каждого номера i, $1\leqslant i\leqslant m$, и для каждого $x^i_0 \geqslant 0$ найдется кратное m число s, такое, что**) $x^i_s \gg 0$, $x^i_s \in ((a^m)_i)^k (x^i_0)$, где $s = km$.

T_5) Отображение a является неразложимым в каждой точке (x,y), $y\in a(x)$, $x\in R^n_+$.

Отображение a называется неразложимым (см. [7]) в точке (x,y), $y\in a(x)$, $x\in R^n_+$, если множество***) $J(x,y) = \{i \mid \{x\}^i > 0$ или $\{y\}^i > 0\}$ либо пусто, либо содержит по крайней мере одно i такое, что $\{x\}^i > 0$ или $\{y\}^i > 0$. Другими словами, нельзя разделить n продуктов на множества $J(x,y)$ и $\bar{J}(x,y)$ так, что для каждого $i\in J(x,y)$ и $\{x\}^i$,

---

*) Будем считать, что два натуральных числа k и j обозначают номер одной и той же группы тогда и только тогда, когда $j \equiv k (\mathrm{mod}\, m)$.

**) Здесь и в дальнейшем $y \gg x$ означает, что все координаты вектора y строго больше соответствующих координат вектора x.

***)Здесь и в дальнейшем координату вектора x с номером i будем обозначать через $\{x\}^i$.

и $\{y\}^i$ равны нулю, а для каждого $i \in \bar{\mathcal{J}}(x,y)$ и $\{x\}^i$, и $\{y\}^i$ положительны (множество $\bar{\mathcal{J}}(x,y)$ есть дополнение к множеству $\mathcal{J}(x,y)$). Заметим, что это предположение слабее, чем предположение фон Неймана о том, что каждый процесс либо потребляется, либо производится каждым процессом, т.е. если $\{x\}^i = 0$, то $\{y\}^i > 0$, и если $\{y\}^i = 0$, то $\{x\}^i > 0$. Далее отметим, что 1) из предположения T_2 следует, что грани $\Gamma_i, 1 \leq i \leq m$, попарно не пересекаются; 2) из предположения T_3 следует, что конус $Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m$; 3) из предположений T_1 и T_3 следует выпуклость конуса Z; 4) из T_3 и T_4 следует сильная супераддитивность отображений $(a^m)_i$, начиная с некоторого момента времени t_0, т.е. для любых векторов x_1, $x_2 \in \Gamma_i$ найдутся натуральное t_0 и векторы y_1, y_2, y_3 из Γ_i такие, что $y_k \in ((a^m)_i)^{t_0}(x_k)$, $k = 1;2$, $y_3 \in ((a^m)_i)^{t_0}(x_1 + x_2)$ и $y_3 \gg y_1 + y_2$ (см. предположение T_3).

Заметим также, что для примитивности и сильной супераддитивности всех отображений $(a^m)_i$, $i = 1,2,\dots,m$, достаточно, чтобы хотя бы одно из этих отображений обладало указанными свойствами. Действительно, пусть для определенности отображение $(a^m)_1$ является примитивным. Тогда согласно предположениям T_2 и T_4 найдется такой номер t_0, что $x^1_{t_0} \gg 0$, $x^1_{t_0} \in \Gamma_1$. По известной теореме о том, что для суперлинейного отображения a пересечение $a(x) \cap int\, R^n_+ \neq \phi$, если $x \gg 0$, $x^1_{t_0} \in \Gamma_1$, получим, что $a_1(x^1_{t_0}) \cap int\, \Gamma_2 \neq \phi$. Отсюда следует, что найдется $x^2_{t_0+1} \in int\, \Gamma_2$ такой, что $a_2(x^2_{t_0+1}) \cap int\, \Gamma_3 \neq \phi$ и т.д. То есть все отображения $(a^m)_i$, $2 \leq i \leq m$, будут примитивными, начиная с момента t_0. Пусть теперь одно из отображений $(a^m)_i$, $1 \leq i \leq m$, начиная с некоторого момента t_0, обладает свойством сильной супераддитивности. Не нарушая общности, можно предполагать, что таким свойством обладает отображение $(a^m)_1$. Так как $(a^m)_1 = a_m \circ a_{m-1} \circ \dots \circ a_1$, то из нашего предположения следует, что хотя бы одно из отображений a_j, $1 \leq j \leq m$, начиная с момента t_0, обладает свойством сильной супераддитивности. Так как для любого i, $1 \leq i \leq m$, $(a^m)_i = a_{i-1} \circ \dots \circ a_i$ и все отображения a_j, $1 \leq j \leq m$, суперлинейны, то, начиная с момента t_0, все отображения $(a^m)_i$, $2 \leq i \leq m$, будут обладать свойством сильной супераддитивности.

Рассмотрим теперь модель Z, которая является обобщением рассмотренной выше модели. По-прежнему будем предполагать выполненным ограничение T_1. Предположение T_2 заменим более слабым ограничением

T_2') все n продуктов делятся на m не обязательно непересекающихся групп $1;2;\dots;m$, причем продукты группы $i+1$ получаются только из продуктов группы i, $i=1;2;\dots;m$.

Ограничимся следующими двумя примерами, которые подчеркивают, насколько существенны различия между ограничениями T_2 и T_2'.

Например, если грани $\Gamma_i, 1\le i\le m$, попарно не пересекаются, то темпы роста отображения a и сужений отображения a^m на грани $\sum_{j=1}^{k}\Gamma_{i_j}$, $1\le i_j\le m$, как будет показано ниже (см. 2^0), совпадают, что, вообще говоря, не имеет места в случае, когда грани Γ_i пересекаются. Если же грани Γ_i, $1\le i\le m$, попарно не пересекаются, то траектория, являющаяся суммой соответствующих $\hat{f}_i$ - оптимальных подтраекторий (см. 4^0), является оптимальной в смысле функционала $f=\hat{f}_1+\hat{f}_2+\dots+\hat{f}_m$, что тоже может и не иметь места в случае, когда грани Γ_i пересекаются.

Далее, вместо достаточно жестких предположений T_3-T_5 будем требовать только то, чтобы в рассматриваемой нами модели Z имело место равенство

$$T_3')\qquad Z=Z_1+Z_2+\dots+Z_m.$$

Предположение T_3' означает, что процессы, принадлежащие одному и тому же конусу Z_i, $1\le i\le m$, каким-то образом связаны, а процессы, принадлежащие различным конусам, происходят так, что ни один из них не влияет на другой.

Заметим, что в рассматриваемой модели, удовлетворяющей предположениям T_1, T_2', T_3', выпуклость конуса Z следует из предположений T_3' и T_1.

2^0. В этом пункте рассматриваются условия, при которых в модели Z с ограничениями T_1, T_2', T_3' имеет место совпадение*) темпов роста отображения a и сужений отображения a^m на грани $\sum_{j=1}^{k}\Gamma_{i_j}$, $1\le i_j\le m$, $1\le k\le m$. Этот вопрос, в частности, представляет интерес с точки зрения теорем о магистрали по следующей причине. Ниже будет показано (см. 4^0), что

*) Будем говорить, что темпы роста отображений a и $(a^m)_1$ совпадают, если α - темп роста a, число α^m - темп роста $(a^m)_1$.

оптимальные траектории, исходящие из граничных начальных состояний $x_0 \in \Gamma_{i_1} + \Gamma_{i_2} + \ldots + \Gamma_{i_k}$, $1 \le k \le m$, $1 \le i_j \le m$, при определенных условиях идут к более узким неймановским граням, чем неймановская грань всей модели. С другой стороны, известно, что при аналогичных условиях оптимальные траектории, исходящие из начальных состояний $x_0 \in int\, R_+^n$, идут к неймановской грани всей модели. Потому представляет интерес вопрос о том, как связаны между собой эти узкие неймановские грани с неймановской гранью всей модели. Но этот вопрос не имеет смысла, если темпы роста отображения a и соответствующего сужения отображения a^m не совпадают. Заметим, что в рассматриваемой модели темпы роста указанных выше отображений, вообще говоря, не совпадают (см. замечание к теореме 2.2). Применяя результаты [I] для рассматриваемой модели Z, получим, что темпы роста у всех отображений $(a^m)_i$, $1 \le i \le m$, одни и те же. В той же работе [I] показано, что α - темп роста отображения $(a^m)_1$ может и не быть темпом роста отображения a^m. Тогда тем более число $\sqrt[m]{\alpha}$ не обязано быть темпом роста отображения a. В приводимой ниже теореме 2.I указаны необходимые и достаточные условия, при которых некоторые темпы роста отображений a и $(a^m)_1$ совпадают. Предварительно введем следующее определение.

Будем говорить, что число α - согласуемый темп роста отображения a, если для всех равновесных процессов $(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{y} \geqslant \alpha \bar{x}$, имеет место неравенство $p(\bar{x}) > 0$, где $p \in int\, \Pi^\alpha$, $\Pi^\alpha = \{p \in (R_+^n)^*,\ p \in \alpha a'(p)\}$. Ясно, что число α будет согласуемым темпом роста отображения a, если α - темп роста a со строго положительным равновесным вектором цен или если α - темп роста a, такой, что для всех равновесных процессов $(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{y} \geqslant \alpha \bar{x}$, $\bar{x} \gg 0$.

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть α - согласуемый темп роста отображения a. Тогда для того, чтобы число α^m было темпом роста отображения $(a^m)_1$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись векторы $\bar{x}_i \in \Gamma_i$ такие, что для всех i, $1 \le i \le m$, имеет место включение $\alpha \bar{x}_{i+1} \in a_i(\bar{x}_i)$, где $\bar{x}_{m+1} = \bar{x}_1$.

<u>Необходимость</u>. Если число α^m является темпом роста отображения $(a^m)_1$, то из определения темпа роста следует, что

найдется неотрицательный вектор $\bar{x}_1 \in \Gamma_1$ такой, что $\alpha^m \bar{x}_1 \in (a^m)_1(\bar{x}_1)$. Так как $(a^m)_1 = a_m \circ a_{m-1} \circ \ldots \circ a_1$, то в рассматриваемой модели найдутся векторы $\bar{x}_i \in \Gamma_i$, $2 \le i \le m$, такие, что для всех i, $1 \le i \le m-1$, имеет место включение $\bar{x}_{i+1} \in a_i(\bar{x}_i)$, где $\bar{x}_1 = \bar{x}_1$ и, кроме того, $\alpha^m \bar{x}_1 \in a_m(\bar{x}_m)$(в противном случае α^m не будет темпом роста $(a^m)_1$). Положим $\bar{x}_i = \alpha^{1-i}\bar{x}_i$, $1 \le i \le m$. Тогда в новых обозначениях имеем, что $\alpha \bar{x}_{i+1} \in a_i(\bar{x}_i)$, $\bar{x}_i \in \Gamma_i$, $1 \le i \le m$, и $\bar{x}_{m+1} = \bar{x}_1$.

<u>Достаточность</u>. Из условия теоремы $\alpha \bar{x}_1 \in a_m(\bar{x}_m)$, $\alpha \bar{x}_m \in a_{m-1}(\bar{x}_{m-1}), \ldots, \alpha \bar{x}_2 \in a_1(\bar{x}_1)$ следует, что $\alpha^m \bar{x}_1 \in (a^m)_1(\bar{x}_1)$. Далее, пусть вектор $p \in int\, \Pi^{\alpha}$. Покажем, что проекции $\hat{p}_i = P_{r\Gamma_i} p$ вектора p на грани Γ_i обладают тем свойством, что имеет место включение

$$\hat{p}_{i+1} \in \alpha a_i'(\hat{p}_i), \; 1 \le i \le m. \tag{I}$$

Так как вектор $p \in \Pi^{\alpha}$, то неравенство $\alpha p(x) \geqslant p(y)$ верно для любых пар $(x, y) \in Z$. Возьмем произвольную пару $(x_i, y_{i+1}) \in Z_i$, $1 \le i \le m$. Ясно, что пара*) $(x_{(i)}, y_{(i+1)}) \in Z$, а потому справедливо неравенство $\alpha p(x_{(i)}) \geqslant p(y_{(i+1)})$. Отсюда имеем, что $\hat{p}_{i+1} \in \alpha a_i'(\hat{p}_i)$, где $\hat{p}_i = P_{r\Gamma_i} p$, $1 \le i \le m$, $\hat{p}_{m+1} = \hat{p}_1$, т.е. соотношение (I) справедливо. Далее из (I) имеем, что $\hat{p}_1 \in \alpha^m((a^m)_1)'(\hat{p}_1)$, где $((a^m)_1)' = a_m' \circ a_{m-1}' \circ \ldots \circ a_1'$ (здесь использован результат [I] о том, что $(a_1 \circ a_2)' = a_1' \circ a_2'$). Теперь для справедливости того, что α^m - темп роста отображения $(a^m)_1$ остается показать, что $\hat{p}_1(\bar{x}_1) > 0$. Для этого воспользуемся тем, что α - согласуемый темп роста отображения a. Из условия теоремы следует, что

$$\alpha(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_m) \in a_1(\bar{x}_1) + a_2(\bar{x}_2) + \ldots + a_m(\bar{x}_m) \subset a(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_m).$$

Тогда из того, что α - согласуемый темп роста a следует справедливость неравенства $p(\bar{x}) > 0$, где $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_m$. Далее, из (I) и условия теоремы имеем, что произведение $\hat{p}_i(\bar{x}_i)$ является величиной постоянной для любого i, $1 \le i \le m$. Тогда имеем, что $m \cdot \hat{p}_1(\bar{x}_1) = \sum_{i=1}^{m} \hat{p}_i(\bar{x}_i) = p(\bar{x}) > 0$, потому $\hat{p}_1(\bar{x}_1) > 0$, т.е. α^m - темп роста отображения $(a^m)_1$.

---

*) Здесь и в дальнейшем будем считать, что $x_{(i)}$ - n-мерный вектор, равный вектору $(0, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0)$.

В приведенной выше теореме указаны необходимые и достаточные условия совпадения темпов роста отображений a и $(a^m)_1$ в случае, когда α является согласуемым темпом роста a. Если же число α не является таковым, то можно указать только достаточные условия (см. теорему 2.2), при которых темпы роста отображений a и $(a^m)_1$ будут совпадать. Это связано с тем, что существуют модели рассматриваемого типа (см. замечание к теореме 2.2), в которых функционал $p \in int\,\Pi^{\alpha}$ принимает нулевое значение на всех равновесных векторах $\tilde{x}$, где

$$\tilde{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m,\ \alpha\bar{x}_{i+1} \in a_i(\bar{x}_i),\ \bar{x}_{m+1} = \bar{x}_1,\ 1 \le i \le m.$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть α - темп роста отображения a. Тогда α^m - темп роста отображения $(a^m)_1$, если найдутся векторы $\bar{x}_i \in \Gamma_i$, $1 \le i \le m$, и функционал $p \in int\,\Pi^{\alpha}$, такие, что для всех i, $1 \le i \le m$, $\alpha\bar{x}_{i+1} \in a_i(\bar{x}_i)$ и, кроме того, $\beta_1(\bar{x}_1) > 0$ где $\beta_1 = P_{\Gamma_1} p$.

Доказательство проводится с помощью тех же рассуждений, что доказательство достаточности в теореме 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Требование положительности величины $\beta_1(\bar{x}_1)$ или все равно, что $p(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = \bar{x}_1 + \dots \bar{x}_m$) может и не быть необходимым для того, чтобы число α^m являлось темпом роста $(a^m)_1$. Как уже было сказано выше, существуют модели рассматриваемого типа, в которых значение функционала p, $p \in int\,\Pi^{\alpha}$, равно нулю на всех равновесных векторах $\tilde{x}$, таких, что

$$\tilde{x} = \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_m,\ \alpha\bar{x}_{i+1} \in a_i(\bar{x}_i),\ \bar{x}_{m+1} = \bar{x}_1,\ 1 \le i \le m, \quad (2)$$

однако вместе с тем числа α и α^m являются темпами роста соответственно отображений a и $(a^m)_1$. Это, очевидно, может случиться тогда и только тогда, когда найдутся векторы $\tilde{x} \in R^n_+$ и $p_i \in \Gamma_i^*$, $1 \le i \le m$, такие, что а) $p(\tilde{x}) > 0$, но вектор $\tilde{x}$ непредставим в виде (2), б) $p_{i+1} \in \alpha a_i'(p_i)$; $p_{m+1} = p_1$, в) $p_1(\bar{x}_1) > 0$ хотя бы для одного вектора $\bar{x}_1$ из соотношения (2) и для любого $p \in \Pi^{\alpha}$ имеет место $p_1 \ne P_{\Gamma_1} p$. Чтобы убедиться в справедливости здесь сказанного, приведем следующий пример модели Неймана. Пусть модель Z определяется матрицей затрат A и матрицей выпуска B.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этой модели предположения T_1, T_2', T_3' выполнены. Здесь Γ_1 – грань конуса R_+^3, натянутая на орты с номерами 1 и 2, а Γ_2 – грань R_+^3, натянутая на орты с номерами 2 и 3. Состояние равновесия этой модели определяется тройкой $(\alpha,(\bar{x},\bar{y}),p)$, где $\alpha=1$; $\bar{x}=(2,2,3)$; $\bar{y}=(3,2,4)$; $p=(0,1,0)$. Так как $\{y\}^i>\{x\}^i$, где $i=1;3$, то из определения состояния равновесия следует, что $p=(0,1,0)\in int\ \Pi^\alpha$. Обозначим через a отображение, графиком которого является конус Z. Применяя результаты [2] о нахождении темпов роста, получим, что $\alpha=1$ - единственный темп роста отображения a. По известной теореме тройка $(\alpha^2,(\bar{x},\alpha^2\bar{x}),p)$ будет состоянием равновесия в модели, определяемой отображением a^2, где $\alpha=1$; $\bar{x}=(2,2,3)$; $p=(0,1,0)$. Нетрудно убедиться в том, что число $\alpha^2=1$ является неймановским темпом роста a^2. Тогда, применяя только что указанные результаты [2] о нахождении темпов роста моделей, получим, что $\alpha^2=1$ будет единственным темпом роста отображения a^2. Рассмотрим теперь отображение $(a^2)_1$. Число $\beta=1$ является также темпом роста отображения $(a^2)_1$, тройка $(\beta,(\bar{x}_1,\bar{y}_1),p_1)$ является состоянием равновесия в модели, определяемой отображением $(a^2)_1$, где $\beta=1$; $\bar{x}_1=(1,0,0)$; $\bar{y}_1=(1,0,0)$; $p_1=(1,2,0)$, причем равновесный процесс $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$, на котором достигается темп роста $\beta=1$, определяется единственным образом (с точностью до положительного множителя). Вектор $\bar{x}_2\in\Gamma_2$ такой, что $\beta\bar{x}_2\in a_1(\bar{x}_1)$, также определяется единственным образом, причем $\bar{x}_2=(0,0,1)$. Отсюда следует, что вектор $\bar{x}=\bar{x}_1+\bar{x}_2$, о котором говорилось выше, также определяется единственным способом и $\bar{x}=(1,0,1)$. Таким образом, мы получили, что $p=(0,1,0)\in int\ \Pi^\alpha$, вектор $\bar{x}=(1,0,1)$ – единственен, число 1 является темпом роста отображений a и $(a^2)_1$, однако $p(\bar{x})=0$, что и подтверждает сказанное выше. В заключение еще заметим, что число $1/2$ является темпом роста отображения $(a^2)_1$, но не является темпом роста ни отображения a, ни отображения a^2, что тоже подтверждает сказанное в начале этого пункта утверждение о том, что темпы роста отображений a и $(a^2)_1$ могут и не совпадать.

Из сказанного и теорем 2.I и 2.2 следует справедливость следующего утверждения.

Пусть α – произвольный темп роста отображения a. Тогда для того, чтобы число α^m было обобщенным темпом роста отображения (a^m), необходимо и достаточно, чтобы нашлись векторы $\bar{x}_i \in \Gamma_i$, такие, что для всех i, $1 \leq i \leq m$, имеет место включение $\alpha \bar{x}_{i+1} \in a_i(\bar{x}_i)$, где $\bar{x}_{m+1} = \bar{x}_1$.

Выше было отмечено, что одной из причин только достаточности условия существования векторов $\bar{x}_i \in \Gamma_i$ таких, что $\alpha \bar{x}_{i+1} \in a_i(\bar{x}_i)$ и $\hat{p}_1(\bar{x}_1) > 0$, является существование векторов $p_i \in \Gamma_i^*$, таких, что $p_{i+1} \in \alpha a_i'(p_i)$, $p_i \neq P_{\Gamma_i} p$, где $p \in \Pi^\alpha$ и $p_1(\bar{x}_1) > 0$. Здесь будут охарактеризованы все векторы $p_i \in \Gamma_i^*$, для которых найдется вектор $p \in \Pi^\alpha$ такой, что имеют место соотношения:

а) $p_{i+1} \in \alpha a_i'(p_i)$, $p_{m+1} = p_1$, $1 \leq i \leq m$, (3)

б) $p_i = P_{\Gamma_i} p$, $p \in \Pi^\alpha$, $1 \leq i \leq m$. (4)

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть векторы $p_i \in \Gamma_i^*$, $1 \leq i \leq m$, такие, что для них имеет место (3). Тогда для того, чтобы имело место (4) необходимо и достаточно, чтобы для любых двух векторов p_{i_1} и p_{i_2}, удовлетворяющих (3), координаты с номерами $i \in \mathcal{J}(\Gamma_{i_1} \cap \Gamma_{i_2})$ были равны, где $\mathcal{J}(\Gamma_{i_1} \cap \Gamma_{i_2})$ – множество номеров, с какими продукты входят в группы i_1 и i_2 одновременно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из того, что векторы p_{i_1} и p_{i_2} являются проекциями одного и того же вектора $p \in \Pi^\alpha$ на соответствующие грани Γ_{i_1} и Γ_{i_2}, $1 \leq i_1$; $i_2 \leq m$. Достаточность следует из того, что любая пара $(x,y) \in Z$ представима в виде: $(x,y) = \sum_{i=1}^{m} (x_i, y_{i+1})$, где $(x_i, y_{i+1}) \in Z_i$, $1 \leq i$, $i \leq m$. Далее из (3) следует, что для любого i, $1 \leq i \leq m$, имеет место неравенство $\alpha p_i(x_i) \geq p_{i+1}(y_{i+1})$. Отсюда имеем, что $\alpha \cdot \sum_{i=1}^{m} p_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{m} p_{i+1}(y_{i+1})$. Учитывая условие теоремы, получим, что $\alpha \bar{p}(x) \geq \bar{p}(y)$, т.е. $\bar{p} \in \Pi^\alpha$, где вектор $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_m)$, $\bar{p}_i = P_{\Gamma_i} p_i$, Γ_i – грань конуса R_+^n, натянутая на орты, номера которых являются номерами продуктов, входящих в группу i, но не входящих в группу $i+1$, $1 \le i \le m$. Тогда векторы p_i, удовлетворяющие условиям теоремы, являются соответствующими проекциями вектора $\tilde{p} \in \Pi^{\alpha}$ на грани Γ_i, $1 \le i \le m$. Теорема доказана.

В теоремах 2.1 и 2.2 приведены условия, при которых из того, что α - темп роста отображения a, следует, что α^m - темп роста отображения $(a^m)_1$. Ниже будет доказана теорема, в которой указаны условия, при которых из того, что α^m - темп роста $(a^m)_1$, следует, что α - темп роста a.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть α^m - темп роста отображения $(a^m)_1$. Тогда для того, чтобы число α являлось темпом роста отображения a, необходимо и достаточно, чтобы имели место следующие условия:

а) среди векторов p_i, $1 \le i \le m$, удовлетворяющих (3), найдутся m таких векторов $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_m$, что координаты любых двух $\tilde{p}_{i_1}$ и $\tilde{p}_{i_2}$ из этих векторов с номерами $i \in \mathcal{J}(\Gamma_{i_1} \cap \Gamma_{i_2})$ равны;

б) найдется вектор $\bar{x}$ такой, что $\tilde{p}(\bar{x}) > 0$, где $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, $\bar{y} \geqslant \alpha \bar{x}$, а вектор $\tilde{p}$ составлен из векторов $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_m$ так же, как и выше (см. доказательство теоремы 2.3).

Доказательство легко следует из теоремы 2.3.

Разбиение продуктов на группы $1; 2; \ldots; m$ назовем основным, если выполнено: а) из продуктов группы i производятся только продукты следующей группы $i+1$, $1 \le i \le m$; в) не существует более мелкого разбиения n продуктов на группы, для которых выполнялось бы предыдущее условие а). Обозначим, как и прежде, через a_i и $(a^m)_i$ соответственно сужения отображений a и a^m на грань Γ_i, $1 \le i \le m$, основного разбиения. Применяя результаты [1], получим, что темпы роста всех отображений $(a^m)_i$, $1 \le i \le m$, одни и те же. Обозначим через $\{\alpha^{(1)}\}$ множество темпов роста отображения $(a^m)_1$. Пусть $\{\alpha^{(2)}\}, \{\alpha^{(3)}\}, \ldots, \{\alpha^{(m)}\}$ - множества темпов роста соответственно сужений отображения a^m на сумму двух, трех, ..., m основных граней. Заметим, что сужения одного и того же порядка отображения a^m (имеются в виду сужения a^m на суммы одинакового числа основных граней) могут иметь различные темпы роста. Например, $\alpha((a^m)_{\Gamma_1+\Gamma_2})$ – темп роста сужения a^m на сумму граней $\Gamma_1+\Gamma_2$ может и не быть равным $\alpha((a^m)_{\Gamma_1+\Gamma_3})$ – темпу роста сужения a^m на $\Gamma_1+\Gamma_3$. Далее, неймановский темп роста сужения a^m более высокого порядка может быть меньше темпа роста сужения a^m более низкого порядка.

Рассмотрим сужения отображения a^m на циклические грани одного и того же порядка. Прежде чем дать определение циклической грани порядка k, $1\le k\le m$, введем следующие обозначения. Положим $\mathcal{J}=\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$, $\Gamma_{\mathcal{J}}=\Gamma_{i_1}+\Gamma_{i_2}+\dots+\Gamma_{i_k}$.

Циклическими гранями порядка k, $1\le k\le m$, назовем грани вида $\Gamma_{\mathcal{J}},\Gamma_{\mathcal{J}+1},\dots,\Gamma_{\mathcal{J}+m-1}$, где $\Gamma_{\mathcal{J}+i}=\Gamma_{i_1+i}+\Gamma_{i_2+i}+\dots+\Gamma_{i_k+i}$, $0\le i\le m-1$, $1\le i_k\le m$.

Так же, как и в [I], доказывается, что сужения a^m на циклические грани одного и того же порядка имеют одинаковые темпы роста. Действительно, предположив для определенности, что порядок сужения второй и гранями, образующими цикл, $\Gamma_1+\Gamma_j$, $\Gamma_2+\Gamma_{j+1}$, $\dots$, $\Gamma_m+\Gamma_{j+m-1}$, $2\le j\le m$, получим, что

$$(a^m)_{\Gamma_i+\Gamma_{j+i-1}}=(a)_{\Gamma_{i-1}+\Gamma_{j+i-2}}\circ\dots\circ(a)_{\Gamma_i+\Gamma_{j+i-1}},\quad 1\le i\le m,$$

где $(a^m)_{\Gamma_i+\Gamma_{j+i-1}}$ и $(a)_{\Gamma_i+\Gamma_{j+i-1}}$ являются сужениями соответственно отображений a^m и a на грань $\Gamma_i+\Gamma_{j+i-1}$. Тогда, применяя те же рассуждения, что и в [I], получим справедливость выше сказанного.

В частности, представляют интерес, с точки зрения теорем о магистрали те условия, при которых равны между собой:

I) темпы роста различных сужений a^m одного и того же порядка;

2) темпы роста сужений a^m на всевозможные циклические грани. Этот вопрос рассматривается в теореме 2.5, в которой указываются достаточные условия, при которых темпы роста сужений a^m на всевозможные циклические грани одинаковы.

ТЕОРЕМА 2.5. Если найдутся векторы $x_i\in\Gamma_i$ и $p\in(R^n_+)^*$, такие, что $p\in\Pi^\alpha$,

$\alpha\bar{x}_{i+1} \in a_i(\bar{x}_i)$, $1 \le i \le m$, $\bar{x}_{m+1} = \bar{x}_1$, и $p(\bar{x}) > 0$, где ... (*) то сужения отображения a^m на циклические грани любого порядка имеют число α^m своим темпом роста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы следует, что число α является темпом роста отображения a. Тогда по известной теореме число α^m будет темпом роста a^m. Далее, используя (I) и то, что $p(\bar{x}) = m \cdot \beta_1(\bar{x}_1)$ (см. доказательство достаточности теоремы 2.1), получим, что α^m – темп роста $(a^m)_1$. Остается показать, что α^m – темп роста сужения отображения a^m на циклическую грань порядка K, где $2 \le K \le m$. Простоты ради, будем рассматривать сужение a^m на сумму двух основных граней, например, на $\Gamma_1 + \Gamma_j$, $2 \le j \le m$. Искомое сужение обозначим через $(a^m)_{1,j}$. Так как α^m – темп роста $(a^m)_1$ и $(a^m)_j$, то

$$\alpha^m(\bar{x}_1 + \bar{x}_j) \in (a^m)_1(\bar{x}_1) + (a^m)_j(\bar{x}_j) \subset (a^m)_{1,j}(\bar{x}_1 + \bar{x}_j).$$

Далее, покажем, что вектор $\hat{p}_1 + \hat{p}_j \in \alpha^m (a^m)'_{1,j}(\hat{p}_1 + \hat{p}_j)$, где

$$(a^m)'_{1,j} = (a_{m,j+m-1} \circ \dots \circ a_{1,j})' = a'_{m,j+m-1} \circ \dots \circ a'_{1,j}, \ a_{m,j+m-1}$$

– сужение a на сумму граней Γ_{1+i} и Γ_{j+i}, $0 \le i \le m-1$, и $\hat{p}_i = P_{r\Gamma_i} p$, $1 \le i \le m$. Действительно, из того, что для любого i, $1 \le i \le m$, имеет место включение $\hat{p}_{i+1} \in \alpha a'_i(\hat{p}_i)$ и для любых двух векторов $\hat{p}_{i_1}$ и $\hat{p}_{i_2}$ ($1 \le i_1;\ i_2 \le m$) координаты с номерами $i \in \mathcal{I}(\Gamma_{i_1} \cap \Gamma_{i_2})$ равны (см. теорему 2.3), получим, что $\hat{p}_{1+i} + \hat{p}_{j+i} \in \alpha a'_{i,j}(\hat{p}_i + \hat{p}_j)$. Отсюда следует, что $\hat{p}_1 + \hat{p}_j \in \alpha^m (a^m)'_{1,j}(\hat{p}_1 + \hat{p}_j)$. Для завершения доказательства остается показать, что $(\hat{p}_1 + \hat{p}_j)(\bar{x}_1 + \bar{x}_j) > 0$. Это следует из того, что $(\hat{p}_1 + \hat{p}_j)(\bar{x}_1 + \bar{x}_j) = \hat{p}_1(\bar{x}_1) + \hat{p}_j(\bar{x}_j)$ и $\hat{p}_1(\bar{x}_1) > 0$; $\hat{p}_j(\bar{x}_j) > 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть все грани Γ_i, $1 \le i \le m$, попарно не пересекаются. Тогда темпы роста отображения a и сужений отображения a^m на циклические грани любого порядка K, $1 \le K$; $K \le m$, совпадают.

В предыдущей теореме указаны достаточные условия, при которых темпы роста сужений a^m на циклические грани любого по-

(*) (символы в оригинале не читаются)

рядка k, $1 \le k \le m$, одинаковы. Если α – несогласуемый темп роста отображения a, то невозможность указания необходимых и достаточных условий, при которых совпали бы темпы роста соответствующих сужений a^m, следует из того же замечания к теореме 2.2. Если же α – согласуемый темп роста a, то можно указать необходимые и достаточные условия совпадения соответствующих темпов роста. Точнее, имеет место

ТЕОРЕМА 2.6. *Пусть α – согласуемый темп роста отображения a. Тогда для того, чтобы сужения a^m на циклические грани любого порядка k, $1 \le k \le m$, имели число α^m своим темпом роста, необходимо и достаточно, чтобы нашлись векторы $\bar{x}_i \in \Gamma_i$, $1 \le i \le m$, такие, что $\alpha \bar{x}_{i+1} \in a_i(\bar{x}_i)$, где $\bar{x}_{m+1} = \bar{x}_1$.*

Необходимость очевидна. Доказательство достаточности проводится с помощью тех же рассуждений, что и доказательство теоремы 2.5.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(m)}$ и $\alpha^{(i)}$ – неймановские темпы роста соответственно отображений $(a^m)_1$, a^m и отображения, являющегося сужением a^m порядка i, $2 \le i \le m$. Тогда из равенства $\alpha^{(1)} = \alpha^{(m)}$ следует, что неймановские темпы роста сужений a^m на циклические грани любого порядка k, $1 \le k \le m$, одинаковы.

3^0. В этом пункте будет рассмотрена связь между неймановскими гранями соответственно конусов Z, Z_i ($1 \le i \le m$) и $Z_\gamma = \sum_{j=1}^{k} Z_{i_j}$, $1 \le i_j \le m$, $1 \le k \le m$, (при условии, что темпы роста a, a^m и всех его сужений совпадают).

Введем следующее обозначение $a_\gamma = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}$, где a_γ – отображение, графиком которого является конус Z_γ. Положим, для всех i и k, $1 \le i; k \le m$,

$$\Pi_i^\alpha = \{(p_i, p_{i+1}) \in \Gamma_i^* \times \Gamma_{i+1}^* \mid p_{i+1} \in \alpha a'_i(p_i)\},$$

$$H_{p_i, p_{i+1}} = \{(x_i, y_{i+1}) \in \Gamma_i \times \Gamma_{i+1} \mid \alpha p_i(x_i) = p_{i+1}(y_{i+1}), (p_i, p_{i+1}) \in \Pi_i^\alpha\},$$

$$\Pi_\gamma^\alpha = \{(p_\gamma, p_{\gamma+1}) \in \Gamma_\gamma^* \times \Gamma_{\gamma+1}^* \mid p_{\gamma+1} \in \alpha a'_\gamma(p_\gamma)\},$$

$$H^\gamma_{p_\gamma, p_{\gamma+1}} = \{(x, y) \in \Gamma_\gamma \times \Gamma_{\gamma+1} \mid \alpha p_\gamma(x) = p_{\gamma+1}(y), (p_\gamma, p_{\gamma+1}) \in \Pi_\gamma^\alpha\},$$

$$H_{\hat{p}_{i_j},\hat{p}_{i_j+1}}=\{(x,y)\in\Gamma_{i_j}\times\Gamma_{i_j+1}\mid\alpha\hat{p}_{i_j}(x)=\hat{p}_{i_j+1}(y),$$
$$\hat{p}_{i_j}=P_{\tau\Gamma_{i_j}}p_J,\ \hat{p}_{i_j+1}=P_{\tau\Gamma_{i_j+1}}p_{J+1}\},$$
$$N_i=Z_i\bigcap_{(p_i,p_{i+1})\in\Pi_i^\alpha}H_{p_i,p_{i+1}},\ N_J=Z_J\bigcap_{(p_J,p_{J+1})\in\Pi_J^\alpha}H^J_{p_J,p_{J+1}}.$$

Грань N_i, следуя [I], назовем неймановской гранью конуса Z_i, $1\le i\le m$, а грань N_J – неймановской гранью конуса Z_J. Пусть N_α – неймановская грань конуса Z, соответствующая темпу роста α. Оказывается, в рассматриваемой модели Z всегда имеет место включение $N_\alpha\supset\sum_{i=1}^m N_i$ (см. теорему 3.I). Предварительно докажем следующие леммы.

ЛЕММА 3.I. *Пусть векторы p_J и p_{J+1} удовлетворяют условию, что $p_{J+1}\in\alpha a'_J(p_J)$, где $a_J=a_{i_1}+a_{i_2}+\ldots+a_{i_K}$, $1\le i_j\le m$, $1\le j\le K$. Тогда имеет место равенство*

$$Z_J\cap H^J_{p_J,p_{J+1}}=\sum_{j=1}^K Z_{i_j}\cap H_{\hat{p}_{i_j},\hat{p}_{i_j+1}}. \qquad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через A и B соответственно множества, стоящие в левой и правой частях (5). Пусть пара $(x,y)\in B$. Тогда имеют место следующие соотношения $(x,y)=\sum_{j=1}^K(x_{i_j},y_{i_j+1})$, $(x_{i_j},y_{i_j+1})\in Z_{i_j}$ и

$$\alpha\hat{p}_{i_j}(x_{i_j})=\hat{p}_{i_j+1}(y_{i_j+1})\ \text{для всех}\ i_j,\ 1\le i_j<m,\ 1\le j\le K. \qquad (6)$$

Так как

$$\sum_{j=1}^K\hat{p}_{i_j}(x_{i_j})=p_J(x)\quad\text{и}\quad\sum_{j=1}^K\hat{p}_{i_j+1}(y_{i_j+1})=p_{J+1}(y), \qquad (7)$$

то из (6) почленным сложением получим равенство $\alpha p_J(x)=p_{J+1}(y)$. Итак, $(x,y)\in A$, потому $B\subset A$.

Пусть теперь $(x,y)\in A$. Так как $Z_J=Z_{i_1}+Z_{i_2}+\ldots+Z_{i_K}$, то имеют место соотношения $(x,y)=\sum_{j=1}^K(x_{i_j},y_{i_j+1})$, $(x_{i_j},y_{i_j+1})\in Z_{i_j}$, $1\le i_j\le m$, $1\le j\le K$, кроме того, имеет место равенство $p_{J+1}(y)=\alpha p_J(x)$. Далее, из того, что $Z_J=Z_{i_1}+\ldots+Z_{i_K}$ и $p_{J+1}\in\alpha a'_J(p_J)$ следует справедливость включений $\hat{p}_{i_j+1}\in\alpha a'_{i_j}(\hat{p}_{i_j})$, $1\le i_j\le m$, $1\le j\le K$, (доказывается так же, как и (I)). Из последнего соотношения следует справедливость неравенств $\alpha\hat{p}_{i_j}(x_{i_j})\ge\hat{p}_{i_j+1}(y_{i_j+1})$, $1\le i_j\le m$, $1\le j\le K$. Ясно, что в полученных соотношениях возможно только равенство для всех номеров i_j, $1\le i_j\le m$, $1\le j\le K$, ибо в противном случае, складывая почленно эти неравенства и учитывая (7), получим противоречие тому, что $\alpha p_j(x)=p_{j+1}(y)$. Отсюда следует, что пары $(x_{i_j}, y_{i_j+1}) \in Z_{i_j} \cap H_{\hat{p}_{i_j}, \hat{p}_{i_j+1}}$, $1 \leq i_j \leq m$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq k \leq m$. Следовательно, $(x, y) \in B$, т.е. $\mathcal{A} \subset B$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $k=m$, функционал $p \in \Pi^\alpha$ и H_p – гиперплоскость функционала $(\alpha p, -p)$. Тогда имеет место равенство $Z \cap H_p = \sum_{i=1}^{m} Z_i \cap H_{\hat{p}_i, \hat{p}_{i+1}}$, $\hat{p}_i = P_{r\Gamma_i} p$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функционал $p \in \Pi^\alpha$, H_p – гиперплоскость функционала $(\alpha p, -p)$. Тогда для любого k, $1 \leq k \leq m$, имеет место равенство $Z \cap H_p = \sum_{i=0}^{m-1} Z_{j+i} \cap H^{j+i}_{\hat{p}_{j+i}, \hat{p}_{j+i+1}}$, $\hat{p}_{j+i} = P_{r\Gamma_{j+i}} p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $Z = Z_j + Z_{j+1} + \ldots + Z_{j+m-1}$, где $Z_{j+i} = Z_{i_1+i} + Z_{i_2+i} + \cdots + Z_{i_k+i}$, $0 \leq i \leq m-1$. Далее, так же как и соотношение (1), доказывается справедливость включения $\hat{p}_{j+i+1} \in \alpha a'_{j+i}(\hat{p}_{j+i})$, где a_{j+i} – отображение, графиком которого является конус Z_{j+i}, $\hat{p}_{j+i} = P_{r\Gamma_{j+i}} p$, $p \in \Pi^\alpha$, $0 \leq i \leq m-1$. Теперь, применяя те же рассуждения, что и в приведенной лемме, получим справедливость исходного утверждения.

ЛЕММА 3.2. Пусть p – произвольный функционал из множества Π^α. Множество $Z \cap H_p$ тогда и только тогда строго включает неймановскую грань N_α, когда $p \bar{\in} \operatorname{int} \Pi^\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество $Z \cap H_p$ строго содержит N_α, то ясно, что $p \bar{\in} \operatorname{int} \Pi^\alpha$, так как в противном случае получили бы равенство этих множеств (см. [2]). Пусть теперь $p \bar{\in} \operatorname{int} \Pi^\alpha$. Тогда найдется номер j, $1 \leq j \leq n$, такой, что $(p)^j = 0$, а j-ая координата любого вектора из множества $\operatorname{int} \Pi^\alpha$ положительна. Очевидно, что в этом случае пара $(e_j, 0) \in Z \cap H_p$, но $(e_j, 0) \bar{\in} N_\alpha$. Отсюда следует справедливость леммы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть α – темп роста отображения a и α^m – темп роста отображения $(a^m)_1$. Тогда имеет место включение $N_\alpha \supset \sum_{i=1}^{m} N_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя следствие I (см. лемму 3.1), получим, что $Z \cap H_p = \sum_{i=1}^{m} Z_i \cap H_{\hat{p}_i, \hat{p}_{i+1}}$, где $\hat{p}_i = P_{\mathcal{I}_i} p$, $1 \le i \le m$.

Далее, учитывая, что при $p \in int\, \Pi^\alpha$ неймановская грань $N_\alpha = Z \cap H_p$ (см.[2]) и то, что из определения неймановской грани следует $N_i \subset Z_i \cap H_{\hat{p}_i, \hat{p}_{i+1}}$, получим справедливость утверждения теоремы.

СЛЕДСТВИЕ I. Если вектор p ($p \in int\, \Pi^\alpha$) строго положителен, то имеет место равенство $N_\alpha = N_1 + N_2 + \ldots + N_m$. Доказательство этого факта следует из того, что $(\hat{p}_i, \hat{p}_{i+1}) \in int\, \Pi_i^\alpha$ для любого i , $1 \le i \le m$. Равенство этих множеств имеет место также в случае, если $(\hat{p}_i, \hat{p}_{i+1}) \in int\, \Pi_i^\alpha$ для любого i , $1 \le i \le m$, $p \in int\, \Pi^\alpha$.

Заметим, что если грани пересекаются и функционал $p \in int\, \Pi^\alpha$ не строго положителен, то условие $(\hat{p}_i, \hat{p}_{i+1}) \in int\, \Pi_i^\alpha$ для всех i , $1 \le i \le m$, является только достаточным для справедливости равенства $N_\alpha = N_1 + N_2 + \ldots + N_m$. Это вытекает из следующего примера.

Пусть $m = 2$, функционал $p \in int\, \Pi^\alpha$ не строго положителен и

$$N_\alpha = Z_1 \cap H_{\hat{p}_1, \hat{p}_2} + Z_2 \cap H_{\hat{p}_2, \hat{p}_1} = N_1 + N_2 .$$

Далее, пусть модель такова, что найдется номер j из зоны пересечения Γ_1 и Γ_2 , такой, что эта координата вектора $p \in int\, \Pi^\alpha$ равна нулю, а для вектора $(p_1, p_2) \in int\, \Pi_i^\alpha$ имеют место соотношения $(p_1)^j > 0$, $(p_2)^j = 0$. Тогда процесс $z_0 = (e_j, 0)$ обладает свойством, что $z_0 \in Z_1 \cap H_{\hat{p}_1, \hat{p}_2}$, $z_0 \in Z_2 \cap H_{\hat{p}_2, \hat{p}_1}$, $z_0 \in N_2$, но $z_0 \bar{\in} N_1$. Отсюда следует, что множество $Z_1 \cap H_{\hat{p}_1, \hat{p}_2}$ строго включает N_1 . Тогда имеет место $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \bar{\in} int\, \Pi_1^\alpha$ (в противном случае эти множества были бы равны).

Если же грани Γ_i , $1 \le i \le m$, попарно не пересекаются, то имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть функционал $p \in int\, \Pi^\alpha$, $\hat{p}_i = P_{\mathcal{I}_i} p$, $1 \le i \le m$. Тогда равенство $N_\alpha = N_1 + N_2 + \ldots + N_m$

справедливо в том и только в том случае, если имеет место включение $(\hat{p}_i, \hat{p}_{i+1}) \in \operatorname{int} \Pi_i^\alpha$ для любого i, $1 \le i \le m$.

Достаточность следует из теоремы 3.I. Необходимость условий приведенного утверждения докажем методом от противного. И пусть номер i_0, $1 \le i_0 \le m$, такой, что $(\hat{p}_{i_0}, \hat{p}_{i_0+1}) \bar{\in} \operatorname{int} \Pi_{i_0}^\alpha$. Отсюда следует что найдется номер j, такой, что $[(\hat{p}_{i_0}, \hat{p}_{i_0+1})]^j = 0$, а для любого вектора $(p_{i_0}, p_{i_0+1}) \in \operatorname{int} \Pi_{i_0}^\alpha$ эта координата положительна. Если номер j, такой, что $[\hat{p}_{i_0}]^j = 0$, а $[p_{i_0}]^j > 0$, то процесс $z_0 = (e_j, 0) \in Z_{i_0} \cap H_{\hat{p}_{i_0}, \hat{p}_{i_0+1}}$ (где e_j – единичный орт с номером j). Тогда из того, что в данном случае $N_\alpha = Z \cap H_p = \sum_{i=1}^{m} Z_i \cap H_{\hat{p}_i, \hat{p}_{i+1}}$ следует, что $z_0 \in N_\alpha$. Однако процесс $z_0 \bar{\in} N_{i_0}$. Далее, так как грани Γ_i $(1 \le i \le m)$ попарно не пересекаются, то пара $(e_j, 0)$, будучи ненулевым элементом произведения $\Gamma_{i_0} \times \Gamma_{i_0+1}$, не принадлежит ни одному из множеств N_i, $1 \le i \le m$, что противоречит равенству $N_\alpha = N_1 + N_2 + \ldots + N_m$. Если же номера положительных координат векторов $\hat{p}_{i_0}$ и p_{i_0} совпадают, то, применяя те же рассуждения, что и выше, нетрудно показать, что ненулевой элемент $(e_j, 0) \in \Gamma_{i_0+1} \times \Gamma_{i_0+2}$ такой, что $(e_j, 0) \in N_\alpha$, но $(e_j, 0) \bar{\in} \sum_{i=1}^{m} N_i$. Полученное противоречие завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть α – темп роста отображения a, α^m – темп роста отображения a^m и всех его сужений на циклические грани. Тогда для любого k, $1 \le k \le m$, имеют место следующие соотношения

$$N_J \supset N_{i_1} + N_{i_2} + \ldots + N_{i_k}, \quad N_\alpha \supset N_J + N_{J+1} + \ldots + N_{J+m-1},$$

где $N_{J,i}$ – неймановская грань конуса $Z_{J,i}$, $0 \le i \le m-1$.

Справедливость этих утверждений следует из леммы 3.I и её следствий. Кроме того, здесь имеет место все то, что было сказано в предыдущем следствии I.

4^0. В этом пункте будет более подробно рассмотрена асимптотика оптимальных (конечных и бесконечных) траекторий, исходящих не обязательно из внутренних точек конуса R_+^n.

I. Сначала рассмотрим теоремы о магистрали в слабой форме. В рассматриваемой модели Z (с ограничениями T_1, T_2' и T_3') оптимальные траектории, исходящие из любого начального состояния $x_0 \geqslant 0$, сходятся к некоторой грани Γ_{x_0}, определяемой этой точкой x_0 (см. [I]). Выясним, как связаны Γ_{x_0} и неймановская грань N_α модели Z, соответствующая темпу роста α, наложив на модель следующее дополнительное ограничение

T_4') Пусть в модели Z имеется темп роста α, такой, что число α^m является темпом роста отображения a^m и его сужений на циклические грани любого порядка k, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Пусть начальное состояние $x_0^i \geqslant 0$, такое, что оно принадлежит только одной грани Γ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, и из него исходит траектория, растущая средним темпом α (напоминаем, что мы пользуемся терминологией, принятой в [2]). Далее, пусть функционал $f \in (R_+^n)^*$, такой, что $K''p \leqslant f \leqslant K'p$, где $K' \geqslant K''$ - произвольные положительные числа. Нашу модель Z (с ограничениями T_1, $T_2' - T_4'$) можно рассматривать как модель с переменной технологией, в которой выполнены все условия теоремы о магистрали в слабой форме[ж)] (см. [3]). Применяя эту теорему, получим справедливость следующего предложения.

ТЕОРЕМА 4.I. По любому $\varepsilon > 0$ для любой конечной траектории $X_T \doteq (x_t)_{t=0}^T$, исходящей из x_0^i и $\hat{f}_{i+j}$ - оптимальной (где $\hat{f}_{i+j} = P_{\tau \Gamma_{i+j}} f$, $T \equiv j \pmod{m}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, x_0^i и f удовлетворяют условиям, указанным выше) число процессов (x_t, x_{t+1}) таких, что $\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_{i+j}\right) \geqslant \varepsilon$ не превосходит некоторого числа L (не зависящего от длины траектории T).

Так как все грани N_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, в модели Z с ограничениями T_1, $T_2' - T_4'$ содержатся в неймановской грани N_α, то

ж) В [3] это предложение доказано относительно системы гиперплоскостей, что равносильно с учетом леммы 4.3 (см. [2]) теореме о магистрали в слабой форме.

приведенное выше предложение уточняет, к какой именно части N_α идет $\hat{f}_{i+j}$ - оптимальная траектория $(x_t^i)_{t=0}^{T}$, исходящая из указанной точки $x_0^i \in \Gamma_i$. Если начальное состояние $x_0 \in int\, R_+^n$, ...но, что из любой точки $x_0^i \in \Gamma_i$ (где $x_0 = \sum_{i=1}^{m} x_0^i$) исходит траектория, растущая средним темпом α. В этом случае все конечные траектории $\chi_T^i = (x_t^i)_{t=0}^{T}$, исходящие из x_0^i, и $\hat{f}_{i+j}$-оптимальные ($T \equiv j\,(mod\, m)$) стремятся к своим неймановским граням N_{i+j}. Тогда суммарная траектория $\chi_T = (\sum_{i=1}^{m} x_t^i)_{t=0}^{T}$ стремится к сумме $\sum_{i=1}^{m} N_i \subset N_\alpha$. Заметим, что эта траектория χ может и не быть f - оптимальной, так как

$$f(x_T) = \sum_{i=1}^{m} \hat{f}_{i+j}(x_T^i) = \sum_{i=1}^{m} \max_{x_T^i \in a^T(x_0^i)} \hat{f}_{i+j}(x_T^i) \le \max_{y \in a^T(x_0)} f(y),$$

где $x_T = \sum_{i=1}^{m} x_T^i$, $x_T^i \in a^T(x_0^i)$ и $\sum_{i=1}^{m} a^T(x_0^i) \subset a^T(\sum_{i=1}^{m} x_0^i) = a^T(x_0)$. Ясно, что f - оптимальность суммарной траектории χ_T гарантируется, если все m групп продуктов попарно не пересекаются. В этом случае f оптимальная траектория представима в виде суммы m траекторий $\chi_T^i = (x_t^i)_{t=0}^{T}$, из которых хотя бы одна $\hat{f}_{i+j}$ - оптимальна ($T \equiv j\,(mod\, m$, $1 \le i \le m$). Если же начальное состояние $x_0 \in R_+^n$, такое, что из любой точки $x_0^i \in \Gamma_i$, $1 \le i \le m$, исходит траектория, растущая средним темпом α, то f - оптимальная траектория $\chi_T = (x_t)_{t=0}^{T}$ представима в виде суммы m $\hat{f}_{i+j}$- оптимальных траекторий $(x_t^i)_{t=0}^{T}$ ($T \equiv j\,(mod\, m)$).

Мы рассмотрели случаи, когда начальное состояние было взято либо только из одной грани, либо оно принадлежало $int\, R_+^n$. Если же x_0 принадлежит нескольким граням, например Γ_γ, $\Gamma_\gamma = \Gamma_{i_1} + \dots + \Gamma_{i_k}$, то при выполнении соответствующих условий, конечные оптимальные траектории $(x_t)_{t=0}^{T}$, исходящие из этой точки x_0, будут стремиться к грани $N_{\gamma+j}$ ($T \equiv j\,(mod\, m)$), тоже принадлежащей N_α (см. следствия к теореме 3.I).

2. Здесь рассмотрим вопрос, связанный с теоремой о магистрали в сильной форме относительно равновесного луча $(\lambda \bar{x})$, $\lambda \ge 0$. На рассматриваемую модель Z вместо условия T_4' наложим более жесткое условие

T_5'). Найдутся строго положительные векторы $\bar{x}_i \in \Gamma_i$ и

$p_i \in \Gamma_i^*$, $1 \le i \le m$, такие, что I) $\alpha\bar{x}_{i+1} \in a_i(\bar{x}_i)$; 2) $p_{i+1} \in \alpha a_i'(p_i)$; 3) $p_{i+1}(y) < \alpha p_i(x)$ для всех $(x,y) \in Z_i$, $x \ne \lambda\bar{x}_i$, $\lambda > 0$, $1 \le i \le m$.

Модель $\bar{Z}$ с ограничениями T_1 , T_2', T_3' и T_5' будем рассматривать как модель с переменной технологией (технология в ней будет периодической, с периодом m). Тогда в этой модели $\bar{Z}$ выполнены все условия теоремы 2 (см. [4]). Применяя эту теорему, получим справедливость следующего предложения.

ТЕОРЕМА 4.2. По любому $\varepsilon > 0$ для данного начального состояния $x_0^i \in \Gamma_i$, $1 \le i \le m$, из которого исходит траектория, растущая средним темпом α , найдется натуральное τ , обладающее свойством: каковы бы ни были номер $T > 2\tau$, элементы $f_i \in \Gamma_i^*$ такие, что $\kappa'' p_i \le f_i \le \kappa' p_i$, $1 \le i \le m$, (где $\kappa'' \le \kappa'$ - произвольные положительные числа) и (x_0^i, f_{i+j}, T) - оптимальная траектория $(x_t)_{t=0}^{T}$ ($T \equiv j (\mathrm{mod}\, m)$, $1 \le i \le m$), неравенство *) $\rho(x_t, \bar{x}_{i+j}) < \varepsilon$ справедливо для всех t таких, что $\tau \le t \le T - \tau$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть начальное состояние $x_0 = \sum_{i=1}^{m} x_0^i$ такое, что для всех точек $x_0^i \in \Gamma_i$ выполнены условия теоремы, и пусть $X_T^i = (x_t^i)_{t=0}^{T}$ - соответствующие оптимальные траектории, исходящие из них. Тогда имеет место неравенство $\sum_{i=1}^{m} \rho(x_t, \bar{x}_{i+j}) < m \cdot \varepsilon$, $\tau \le t \le T - \tau$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение, приведенное в предыдущем следствии, является обобщением теоремы 2, доказанной Моришимой в [7] для случая, когда функция полезности u - линейна. Действительно, во-первых, его модель является частным случаем нашей модели $\bar{Z}$ по следующим причинам: а) он рассматривал только случай, когда грани Γ_i , $1 \le i \le m$, попарно не пересекались; в) из

---

*) Здесь положено $\rho(x, \bar{x}) = \left\| \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\|$.

его требования примитивности их сильной супераддитивности каждого из отображений $(a^m)_i$, $1\le i\le m$, следует справедливость условия T_s' (см. леммы 6 и 7 в [7]), во-вторых, если грани Γ_i, $1\le i\le m$, попарно не пересекаются, то сумма (x_0^i, f_{i+j}, T)-оптимальных траекторий $(x_t^i)_{t=0}^T$ является f - оптимальной ($T \equiv j (mod\, m)$).

Займемся теперь выяснением тех условий на начальное состояние, при которых имеет место теорема о магистрали в сильной форме относительно равновесного луча в циклических моделях с попарно не пересекающимися гранями Γ_i, $1\le i\le m$. То, что в циклических моделях с примитивными и сильно супераддитивными отображениями $(a^m)_i$, $1\le i\le m$, и с попарно не пересекающимися гранями может иметь теорема о магистрали в сильной форме, когда экономика снабжена в исходном положении запасами различных товаров в некоторых специальных пропорциях, отмечено Моришимой в [7]. Мы здесь покажем, что в циклических моделях рассматриваемого типа теорема о магистрали в сильной форме (вида Никайдо) относительно луча имеет место только для начальных состояний из некоторого множества. Далее покажем, что проекции этого множества на грани Γ_i, $1\le i\le m$, представляют собой выпуклые поверхности. Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4.I. П у с т ь в с е о п т и м а л ь н ы е т р а е к т о р и и, и с х о д я щ и е и з н е к о т о р о г о н а ч а л ь н о г о с о с т о я н и я $x_0 \in R_+^n$, с х о д я т с я к р а в н о в е с н о м у л у ч у $(\lambda \bar{x})$, $\lambda \ge 0$. Т о г д а э т и т р а е к т о р и и с х о д я т с я к о д н о й и т о й ж е т о ч к е н а э т о м л у ч е.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть темп роста α модели Z равен единице. Рассмотрим следующую последовательность нормальных множеств $\{a^t(x_0)\}$, $a^0(x_0)\equiv x_0$, $t=0;1;\dots;$. Последовательность $\{a^t(x_0)\}$ ограничена, и потому можно выбрать сходящуюся подпоследовательность множеств $\{a^{t_k}(x_0)\}$, $k=1;2;\dots$. Пусть эта подпоследовательность $\{a^{t_k}(x_0)\}$ сходится к некоторому множеству ξ. Обозначим через λ_ξ^* наибольшее значение числа λ, при котором справедливо включение $\lambda\bar{x}\in\xi$. Ясно, что точка $\lambda_\xi^*\bar{x}$ является точкой пересечения луча $(\lambda\bar{x})$, $\lambda\ge 0$, с положительной границей $\partial^+\xi$ множества ξ. Очевидно, что коэффициент $\lambda_{\mathfrak{F}}^{\bar{x}}$ положителен и единствен. Покажем, что все оптимальные траектории, исходящие из данной точки x_0, сходятся именно к точке $\lambda_{\mathfrak{F}}^{\bar{x}}\bar{x}$. Действительно, пусть последовательность $(\bar{x}_t)_{t=0}^{T}$ – произвольная оптимальная траектория, исходящая из точки x_0. По условию, оптимальная траектория $(\bar{x}_t)_{t=0}^{\infty}$ сходится к некоторой точке $\nu\bar{x}$ на луче $(\lambda\bar{x})$, $\lambda \geq 0$. Подпоследовательность $(\bar{x}_{t_k})_{k=1}^{\infty}$ тоже сходится к той же точке. Если бы коэффициенты ν и $\lambda_{\mathfrak{F}}^{\bar{x}}$ были равны, то лемма этим была бы доказана. Однако эти числа не могут быть неравными. Действительно, из того, что множества $a^{t_k}(x_0)$ сходятся к множеству $\mathfrak{F}$, следует, что по любому $\epsilon > 0$ найдется номер K_0, такой, что для $K > K_0$ имеет место включение $\partial^+ a^{t_k}(x_0) \subset \partial^+\mathfrak{F} + \epsilon S$, где S – единичный шар (см. [2]). Далее, так как последовательность $(\bar{x}_t)_{t=0}^{\infty}$ является оптимальной траекторией, то любая ее точка $x_t \in \partial^+ a^t(x_0)$. Тогда точка $x_{t_k}' \in \partial^+ a^{t_k}(x_0)$ и при достаточно больших K представима в виде

$$x_{t_k} = y_{t_k} + z_{t_k}, \tag{8}$$

где $y_{t_k} \in \partial^+\mathfrak{F}$, $\|z_{t_k}\| < \epsilon$. Переходя к пределу при $K \to \infty$ в равенстве (8) и учитывая, что ϵ – произвольное, сколь угодно малое положительное число, получим, что $\nu\bar{x} \in \partial^+\mathfrak{F}$. Но так как луч $(\lambda\bar{x})$, $\lambda \geq 0$, может пересекаться с множеством $\partial^+\mathfrak{F}$ только в точке, получим, что $\nu = \lambda_{\mathfrak{F}}^{\bar{x}}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть модель Z удовлетворяет условиям T_1, T_2', T_3' и, кроме того, пусть известно, что каковы бы ни были $\varrho > 0$ и (x_0^i, f_{i+j}, T) – оптимальная траектория $(x_t^i)_{t=0}^{T}$, исходящая из начального состояния $x_0^i \geq 0$ (где $T \equiv j \pmod m$, $f_{i+j} = P_{\tau_{i,j}} f$, $K'\rho \leq f \leq K'\rho$, $1 \leq i \leq m$, $K' \geq K''$ – произвольные положительные числа), найдется натуральное $\tau = \tau(x_0^i, \varrho)$, такое, что неравенство $\rho(x_t^i, \bar{x}_{i,j}) \geq \varrho$ выполнено не более чем для τ значений t. Тогда по любому $\epsilon > 0$ найдутся положительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и номер t_1, такие, что какова бы ни была

$(\bar{x}_0, f, T)$-оптимальная достаточно большой длины траектория $(x_t)_{t=0}^T$ $(T > t_1)$, исходящая из точки $\bar{x}_0 = \bar{x}_0^1 + \ldots + \bar{x}_0^m$ (где $\bar{x}_0^i = 1/\lambda_i \cdot x_0^i$), имеет место неравенство $\rho(x_t, \bar{x}) < \varepsilon$ для всех t, $t_1 \leq t \leq T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_t)_{t=0}^T$ – (x_0, f, T) – оптимальная траектория, исходящая из указанного в теореме начального состояния $x_0 = x_0^1 + \ldots + x_0^m$ (где функционал $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_m$). Тогда эта траектория представима в виде суммы $(x_0^i, f_{i,j}, T)$-оптимальных траекторий $(x_t^i)_{t=0}^T$, $i = 1; 2; \ldots; m$, (см. начало этого пункта). Так как траектории $(x_t^i)_{t=0}^T$ удовлетворяют условиям теоремы, то суммарная траектория $(x_t)_{t=0}^T$ будет сходящейся (при $T \to \infty$). Покажем, что при соответствующем выборе начального состояния $\bar{x}_0$, можно добиться того, что все оптимальные траектории, исходящие из этого состояния $\bar{x}_0$, сходятся к одной и той же точке на луче $(\lambda \bar{x})$, $\lambda \geq 0$. Для этого рассмотрим моменты времени $t = km$, $k = 0; 1; \ldots$. Так как $(x_t^i)_{t=0}^T$ – оптимальная траектория, то точки $x_{km}^i \in \partial^+ a^{km}(x_0^i)$. Рассуждая так же, как и в предыдущей лемме, можно показать, что последовательность (x_{km}^i) при $k \to \infty$ сходится к точке $\lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i} \bar{x}_i$ (где коэффициент $\lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i}$ равен наибольшему из чисел λ, при которых справедливо включение $\lambda \bar{x}_i \in \xi_i$, ξ_i – предельное множество, к которому стремится подпоследовательность $a^{mk\ell}(x_0^i)$ при $\ell \to \infty$ $(i = 1; 2; \ldots; m)$. Коэффициент $\lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i}$ зависит только от начального состояния $x_0^i \in \Gamma_i$, но не зависит от траектории (см. лемму 4.1). Выберем теперь такие начальные состояния x_0^i, чтобы для всех i, $1 \leq i \leq m$, имело место равенство $\lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i} = 1$. Ясно, что для этого достаточно в качестве $\bar{x}_0^i$ рассмотреть $1/\lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i} \cdot x_0^i$. Положим $\bar{x}_0 = \bar{x}_0^1 + \ldots + \bar{x}_0^m$. Рассмотрим теперь оптимальные траектории $(\bar{x}_t)$ и (x_t^i), исходящие соответственно из $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_0^i$ $(1 \leq i \leq m)$. Очевидно, что оптимальные траектории $(x_t^i)_{t=0}^T$, $1 \leq i \leq m$, удовлетворяют условиям теоремы. Тогда последовательность $(x_{km})_{k=0}^\infty = \left(\sum_{i=1}^m x_{km}^i\right)_{k=0}^\infty$ сходится к точке $\bar{x}$. Так как (x_{km}) является подпоследовательностью сходящейся последовательности (x_t), то и сама последовательность (x_t)

сходится к точке $\bar{x}$. Далее, из того, что $x_t \to \bar{x}$, следует, что $x_t \longrightarrow \bar{x}$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $t_0 = t_0(\varepsilon)$, что для $t > t_0$ имеет место неравенство $\left\| x_t / \|x_t\| - \bar{x} / \|\bar{x}\| \right\| < \varepsilon$

Действительно, из справедливости соотношений

$$\left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| = \left\| \frac{\|x_t\| (x_t - \bar{x}) + (\|\bar{x}\| - \|x_t\|) \cdot x_t}{\|x_t\| \cdot \|\bar{x}\|} \right\| \leqslant \frac{\|x_t - \bar{x}\| + \left| \|\bar{x}\| - \|x_t\| \right|}{\|\bar{x}\|}$$

следует, что искомое t_0 надо взять таким, чтобы для $t > t_0$ имели место неравенства $\|x_t - \bar{x}\| < \frac{\varepsilon}{2} \|\bar{x}\|$ и $\left| \|\bar{x}\| - \|x_t\| \right| < \frac{\varepsilon}{2} \|\bar{x}\|$.

Теперь, полагая $t_1 = t_0$, получим справедливость теоремы.

СЛЕДСТВИЕ I. Все бесконечно оптимальные траектории, исходящие из начального состояния $\bar{x}_0$, равномерно сходятся к одной и той же точке $\bar{x}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Оптимальные траектории сходятся к равновесному лучу $(\lambda \bar{x})$, $\lambda \geqslant 0$, тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, равны между собой.

Рассмотрим теперь все начальные состояния $x_0 \in R_+^n$, для которых имеет место теорема о магистрали в сильной форме (вида Никайдо) относительно равновесного луча $(\lambda \bar{x})$, $\lambda \geqslant 0$ (см. предыдущую теорему), т.е. рассмотрим такие состояния $x_0 = x_0^1 + x_0^2 + \ldots + x_0^m$, для которых все коэффициенты $\lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, равны между собой. Будем предполагать, что отображения $(a^m)_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, примитивны и непрерывны. Очевидно, что если a – неймановское отображение или $(a^m)_i$ сильно супераддитивны, то непрерывность $(a^m)_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, выполнена. Пусть темп роста α модели Z равен единице. Обозначим через Π_i множество всех начальных состояний $x_0^i \in \Gamma_i$, для которых имеет место $\lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i} = 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Ясно, что $\lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i}(x_0^i) = \lim\limits_{k \to \infty} \frac{\|x_{km}^i\|}{\|\bar{x}_i\|}$. Отметим следующие свойства $\lambda_i(x_0^i) = \lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i}(x_0^i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

1) $\lambda_i(\tau x_0^i) = \tau \lambda_i(x_0^i)$, $\tau \geqslant 0$; 2) $\lambda_i(\bar{x}_i) = 1$; 3) $\lambda_i(x_1) \geqslant \lambda_i(x_2)$, если $x_1 \geqslant x_2$, $x_1, x_2 \in \Gamma_i$; 4) если $x_n^i \to x_0^i$, то $\lambda_i(x_n^i) \to \lambda_i(x_0^i)$;

5) $\lambda_i(x_1+x_2) \geq \lambda_i(x_1)+\lambda_i(x_2)$, $x_1, x_2 \in \Gamma_i$.

Заметим, что свойства I) - 3) очевидны, а 4) и 5) следуют из непрерывности и сильной супераддитивности $(a^m)_i$, $1 \leq i \leq m$. Исходя из этих свойств, следует, что λ_i , $1 \leq i \leq m$ - суперлинейный функционал, а множество Π_i есть его поверхность уровня. На рис. I изображена выпуклая поверхность Π_i для случая, когда размерность грани Γ_i , $1 \leq i \leq m$, равна двум.

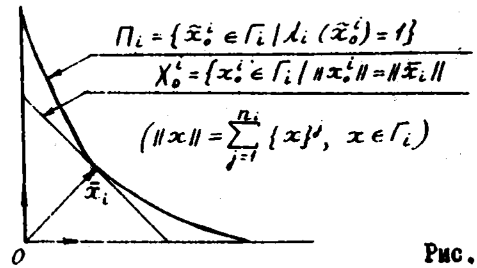

Рис. I

Заметим, что, какую бы точку $x_0^i \in \Pi_i$ ни взять, найдется число $\gamma \neq 1$, такое, что $x_0^i = \gamma \tilde{x}_0^i$, где $\tilde{x}_0^i \in \Pi_i$, потому

$$\lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i}(x_0^i) = \gamma \cdot \lambda_{\xi_i}^{\bar{x}_i}(\tilde{x}_0^i) = \gamma \neq 1.$$

Положим $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2 \times \ldots \times \Pi_m$. Имеет место

ТЕОРЕМА 4.4. *Теорема о магистрали в сильной форме (вида Никайдо) относительно равновесного луча для оптимальных (конечных и бесконечных) траекторий имеет место только для начальных состояний, принадлежащих к множеству $c\Pi$, где c - произвольная положительная постоянная, причем если $x_0 \in c_0\Pi$, то все оптимальные траектории, исходящие из этого состояния x_0 , равномерно сходятся к точке $c_0\bar{x}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что теорема о магистрали в сильной форме относительно луча имеет место тогда и только тогда, если выполнена слабая форма этой теоремы относительно луча. Необходимость очевидна. Если же выполнена слабая форма, то все оптимальные траектории, исходящие из данной точки, сходятся к лучу. Тогда, применяя лемму 4.I и те же рассуждения, что и при нахождении числа t_1 (см. теорему 4.3), получим справедливость утверждения. Пусть теперь начальное состояние $x_0 \in c\Pi$. Если $c=1$, то, применяя предыдущую теорему, получим, что все оптимальные траектории, исходящие из x_0, равномерно сходятся к точке $\bar{x}$. Если же $c \neq 1$, то очевидно, что все оптимальные траектории, исходящие из x_0, равномерно сходятся к точке $c\bar{x}$, т.е. число c показывает коэффициент сходимости к лучу всех оптимальных траекторий, исходящих из $x_0 \in c\Pi$. Если же $x_0 \bar{\in} c\Pi$, то теорема о магистрали в сильной (а следовательно, и в слабой) форме относительно луча (вида Никайдо) не имеет места. Действительно, для любого $x_0^i \geqslant 0$ $(x_0 = x_0^1 + \dots + x_0^m)$ найдется положительное постоянное число c_i, такое, что $x_0^i \in c_i \Pi_i$. Тогда, рассуждая так же, как и в теореме 4.3, можно показать, что оптимальные траектории, исходящие из x_0, сходятся к точке $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \bar{x}_i$. Далее, так как $x_0 \in c\Pi$, то среди коэффициентов $c_1, c_2, \dots, c_m$ найдутся по крайней мере два различных. Пусть, например, $c_1 \neq c_2$. Так как $\|\bar{x}\| > 0$ и $\left\|\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \bar{x}_i\right\| > 0$, то найдется $\lambda > 0$, такое, что $\lambda \left\|\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \bar{x}_i\right\| = \|\bar{x}\|$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\left\| \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \bar{x}_i}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \bar{x}_i\right\|} - \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{c_i}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \bar{x}_i\right\|} - \frac{1}{\|\bar{x}\|} \right)^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left(\{\bar{x}_i\}^j\right)^2 \right)} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\frac{(\lambda c_1 - 1)^2}{\|\bar{x}\|^2} \left(\sum_{j=1}^{n_1} \left(\{\bar{x}_1\}^j\right)^2 \right) + \frac{(\lambda c_2 - 1)^2}{\|\bar{x}\|^2} \left(\sum_{j=1}^{n_2} \left(\{\bar{x}_2\}^j\right)^2 \right)} \equiv q \, .$$

Так как $\|\bar{x}_1\| > 0$ и $\|\bar{x}_2\| > 0$, то оба слагаемых под радикалом не могут одновременно обратиться в нуль. Тогда найдется положительное число δ такое, что $\delta < q$. Если теперь взять $\varepsilon < \delta$, то ясно, что для оптимальных (конечных и бесконечных) траекторий, исходящих из этого начального состояния x_0, теорема о магистрали в сильной (а следовательно, и в слабой) форме (вида Никайдо) относительно луча не имеет места. Теорема доказана (на рис. 2 изображено множество $c\Pi$ для трехпродуктовой модели).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для фиксированного числа $\varepsilon > 0$ (о котором говорится в теореме о магистрали) можно указать для каждой поверхности $c_0 \Pi_i$, $1 \leq i \leq m$, некоторую "пленку" G_i, "толщина" которой зависит от ε, c_0 и m, такую, что для

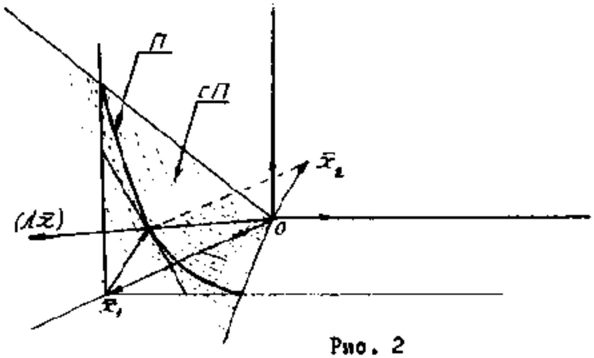

Рис. 2

оптимальных траекторий, исходящих из $x_0 \in c_0(G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m)$, неравенство $\rho(x_t, \bar{x}) \geq \varepsilon$ справедливо не более чем для конечного числа значений t. Действительно, угловое расстояние точек оптимальной траектории (x_t) до луча $\rho(x_t, \bar{x}) \leq \rho(x_t, \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \bar{x}_i) + \rho(\bar{x}, \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \bar{x}_i)$. Для любого γ, $0 < \gamma < 1$, найдутся числа γ_i, $1 \leq i \leq m$, настолько близкие к c_0, что $\rho(\bar{x}, \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \bar{x}_i) \leq \gamma\varepsilon$. Далее, из того, что $x_t \to \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \bar{x}_i$, найдется такое t_0, что для $t > t_0$ имеет место неравенство $\rho(x_t, \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \bar{x}_i) < (1-\gamma)\varepsilon$. Тогда $\rho(x_t, \bar{x}) \leq \varepsilon$ для $t > t_0$, что показывает справедливость приведенного выше утверждения. Заметим, что пересечением всех "пленок" $c_0 G_i(\varepsilon_n)$ при $\varepsilon_n \to 0$ является поверхность $c_0 П_i$, $1 \leq i \leq m$, для точек которой имеет место теорема о магистрали в сильной форме вида Никайдо относительно луча.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приведем несколько примеров моделей, для которых имеют место теоремы 4.3 и 4.4. Такими примерами являются модель Моришимы, рассмотренная в начале статьи, некоторые частные случаи моделей Неймана, в частности, модель Леонтьева с неразложимой матрицей и другие (о них будет сказано ниже).

То, что в модели Моришимы имеют место указанные теоремы, следует из того, что отображения $(a^m)_i$, $1 \leq i \leq m$, примитивны и сильно супераддитивны. Рассмотрим теперь модель Леонтьева (Z, A) с неразложимой матрицей A.

Известно, что если A – примитивна, то теорема о магистрали (во всех формах) имеет место для всех $x_0 \geq 0$. Если же A – импримитивна (пусть h – порядок импримитивности, $h > 1$), то эта модель все n продуктов разбивает на h непересекающихся групп, таких, что продукты группы $i+1$ получаются только из продуктов группы i, $1 \leq i \leq h$. Далее, отображения $(a^h)_i$, $1 \leq i \leq h$ (о которых говорилось выше), определяют модель Леонтьева с примитивной матрицей (это следует из теоремы 9, стр. 381, см. [5]), потому для всей модели Леонтьева (J, A) применимы теоремы 4.3 и 4.4. Отсюда, в частности, следует, что в модели Леонтьева для всех начальных состояний $x_0 \geq 0$ имеет место теорема о магистрали (в сильной и слабой формах) тогда и только тогда, когда A примитивна. Приведем еще пример модели (являющейся частным случаем модели Неймана), для которой имеют место теоремы 4.3 и 4.4.

Пусть модель Неймана, определяемая парой неотрицательных матриц (A, B), такова, что все n продуктов разбивает на m непересекающихся групп так, что продукты группы $i+1$ получаются только из продуктов группы i, $1 \leq i \leq m$. Пусть пара матриц (A_i, B_i), определяющая отображение $a_i, 1 \leq i \leq m$, удовлетворяет условиям в), г), е) (см. [6]). Тогда из теоремы, доказанной в [6], следует справедливость условий теоремы 4.3. Отсюда ясно, что в этой частной модели Неймана, имеют место указанные теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если модель двухпродуктовая, то грани Γ_1 и Γ_2 одномерные. В этом случае поверхности Π_1 и Π_2 вырождаются в точки, потому теорема о магистрали вида Никайдо (в любой форме) относительно луча имеет место только для точек вида $c\bar{x}$, где $c > 0$.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю А.М.Рубинову за внимание и помощь в работе.

Литература

1. А.М.Рубинов. Докторская диссертация, Н., 1970.
2. В.Л.Макаров, А.М.Рубинов. Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики. УМН, 25, 5: 155, (1970), 125-169.

3. А.М.Рубинов. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства. Оптимальное планирование, 9 (1967), 87-III.

4. А.М.Рубинов, К.Н.Шапиев. Об одном обобщении теоремы о магистрали в сильной форме. Оптимальное планирование, 10 (1968), 15-27.

5. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. "Наука", М., 1967., 352-398.

6. А.Ж.Жафяров. Об одном обобщении теоремы Никайдо о магистрали в сильной форме. Настоящий сборник, 57-64.

7. M.Morishima. Equilibrium, Stability and Growth. Clarendon Press, London, 1964.

Поступила в редакцию
14.VI. 1971 г.