УДК 51.330:115

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РАВНОВЕСНЫХ ЦЕН В ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕЙМАНА

А.Ж.Жафяров

1°. В работе рассматриваются условия, при которых модель Неймана обладает единственным равновесным вектором цен*). Эти условия представляют интерес с точки зрения теорем о магистрали (см. [4]).

Модель Неймана $\hat{N}$ определяется с помощью технологического конуса (см. [1]) $Z(\hat{A},\hat{B})=\{(x,y)\in E_+^n\times E_+^n \,|\, x=\hat{A}u,\ y=\hat{B}u,\ u\in E_+^m\}$, где E_+^n и E_+^m - положительные орманты конечномерных евклидовых пространств E^n и E^m соответственно размерностей n и $m\ (m\geq n)$; $\hat{A}$ и $\hat{B}$ - операторы, действующие из E^m в E^n, определяемые неотрицательными матрицами $\hat{A}$ и $\hat{B}$,**) которые называются соответственно матрицами потребления и выпуска; вектор $u\in E_+^m$ называется вектором интенсивностей. Конус $Z(\hat{A},\hat{B})$, задающий модель $\hat{N}$, является многогранным, замкнутым, выпуклым. На оператор $\hat{B}$ наложим следующее ограничение:

А) Оператор $\hat{B}$ удовлетворяет условию $\hat{B}(E_+^m)=E_+^n$, т.е., каково бы ни было состояние $y\in E_+^n$, существует процесс, его реализующий, т.е. пара $(x,y)\in Z(\hat{A},\hat{B})$.

*) Здесь и в дальнейшем под термином "единственность вектора" понимается единственность этого вектора с точностью до положительного множителя.

**) Здесь и в дальнейшем оператор и соответствующую его матрицу будем обозначать одной буквой. Это не вызывает недоразумения, т.к. из контекста будет ясно, о чем идет речь.

Из предложения А) следует, что в матрице $\hat{B}$ имеется не менее n векторов-столбцов $b^i=(0,\dots,b_i,0,\dots,0)$, у которых i-ая координата $b_i>0$, а все остальные координаты равны нулю. Переставим соответствующие столбцы матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ так, чтобы первые n столбцов матрицы $\hat{B}$ образовали диагональную. Далее, разделив соответствующие столбцы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ на $b_i>0$, придем к матрицам A и B, причем $B=(E|B_2)$, $A=(A_1|A_2)$, где E – единичная матрица n-го порядка, B_2 – матрица $(m-n)$-го порядка, A_1 и A_2 – матрицы, соответствующие E и B_2. Конусы $Z(\hat{A},\hat{B})$ и $Z(A,B)$ совпадают, стало быть, модели, определяемые этими конусами, тождественны.

Из сказанного выше следует, что изучение общей модели Неймана $\hat{N}$ с единственным ограничением А) сводится к изучению модели Неймана N, определяемой конусом $Z(A,B)$. Ясно, что модель N представляет собой обобщение модели Леонтьева.

Теперь на общую модель Неймана $\hat{N}$ вместо А) наложим ограничение:

В) Оператор $\hat{A}$ удовлетворяет условию $\hat{A}(E_+^m)=E_+^n$, т.е., каково бы ни было состояние $x\in E_+^n$, существует процесс, использующий его, т.е. пара $(x,y)\in Z(\hat{A},\hat{B})$.

Рассуждая так же, как и прежде, придем к модели $\bar{N}$, определяемой конусом $Z(\bar{A},\bar{B})$, где $\bar{A}=(E|A_2)$ и $\bar{B}=(\bar{B}_1|\bar{B}_2)$. Модель $\bar{N}$ в некотором смысле симметрична модели N. Однако, забегая вперед, заметим, что между ними существуют и различия (см. теоремы 5 и 5$'$).

2^0. Рассмотрим неотрицательную квадратную матрицу C, максимальное характеристическое число которой обозначим через τ (будем предполагать $\tau\neq 0$, т.к. случай $\tau=0$ не представляет интереса для рассматриваемого в работе вопроса).

Положим $\mathcal{P}=\{p\,|\,\tau p=pC,\ p\geqslant 0\}$. Представим матрицу C в нормальной форме:

$$C=\left(\begin{array}{cccccc} C_1 & 0\ \dots\ 0 & C_{1,g+1} & \dots & C_{1,s} \\ 0 & C_2\ \dots\ 0 & C_{2,g+1} & \dots & C_{2,s} \\ \hline 0\ \dots & C_g & C_{g,g+1} & \dots & C_{g,s} \\ 0\ \dots & & C_{g+1} & \dots & C_{g+1,s} \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & C_s \end{array}\right) \qquad (I)$$

(здесь $C_1, C_2, \dots, C_s$ - неразложимые матрицы, а в каждом ряду $C_{1,f}, C_{2,f}, \dots, C_{f-1,f}$ $(f = g+1, \dots, s)$ по крайней мере одна из матриц не равна нулю).

Пусть матрицы $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}$ $(1 \le i_j \le s,\ 1 \le j \le k)$ имеют своим максимальным характеристическим корнем число r. Положим $\mathcal{J} = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

Будем говорить, что матрица C обладает свойством (λ), если выполнено одно из двух условий:

I) $k = 1$, 2) при $k > 1$ для каждого j, $1 \le j \le k-1$, существует число $\ell = \ell(j)$, зависящее от j, и последовательность чисел $t_0, t_1, \dots, t_\ell, t_{\ell+1}$ такая, что

$$i_j \le t_0 < t_1 < \dots < t_\ell < t_{\ell+1} \le i_k,$$

где $t_\alpha \bar{\in} \mathcal{J}$, $t_{\ell+1} \in \mathcal{J}$ и $C_{t_\alpha, t_{\alpha+1}} \neq 0$ для всех α, удовлетворяющих условию $0 \le \alpha \le \ell$. Нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА I. Максимальному характеристическому числу r матрицы C соответствует единственный левый собственный вектор $p \ge 0$ $(p \neq 0)$ тогда и только тогда, когда матрица C обладает свойством (λ).

<u>Достаточность</u>. I) Рассмотрим сначала случай, когда $k = 1$. Пусть C_{i_1} - матрица, имеющая число r своим максимальным характеристическим корнем. В соответствии с разбиением матрицы C на блоки (см. (I)), любой вектор $p \in \mathcal{P}$ разобьём на части p^h $(h = 1, 2, \dots, s)$. Тогда для любого вектора $p \in \mathcal{P}$ $(p = (p^1, p^2, \dots, p^s)$ выполняется равенство $p^h = 0$ для всех h, $1 \le h \le i_1 - 1$, а вектор $p^{i_1} = \lambda \bar{p}_r$, где $\lambda > 0$ и $\bar{p}_r$ - положительный левый собственный вектор матрицы C_{i_1}, соответствующий числу r (такой вектор $\bar{p}_r$ существует и единствен по теореме Фробениуса (см.[2] стр.355)).

Остальные векторы p^j, $i_1 + 1 \le j \le s$, найдем по формуле

$$p^j = \Big(\sum_{h=i_1}^{j-1} p^h C_{h,j}\Big) \cdot (r E_j - C_j)^{-1}, \tag{2}$$

где E_j - единичная матрица того же порядка, что и матрица C_j. Поскольку максимальные характеристические числа неразложимых матриц C_j, $i_1 + 1 \le j \le s$, меньше r, то $(r E_j - C_j)^{-1} > 0$

(см.[2] стр. 367), потому векторы $p^j \geq 0$ для всех j, $i_1+1 \leq j \leq s$. Очевидно, что векторы p^j и единственны. Следовательно, вектор $p=(p^1, p^2, \ldots, p^s)$ неотрицателен, отличен от нуля, определяется с точностью до положительного множителя и является решением уравнения $\tau p = pC$.

2) Пусть теперь $k>1$. Тогда, очевидно, векторы $p^h=0$ для всех h, $1 \leq h \leq i_1-1$. Покажем, что $p^h=0$ для любого $h \in \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$. Действительно, предполагая противное, найдем номер j_0 такой, что вектор $p^{i_{j_0}} \neq 0$. Тогда $p^{i_{j_0}} = \lambda \cdot \bar{p}_\tau(C_{i_{j_0}}) > 0$, где $\lambda > 0$ и $\bar{p}_\tau(C_{i_{j_0}})$ – собственный положительный вектор матрицы $C_{i_{j_0}}$, соответствующий числу τ. Пусть выполнено условие $\ell = 0$, т.е. существует натуральное число $t_1 = h > i_{j_0}$, $h \in \{i_{j_0+1}, \ldots, i_k\}$ такое, что $C_{i_{j_0},h} \neq 0$. Тогда для того, чтобы уравнение $\tau p = pC$ имело решение, необходимо выполнение условия

$$p^h(\tau E_h - C_h) = \sum_{j=1}^{h-1} p^j \cdot C_{j,h}.$$

Но это равенство невозможно, так как левая часть его равна нулю, а правая отлична от нуля. Аналогично придем к противоречию, если $\ell \neq 0$.

Из того, что векторы $p^h=0$ для любого $h \in \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$, по формуле (2), следует, что $p^j=0$ для всех j, $i_1 \leq j \leq i_k-1$. Таким образом, векторы $p^i=0$ для всех i, $1 \leq i \leq i_k-1$. Тогда $p^{i_k} = \lambda \bar{p}_\tau(C_{i_k})$, где $\lambda > 0$ и $\bar{p}_\tau(C_{i_k})$ – собственный вектор матрицы C_{i_k} (положительный и единственный с точностью до положительного множителя), соответствующий числу τ. Остальные векторы p^j, $i_k+1 \leq j \leq s$, найдем по формуле (2). Полученный вектор $p=(p^1, p^2, \ldots, p^s)$ неотрицателен, отличен от нуля, определяется с точностью до положительного множителя и, кроме того, является решением уравнения $\tau p = pC$.

Необходимость. Предположим, что требуемый в лемме вектор существует, но матрица C не обладает свойством (λ), т.е. $k>1$ и не выполнены ограничения условия 2). Однако в этом случае уравнение $\tau p = pC$ имеет не менее двух независимых неотрицательных решений. Полученное противоречие показывает справедливость леммы.

СЛЕДСТВИЕ. Максимальному характеристическому числу $\tau > 0$ матрицы C

соответствует единственный положительный левый собственный вектор тогда и только тогда, когда C неразложима или, если C-разложима, то нормальная форма (I) матрицы C не имеет изолированных блоков, r - простой корень C и r-максимальный характеристический корень левого верхнего блока (C_1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы Фробениуса, если C неразложима, и из формулы (2), если C разложима.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложения, аналогичные лемме I и следствию из неё, имеют место, когда вместо левого рассматривается правый собственный вектор.

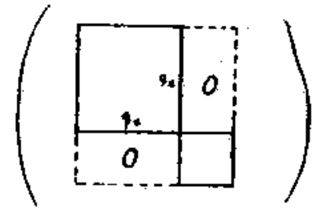
ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{D}$ - неразложимая неотрицательная матрица n-го порядка, число $r(\mathcal{D})$ - её максимальное характеристическое число и $r > r(\mathcal{D})$. Тогда все ненулевые неотрицательные решения неравенства $rp \geq p\mathcal{D}$ положительны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор $\bar{p}$ - решение неравенства $rp \geq p\mathcal{D}$. Положим $Q_1 = \{k / \bar{p}_k > 0,\ 1 \leq k \leq n\}$, $Q_2 = \{k / \bar{p}_k = 0,\ 1 \leq k \leq n\}$, где $\bar{p}_k$ - k-ая координата вектора $\bar{p}$. Неравенство $rp \geq p\mathcal{D}$ запишем в виде:

$$rp_k \geq pd^k, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{3}$$

где d^k - k-ый столбец матрицы $\mathcal{D}$, $\bar{p}_k$ - k-ая координата вектора p. Предполагая, что лемма неверна, будем считать, что $Q_2 \neq \phi$. Из (3) следует, что если $\bar{p}_k = 0$, то скалярное произведение $\bar{p}d^k = 0$. Заметим, что перестановка местами $\bar{p}_{k_1}$ и $\bar{p}_{k_2}$ ($1 \leq k_1;\ k_2 \leq n$), т.е. перенумеровка ортов пространства E^n, влечёт одновременную перестановку строк и столбцов матрицы $\mathcal{D}$. Перенумеруем орты пространства E^n так, чтобы первые q_1 координат вектора $\bar{p}$ были положительны (здесь q_1 - мощность Q_1). Тогда из (3) следует, что матрица $\mathcal{D}$ должна иметь следующий вид:

$\mathcal{D} =$



т.е. $\mathcal{D}$ – разложима. Полученное противоречие показывает, что если существуют ненулевые неотрицательные решения (3), то они должны быть положительными. Чтобы убедиться, что такие решения существуют, достаточно взять $\bar{p} = \lambda \bar{p}_{\tau}(\mathcal{D})$, где $\lambda > 0$ и $\bar{p}_{\tau}(\mathcal{D})$ – левый собственный вектор матрицы $\mathcal{D}$, соответствующий числу $\tau(\mathcal{D})$.

ЛЕММА 3. Пусть относительно матрицы $\mathcal{D}$ выполнены условия леммы 2. Тогда неравенство $\tau p \le p\mathcal{D}$ имеет единственное неотрицательное решение $p = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, и пусть $\bar{p}$ – ненулевое неотрицательное решение неравенства $\tau p \le p\mathcal{D}$. Последнее означает, что

$$\tau \bar{p}_{K} \le \bar{p}\, d^{K}, \quad 1 \le K \le n. \tag{4}$$

Пусть положительные координаты вектора $\bar{p}$ занимают первые q_1 номеров ($1 \le q_1 \le n$). Тогда из (4) следует, что

$$\tau \le \min_{1 \le K \le q_1} \frac{\bar{p} d^{K}}{\bar{p}_{K}} = \min_{1 \le K \le n} \frac{\bar{p} d^{K}}{\bar{p}_{K}} .$$

(Считаем, что $\bar{p} d^{K} / \bar{p}_{K} = \infty$, если $\bar{p}_{K} = 0$).

С другой стороны,

$$\tau > \tau(\mathcal{D}) = \max_{p \ge 0} \min_{1 \le K \le n} \frac{p d^{K}}{p_{K}} \ge \min_{1 \le K \le n} \frac{\bar{p} d^{K}}{\bar{p}_{K}} \ge \tau .$$

Полученное противоречие показывает справедливость леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложения, аналогичные леммам 2 и 3, имеют место, если $\tau < \tau(\mathcal{D})$. Именно: 1) неотрицательным решением неравенства $\tau p \ge p\mathcal{D}$ является только $p = 0$; 2) ненулевые неотрицательные решения неравенства $\tau p \le p\mathcal{D}$ положительны.

Доказательства этих предложений аналогичны доказательствам лемм 2 и 3.

ЛЕММА 4. Неравенство $\tau p \geq pC$ имеет единственное ненулевое неотрицательное решение тогда и только тогда, когда 1) либо C неразложима, 2) либо, если C разложима и τ - максимальное характеристическое число матриц $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}$, то: а) $i_k = s$ (см. (1)), б) равенства $C_{h,s} = 0$ возможны только для таких h, для которых существует t : $t > h$, $t \in \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\}$ такое, что $C_{h,t} \neq 0$.

Достаточность. Если C неразложима, то утверждение леммы очевидно, притом вектор $\bar{p} = \lambda \bar{p}_\tau(C)$, где $\lambda > 0$ и $\bar{p}_\tau(C)$ - положительный собственный левый вектор матрицы C, соответствующий числу τ.

Пусть теперь выполняется условие 2) леммы. Искомое решение неравенства $\tau p \geq pC$ будем искать в форме $\bar{p} = (p^1, p^2, \dots, p^s)$ в соответствии с разбиением на блоки матрицы C (см. (1)). Рассмотрим сперва случай, когда τ - простой характеристический корень матрицы C. Тогда из 2б) следует, что $C_{h,s} \neq 0$ для всех h, $1 \leq h \leq s-1$. По лемме 2 любой вектор p^h, $1 \leq h \leq s-1$, либо равен нулю, либо строго положителен. Далее, для того, чтобы неравенство $\tau p \geq pC$ имело решение, необходимо выполнение условия

$$p^s(\tau E_s - C_s) \geq \sum_{h=1}^{s-1} p^h \cdot C_{h,s},$$

которое справедливо только при $p^h = 0$ для всех h, $1 \leq h \leq s-1$. Из сказанного следует, что вектор $p^s = \lambda \bar{p}_\tau(C_s)$, где $\lambda > 0$ и $\bar{p}_\tau(C_s)$ - положительный собственный левый вектор матрицы C_s, соответствующий числу τ. Таким образом, вектор $\bar{p} = (p^1, p^2, \dots, p^s)$ неотрицателен, отличен от нуля, определяется с точностью до положительного множителя и является решением неравенства $\tau p \geq pC$.

Пусть теперь τ - k-кратный максимальный характеристический корень матрицы C. Если матрицы $C_{h,s} \neq 0$ для всех

h, $1 \le h \le s-1$, то доказательство ничем не отличается от предыдущего случая. Если же матрицы $C_{h_1,s}$, $C_{h_2,s}, \ldots, C_{h_q,s}$ ($h_j \in \{1,\ldots,s-2\}, 1 \le j \le q$) равны нулю, то должно быть $i_{k-1} > h_q$,

г отивном случае условие 2б) леммы не выполняется. Оче- г..., что векторы $p^h = 0$ для всех $h \in \{1,2,\ldots,s-1\} \setminus \{h_1, h_2, \ldots, h_q\}$. ..жем, что векторы $p^{h_j} = 0$ для всех j, $1 \le j \le q$. В м деле, по условию 2б) для любого $j \in \{1,2,\ldots,q\}$ сущест- т натуральное $t > h_j$, $t \in \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$ такое, что $_t \ne 0$. Для того, чтобы неравенство $rp \ge pC$ имело ре- , необходимо выполнение условия:

$$p^t(rE_t - C_t) \ge \sum_{h=1}^{t-1} p^h \cdot C_{h,t}.$$

Но это неравенство может быть справедливым только при равенстве нулю правой части, потому необходимо $p^{h_j} = 0$, т.к. $C_{h_j,t} \ne 0$, а вектор p^{h_j} либо равен нулю, либо строго положителён. Следовательно, векторы $p^h = 0$ для всех h, $1 \le h \le s-1$, а вектор $p^s = \lambda \bar{p}_r(C_s)$, где $\lambda > 0$. Таким образом, $\bar{p} = (p^1, p^2, \ldots, p^s)$ – искомое решение.

<u>Необходимость</u>. Покажем, что при нарушении условий 1) и 2) утверждение леммы неверно. Пусть, например, C – разложима и не выполнено 2а). Положим векторы $p^h = 0$, $1 \le h \le i_{k-1}$, и $p^{i_k} = \lambda \bar{p}_r(C_{i_k})$, где $\lambda > 0$. Тогда неотрицательный вектор p^{i_k+1} не определяется однозначно (с точностью до положительного множителя), что противоречит условию. Аналогично приходим к противоречию в случае, если C – разложима и нарушено 2б).

СЛЕДСТВИЕ. Неравенство $rp \ge pC$ имеет единственное положительное решение тогда и только тогда, когда C неразложима, притом искомое решение $p = \lambda \bar{p}_r(C)$ (где $\lambda > 0$).

ЛЕММА 5. Система неравенств $rp \le pC$ имеет единственное ненулевое неотрицательное решение тогда и только тогда, когда число r является простым максимальным характеристическим корнем C, притом если C разложима и число r - максимальный характеристический корень матрицы $C_{i_0}, 1 \le i_0 \le s$, то при $i_0 < s$ должно быть $C_{i_0,h} = 0$ для всех h таких, что $i_0+1 \le h \le s$.

<u>Достаточность</u>. Если матрица C неразложима, то утверждение леммы очевидно, притом $p = \lambda \bar{p}_r(C)$, где $\lambda > 0$ и $\bar{p}_r(C)$ - положительный собственный левый вектор C, соответствующий числу r. Если C разложима и выполняются условия леммы, то по лемме 3 векторы $p^h = 0$ для всех h, $1 \le h$, $h \le i_0 - 1$. Очевидно, что вектор $p^{i_0} = \lambda \bar{p}_r(C_{i_0})$, где $\lambda > 0$ и $\bar{p}_r(C_{i_0})$ - положительный собственный вектор матрицы C_{i_0}. Остальные векторы p^j, $i_0+1 \le j \le s$, будем находить по формуле :

$$p^j \le \left(\sum_{h=i_0}^{j-1} p^h \cdot C_{h,j}\right) \cdot \left(r E_j - C_j\right)^{-1}. \qquad (5)$$

Из условия леммы следует, что векторы $p^j = 0$ для всех j, $i_0+1 \le j \le s$. Тогда ненулевой неотрицательный вектор $p = (p^1, p^2, \ldots, p^s)$ определяется с точностью до положительного множителя и является решением неравенства $rp \le pC$.

<u>Необходимость</u>. Доказательство проведем от противного. Пусть для определенности r - простой характеристический корень матрицы C, но не выполнено условие: $C_{i_0,h} = 0$ для любого h, $i_0+1 \le h \le s$, т.е. существует натуральное $h_0 \in \{i_0+1, i_0+2, \ldots, s\}$ такое, что матрица $C_{i_0,h_0} \ne 0$. Тогда правая часть (5) для $j = h_0$ является строго положительным вектором. Очевидно, что вектор p^{h_0} в этом случае не определяется однозначно, следовательно, неотрицательный вектор $p = (p^1, p^2, \ldots, p^s)$ - не единственное решение неравенства $rp \le pC$. Аналогично придем к противоречию, если предположить r - кратным характеристическим корнем матрицы C. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Неравенство $rp \le pC$ имеет единственное положительное решение тогда и только тогда, когда матрица C неразложима, притом искомое решение $p = \lambda \bar{p}_r(C)$, где $\lambda > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из доказательства лемм 4 и 5 следует, что единственное неотрицательное решение неравенств $\tau p \leq pC$ и $\geq pC$ достигается на равенстве $\tau p = pC$, т.е. в обоих их единственными неотрицательными решениями этих неравенств являются некоторые собственные левые векторы (вообще ря, они не совпадают) матрицы C, соответствующие числу τ.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предложения, аналогичные леммам 2,3,4,5, замечаниям и следствиям из них, имеют место и для правого собственного вектора.

3^0. Здесь будут рассмотрены модели N и $\bar{N}$, определенные в 1^0. Доказательства теорем мы приводим, как правило, лишь для модели N; аналоги этих теорем для модели $\bar{N}$ формулируются в виде замечаний, т.к. доказательство этих аналогов проводится с помощью тех же рассуждений, что и доказательство теорем для модели N.

Пусть τ – максимальное положительное характеристическое число матрицы A_1, $\mathcal{P}'=\{p \mid pA_1 \geq \tau p, p \geq 0\}$. Для модели N сделаем следующее предположение:

C) Существует вектор $p \in \mathcal{P}'$ такой, что $pA_2 \geq \tau p B_2$, и если множество $\mathcal{P}'$ состоит более чем из одного элемента, то множество $\mathcal{P}''=\{p \mid pA_2 \geq \tau p B_2,\ p \in \mathcal{P}'\}$ тоже состоит более чем из одного элемента.

Условие $pA_2 \geq \tau p B_2$ (или $pa^k \geq \tau p b^k, n < k \leq m$) с экономической точки зрения означает, что затраты при ценах p на последних $m-n$ базисных процессах не меньше соответствующего выпуска (при тех же ценах), умноженного на число τ.

ТЕОРЕМА I. Пусть для модели N выполнено условие C). Тогда число $1/\tau$ является темпом роста модели N с единственным равновесным вектором цен $p \in \mathcal{P}'$ тогда и только тогда, когда матрица A_1 удовлетворяет условиям леммы 5.

<u>Необходимость.</u> Если $1/\tau$ – темп роста модели N с единственным равновесным вектором цен $p \in \mathcal{P}'$, то неравенство $pA \geq \tau p$ должно иметь единственное неотрицательное решение. В противном случае, исходя из предположения C), можно построить пример модели N такой, что $1/\tau$ будет темпом роста

не с единственным равновесным вектором цен $p \in \mathcal{P}'$ (см. замечание 1). Поэтому матрица $\mathcal{A}_1$ должна удовлетворять условиям леммы 5.

Достаточность. По определению число $1/\tau$ является темпом роста модели N, если существуют вектор $\bar{p} \geq 0$ и пара $(\bar{x},\bar{y}) \in Z(\mathcal{A},\mathcal{B})$ такие, что справедливы неравенства: 1) $\bar{p}\mathcal{A} \geq \tau\bar{p}\mathcal{B}$, 2) $\bar{p}\bar{y} > 0$, 3) $\bar{x} \leq \tau\bar{y}$. По лемме 5 существует единственное ненулевое неотрицательное решение p неравенства $p\mathcal{A}_1 \geq \tau p$. Тогда соотношение 1) верно, притом для единственного $\bar{p} \geq 0$. Искомую пару $(\bar{x},\bar{y}) = (\mathcal{A}\bar{u}, \mathcal{B}\bar{u})$, для которой справедливы условия 2) и 3), из определения темпа роста, легко найти, если $\mathcal{A}_1$ - неразложимая матрица. Обозначим через $\bar{u}_\tau$ - положительный правый собственный вектор неразложимой матрицы $\mathcal{A}_1$, соответствующий числу τ (такой вектор по теореме Фробениуса существует, см. [2]). Очевидно, что m - мерный вектор $\bar{u} = (\bar{u}_\tau, 0, \dots, 0)$ таков, что $\bar{x} = \mathcal{A}\bar{u}$, $\bar{y} = \mathcal{B}\bar{u}$, $\bar{x} = \tau\bar{y}$ и $\bar{p}\bar{y} > 0$.

Пусть теперь матрица $\mathcal{A}_1$ разложима. Одновременной перестановкой строк и столбцов (см. [2] стр. 372) матрицу $\mathcal{A}_1$ представим в виде (6). При этом соотношения $p\mathcal{A}_1 \geq \tau pE (p = pE)$, $p\mathcal{A}_2 \geq \tau p\mathcal{B}_2$, $p\mathcal{A}_1 \leq \tau pE$ остаются справедливыми. Покажем это, например, для первого из этих соотношений или, что то же самое, для неравенств $pa^k \geq \tau p_k$, $1 \leq k \leq n$, где a^k - k-ый столбец матрицы $\mathcal{A}_1$. Не нарушая общности, можно считать, что перенумеруются: e_1 в e_2, e_2 в e_1. Нетрудно убедиться, что неравенство $pa^1 \geq \tau p_1$ перейдет в $pa^2 \geq \tau p_2$, и наоборот. Остальные переходят сами в себя. Приведенное обстоятельство впредь особо оговаривать не будем.

Далее искомый вектор $\bar{u}$ найдем следующим образом: последние его $m-n$ координат положим равными нулю, а первые его n координат будем искать в форме $P_{\tau E}\tau\ \bar{u} = (u^1, u^2, \dots, u^s)$ в соответствии с разбиением матрицы $\mathcal{A}_1$ на блоки (см. (6)).

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{A}}_1 & 0 & \dots & 0 & \bar{\mathcal{A}}_{1,q+1} & \dots & \bar{\mathcal{A}}_{1,s} \\ 0 & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & \bar{\mathcal{A}}_q & & & & \bar{\mathcal{A}}_{q,s} \\ 0 & & & \bar{\mathcal{A}}_{q+1} & & & \bar{\mathcal{A}}_{q+1,s} \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & & & & & \bar{\mathcal{A}}_s \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где $\bar{\mathcal{A}}_1, \bar{\mathcal{A}}_2, \ldots, \bar{\mathcal{A}}_s$ – неразложимые матрицы, а в каждом ряду $\bar{\mathcal{A}}_{1,f}, \bar{\mathcal{A}}_{2,f}, \ldots, \bar{\mathcal{A}}_{f-1,f}$ $(f=g+1,\ldots,s)$ по крайней мере одна из матриц не равна нулю.

Пусть τ – максимальный характеристический корень $\bar{\mathcal{A}}_{i_0}$, $1 \leq i_0 \leq s$, тогда по условию теоремы I $\bar{\mathcal{A}}_{i_0,h} = 0$ для всех h, $i_0+1 \leq h \leq s$, при $i_0 < s$. Для простоты рассуждений (не нарушая общности) положим все векторы $u^j = 0$ для всех j, $i_0+1 \leq j \leq s$, (хотя по лемме 2 существуют и векторы $u^j > 0$ для всех таких j), $u^{i_0} = \lambda \bar{u}_\tau(\bar{\mathcal{A}}_{i_0})$, где $\lambda > 0$, $\bar{u}_\tau(\bar{\mathcal{A}}_{i_0})$ – положительный правый собственный вектор неразложимой матрицы $\bar{\mathcal{A}}_{i_0}$, соответствующий числу τ. Вектор u^{i_0-1} найдем из условия:

$$u^{i_0-1} \geq (\tau E_{i_0-1} - \bar{\mathcal{A}}_{i_0-1})^{-1} \mathcal{A}_{i_0-1,i_0} \cdot u^{i_0}.$$

Аналогично находим все остальные векторы $u^{i_0-2}, \ldots, u^1$. Вектор $\bar{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^{i_0}, 0, \ldots, 0)$, очевидно, удовлетворяет условиям 2) и 3). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Число $1/\tau$ – темп роста модели N с единственным и положительным равновесным вектором цен $p \in \mathcal{P}'$ тогда и только тогда, когда матрица $\mathcal{A}_1$ неразложима. (Заметим, что в этом случае множество $\mathcal{P}' = \{\lambda \bar{p}_\tau\}$, где $\lambda > 0$ и $\bar{p}_\tau$ – положительный левый собственный вектор неразложимой матрицы $\mathcal{A}_1$, соответствующий числу τ, потому условие С) принимает следующий вид: $\bar{p}_\tau \mathcal{A}_2 \geq \tau \bar{p}_\tau B_2$).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Для того, чтобы подтвердить вышесказанное, приведем следующий пример модели N. Пусть $\mathcal{A}_1$ состоит из двух блоков с одинаковыми максимальными характеристическими числами, равными τ. Тогда неравенство $p\mathcal{A}_1 \geq p \cdot \tau$ имеет не менее двух независимых неотрицательных решений, потому в соответствии с предположением С) неравенство $p\mathcal{A} \geq \tau p B$ справедливо более чем для одного $p \geq 0$. Очевидно, в данном случае для любого $p \geq 0$, удовлетворяющего неравенству $p\mathcal{A} \geq \tau p B$, существует такой вектор $\bar{u} \in E_+^m$, что $\bar{x} = \mathcal{A}\bar{u} \leq \tau B\bar{u} = \tau \bar{y}$ и $p\bar{y} > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналог теоремы I для модели $\bar{N}$ сформулируем в виде приводимой ниже теоремы I'. Пусть τ – максимальное положительное характеристическое число матрицы $\bar{B}_1$, $Q = \{p \mid p\bar{B}_1 =$

$= \tau p, p \geq 0\}$, $Q' = \{p \mid \tau p \geq p\bar{B}_1, p \geq 0\}$. Для модели $\bar{N}$ примем ограничение $F)$ типа $C)$:

$F)$ Существует вектор $p \in Q'$ такой, что $\tau p \bar{A}_2 \geq p \bar{B}_2$, и если множество Q' состоит более чем из одного элемента, то множество $Q'' = \{p \mid \tau p \bar{A}_2 \geq p\bar{B}_2, p \in Q'\}$ тоже состоит более чем из одного элемента.

Тогда верна следующая

ТЕОРЕМА I$'$. Число τ является темпом роста модели $\bar{N}$, удовлетворяющей условию $F)$, с единственным равновесным вектором цен $p \in Q'$ тогда и только тогда, когда матрица $\bar{B}_1$ удовлетворяет условиям леммы 4.

СЛЕДСТВИЕ. Число τ - темп роста модели $\bar{N}$ с единственным и положительным равновесным вектором цен $p \in Q'$ тогда и только тогда, когда матрица $\bar{B}_1$ неразложима.

ТЕОРЕМА 2. Пусть матрица A_1 удовлетворяет условиям леммы 5, $\bar{p}$ - единственное ненулевое неотрицательное решение неравенства $pA_1 \geq \tau p$. Тогда число $1/\tau$ является темпом роста модели N с единственным равновесным вектором цен $p \in \mathcal{P}'$ тогда и только тогда, когда $\bar{p} A_2 \geq \tau \bar{p} B_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опускаем, т.к. необходимость очевидна, а вторая часть теоремы доказывается так же, как и достаточность в теореме I.

ТЕОРЕМА 2$'$. Пусть матрица $\bar{B}_1$ удовлетворяет условиям леммы 4, $\bar{p}$ - единственное неотрицательное ненулевое решение неравенства $\tau p \geq p\bar{B}_1$. Тогда число τ - темп роста модели $\bar{N}$ с единственным равновесным вектором цен $p \in Q'$ тогда и только тогда, когда $\tau \bar{p} A_2 \geq \bar{p} \bar{B}_2$.

Для модели N рассмотрим технологическое отображение a, определяемое формулой: $a(x)=\{y|(x,y)\in Z(A,B)\}$. Отображение a и его степени a^T (T - натуральное число) - суперлинейны (см.[3]).

ТЕОРЕМА 3. Если $1/\tau$ - темп роста отображения a с единственным и положительным вектором $\bar{p}\in\mathcal{P}'$ и число β - произвольный темп роста отображения a^T, то

I) $\alpha_N=\beta_N=1/\tau$, где α_N и β_N - соответственно технологический и экономический темпы роста модели N,

2) $\sqrt[T]{\beta}=1/\tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия к теореме I следует, что $\mathcal{A}_1$ неразложима. Тогда существует оптимальный процесс $(\bar{x},\bar{y})\in Z(A,B)_2$ такой, что $\bar{x}>0$. В самом деле, пусть u_τ - положительный правый собственный вектор $\mathcal{A}_1$, соответствующий числу τ. Вектор $\bar{u}=(\bar{u}_\tau,0,\dots,0)$ такой, что $\bar{x}=A\bar{u}=\tau B\bar{u}=\tau\bar{y}>0$. Так как $p>0$ и $\bar{x}>0$, то, как известно, $\alpha_N=\beta_N$. Далее из того, что $(1/\tau,(\bar{x},1/\tau\,\bar{x}),\bar{p})$ - состояние равновесия модели, определяемой суперлинейным отображением a, следует, что $(1/\tau^T, (\bar{x},1/\tau^T\bar{y}),\bar{p})$ - состояние равновесия модели, определяемой отображением a^T. Тогда $1/\tau^T$ - единственный темп роста отображения a^T, потому $\sqrt[T]{\beta}=1/\tau$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Условие теоремы 3: $1/\tau$ - темп роста отображения a с единственным и положительным вектором $\bar{p}\in\mathcal{P}'$ равносильно тому, что $\mathcal{A}_1$ неразложима. Если $\mathcal{A}_1$ неразложима, то в модели N нет подмоделей. Требование неразложимости $\mathcal{A}_1$ сильнее, чем просто требование, что в N нет подмоделей, т.к. из последнего не следует неразложимость $\mathcal{A}_1$. Условие неразложимости $\mathcal{A}_1$ слабее известного неймановского требования на модель: каждый процесс либо использует, либо выпускает каждый из продуктов хозяйства. В самом деле, из неймановского требования на модель N следует, что матрица $\mathcal{A}_1$ может иметь нулевые элементы, расположенные только вдоль главной диагонали. Отсюда следует неразложимость $\mathcal{A}_1$. Из неразложимости $\mathcal{A}_1$ не следует неймановское требование (см. пример 2). Условие $\mathcal{D}$, состоящее из неразложимости $\mathcal{A}_1$ и ограничения

$c)$, которое является достаточным условием равенства $\alpha_N = \beta_N$, не пересекается с требованием регулярности модели (см. [I]). Нижеприводимый пример I показывает, что из регулярности модели не следует $\mathcal{D}$, а пример 2 показывает, что из условия $\mathcal{D}$ не следует регулярность модели.

ПРИМЕР I.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & I \\ 1/2 & 2 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} I & 0 & I \\ 0 & I & I \end{pmatrix}$$

Модель, определяемая конусом $Z(\mathcal{A},\mathcal{B})$, регулярна, но $\mathcal{A}_1$ разложима. Число $\alpha = 1$ – единственный темп роста, процесс $(\bar{x}, \bar{y})$ – единственный оптимальный с $\bar{y} = (1,1)$.

ПРИМЕР 2.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & I & 2 & 0 \\ 0 & 0 & I & I & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathcal{A}_1$ неразложима, но модель не регулярна, т.к. процесс $(\bar{x}, \bar{y})$ оптимален, где $\bar{x}$ = (2,2,0,0), $\bar{y}$ =(I,I,0,0) $1/2$ – темп роста.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предложения, аналогичные теореме 3 и замечанию I к ней, имеют место и для модели $\mathcal{N}$, причем эти предложения получаются из соответствующих простой заменой: $1/\tau$ на τ, $\mathcal{A}_1$ на $\bar{\mathcal{B}}_1$, $\mathcal{P}'$ на Q' и условия $c)$ на $F)$.

ТЕОРЕМА 4. Модель N не может иметь темпы роста, меньшие $1/\tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того, чтобы число α было темпом роста модели N, необходимо существование вектора $\bar{p} \geqslant 0 (p \neq 0)$ такого, что $\alpha p \mathcal{A}_1 \geqslant p$. Но это неравенство при $\alpha < 1/\tau$ имеет единственное неотрицательное решение $p = 0$. В самом деле, искомое решение $\bar{p}$ будем искать по-прежнему в виде $\bar{p} = (p^1, p^2, \ldots, p^s)$. Из того, что $\alpha < 1/\tau$ следует, что $1/\alpha > \tau_i$,

$1 \leq i \leq s$ (τ_i - максимальное характеристическое число матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_i$, см. (6)), т.к. $\tau \geq \tau_i$ (см. [2] стр.367). Тогда по лемме 3 все векторы $\rho^h = 0$, $1 \leq h \leq s$. Следовательно, $\alpha \geq 1/\tau$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Модель $\bar{N}$ не может иметь темпы роста, меньшие $\tau' = \min_{1 \leq i \leq s} \tau_i$, где τ_i - максимальный характеристический корень неразложимой матрицы B_i , являющейся диагональным блоком в нормальном разложении матрицы B_1 .

Рассмотрим вопрос о том, когда для модели N число $1/\tau$ - темп роста с единственным равновесным вектором цен $\rho \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} = \{p \mid \tau p = p\mathcal{A}_1, p \geq 0\}$. Наложим на модель ограничение

c$'$) Существует вектор $\rho \in \mathcal{P}$ такой, что $\rho\mathcal{A}_2 \geq \tau\rho B_2$, и если множество $\mathcal{P}$ состоит более чем из одного элемента, то множество $\mathcal{P}''' = \{p \mid p\mathcal{A}_2 \geq \tau p B_2, p \in \mathcal{P}\}$ тоже состоит более чем из одного элемента.

Справедлива

ТЕОРЕМА 5. Число $1/\tau$ - темп роста модели N , удовлетворяющей условию c$'$), с единственным равновесным вектором цен $\bar{p} \in \mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда матрица $\mathcal{A}_1$ удовлетворяет условиям леммы I, притом если τ - κ-кратный ($\kappa > 1$) корень матрицы $\mathcal{A}_1$, то должен существовать вектор $\bar{u} \in E_+^m$, обладающий свойствами: $\bar{x} = \mathcal{A}\bar{u} \leq \tau B\bar{u} = \tau\bar{y}$, $\bar{p}\bar{y} > 0$, и, кроме того, хотя бы одна из последних $m-n$ координат вектора $\bar{u}$, отлична от нуля.

<u>Необходимость.</u> Из ограничения c$'$) следует, что уравнение $p\mathcal{A}_1 = \tau p$ должно иметь единственное решение $\bar{p} \geq 0$ ($p \neq 0$), а потому матрица $\mathcal{A}_1$ должна удовлетворять условиям леммы I. Далее, из того, что $1/\tau$ - темп роста, следует, что существует $\bar{u} \in E_+^m$, $\bar{x} = \mathcal{A}\bar{u} \leq \tau B\bar{u} = \tau\bar{y}$ и $\bar{p}\bar{y} > 0$. Если τ - простой корень, то искомый оптимальный процесс $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z(\mathcal{A}, B)$ найдем так же, как и в теореме I. Если же τ - кратный корень, то не существует вектора $\bar{u} = (u', u'')$, где u' - n -мерный вектор, $u'' = 0$, $\bar{u} \in E_+^m$, чтобы $\bar{x} = \mathcal{A}\bar{u} \leq \tau B\bar{u} = \tau\bar{y}$ и $\bar{p}\bar{y} > 0$ (положе-

но вектор $u' = (u', u^2, \ldots, u^s)$ в соответствии с разбиением матрицы $\mathcal{A}_1$ на блоки, см. (6)).

В самом деле, из доказательства леммы I следует, что векторы p^h либо строго положительны, либо равны нулю для любого h, $i_k \leq h \leq s$, а векторы $p^h = 0$ для любого $h \in \{1, 2, \ldots, i_{k-1}\}$. Так как $\bar{y} = B\bar{u} = B(u', 0) = u'$, то $\bar{p}\bar{y} = \sum_{h=i_k}^{s} p^h u^h$. Если $i_k = s$, то, очевидно, что $\bar{p}\bar{y} = 0$. Пусть теперь $i_k < s$, тогда по лемме 2 или по формуле

$$u^h \geq \left(\tau E_h - \tilde{\mathcal{A}}_h\right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{s-h} \tilde{\mathcal{A}}_{h, h+k} \cdot u^{h+k}\right)$$

все векторы u^h, $s \geq h \geq i_k + 1$, либо равны нулю, либо строго положительны. Ясно, что вектор $u^{i_k} = 0$, так как по условию леммы I, матрица $\tilde{\mathcal{A}}_{i_{k-1}, i_k} \neq 0$ и должно быть справедливо

$$\sum_{j=1}^{s-i_{k-1}} \tilde{\mathcal{A}}_{i_{k-1}, i_{k-1}+j} \cdot u^{i_{k-1}+j} \leq \left(\tau E_{i_{k-1}} - \tilde{\mathcal{A}}_{i_{k-1}}\right)^{-1} u^{i_{k-1}}.$$

Нетрудно убедиться и в том, что если $p^h > 0$, $i_k < h \leq s$, то $u^h = 0$. Потому $\bar{p}\bar{y} = 0$. Из сказанного следует, что существует вектор $\bar{u} \in E_+^m$, обладающий свойствами, указанными в теореме.

<u>Достаточность.</u> Если τ - простой корень, то доказательство аналогично доказательству достаточности теоремы I. Если τ - кратный корень, то оно очевидно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Число $1/\tau$ - темп роста модели N с единственным положительным равновесным вектором цен тогда и только тогда, когда матрица $\mathcal{A}_1$ удовлетворяет условиям следствия леммы I.

ЗАМЕЧАНИЕ I. То, что матрица $\mathcal{A}_1$ удовлетворяет условиям леммы I, является необходимым и достаточным условием того, что $1/\tau$ - обобщенный темп роста N с единственным равновесным вектором цен $p \in \mathcal{P}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Наложим на модель $\hat{N}$ ограничение

$F')$ Существует вектор $p \in Q$ такой, что $\tau p \bar{A}_2 \geq p \bar{B}_2$, и если множество Q состоит более чем из одного элемента, то множество $Q''' = \{p \mid \tau p \bar{A}_2 \geq p \bar{B}_2, p \in Q\}$ тоже состоит более чем из одного элемента.

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 5$'$. Число τ - темп роста модели $\bar{N}$, удовлетворяющей условию $F')$, с единственным равновесным вектором цен $p \in Q$, тогда и только тогда, когда матрица $\bar{B}_1$ удовлетворяет условиям леммы I.

Доказательство аналогично доказательству теоремы I.

СЛЕДСТВИЕ. Число τ - темп роста модели $\bar{N}$ с единственным положительным равновесным вектором цен тогда и только тогда, когда $\bar{B}_1$ удовлетворяет условиям следствия леммы I.

ТЕОРЕМА 6. Пусть матрица $\mathcal{A}_1$ удовлетворяет условиям леммы I, вектор $\bar{p}$ - единственное ненулевое неотрицательное решение уравнения $p\mathcal{A}_1 = \tau p$. Тогда число $1/\tau$ - темп роста модели N с единственным равновесным вектором цен $\bar{p} \in \mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда I) либо $\bar{p}\mathcal{A}_2 \geq \tau \bar{p} B_2$, если τ - простой корень матрицы $\mathcal{A}_1$; 2) либо $\bar{p}\mathcal{A}_2 \geq \tau \bar{p} B_2$ и существует $\bar{u} \in E_+^m$, что $\mathcal{A}\bar{u} \leq \tau B \bar{u}$, $\bar{p} B \bar{u} > 0$, причем хотя бы одна из последних $m-n$ координат вектора $\bar{u}$ отлична от нуля.

ТЕОРЕМА 6$'$. Пусть матрица $\bar{B}_1$ удовлетворяет условиям леммы I, $\bar{p}$ - единственное ненулевое неотрицательное решение уравнения $p\bar{B}_1 = \tau p$. Тогда число τ - темп роста модели $\bar{N}$ с единственным равновесным вектором цен $p \in Q$ тогда и только тогда, когда $\tau \bar{p} \bar{\mathcal{A}}_2 \geq \bar{p} \bar{B}_2$.

4^0. Рассмотрим теперь случай, когда $\bar{A}_1$ или $\bar{B}_1$ состоит из изолированных блоков (см. [2] стр. 373) или приводится к этому виду перестановкой рядов. На этот раз докажем приводимые ниже теоремы для модели $\bar{N}$. Аналогичные теоремы имеют место и для модели N.

Пусть $\bar{B}_1$ состоит из s изолированных блоков $B_1, B_2, \dots, B_s$, расположенных по главной диагонали, τ_i – максимальное положительное характеристическое число неразложимой матрицы B_i, $1 \le i \le s$, $\bar{u}_{\tau_i}$ и $\bar{p}_{\tau_i}$ – собственные векторы, соответствующие числу τ_i, матриц B_i и B_i^T (B_i^T – матрица, полученная транспонированием B_i), $\mathcal{J}(B_i)$ – множество номеров строк матрицы B_i, n_i – мощность множества $\mathcal{J}(B_i)$.

Пусть для модели $\bar{N}$ справедливы соотношения

$$\tau_i \bar{p}_{\tau_i} a_i^k \ge \bar{p}_{\tau_i} b_i^k, \quad n+1 \le k \le m, \quad (+),$$

где a_i^k и b_i^k – векторы-столбцы матриц $\bar{A}$ и $\bar{B}$, расположенные на строках с номерами $i \in \mathcal{J}(B_i)$. Условие $(+)$ допускает такую же экономическую интерпретацию, что и ограничение $c)$ на модель N.

ТЕОРЕМА 7. В модели $\bar{N}$, удовлетворяющей условию $(+)$, числа τ_i и только они являются темпами роста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать, что τ_i – темп роста, достаточно взять m-мерный вектор интенсивностей $\bar{u} = (0, \dots, \bar{u}_{\tau_i}, 0, \dots, 0)$ и n-мерный вектор $\bar{p} = (0, \dots, \bar{p}_{\tau_i}, 0, \dots, 0)$. Для доказательства второй части теоремы возьмем число α – произвольный темп роста модели $\bar{N}$ и покажем, что существует $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, такое, что $\tau_i = \alpha$. Из того, что α – темп роста модели $\bar{N}$, следует, что существуют вектор $\bar{p} \ge 0$ и пара $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z(\bar{A}, \bar{B})$ такие, что $\bar{p}\bar{x} > 0$, $\alpha \bar{x} \le \bar{y}$, $\alpha \bar{p} x > \bar{p} y$ для всех $(x, y) \in Z(\bar{A}, \bar{B})$. Из $\bar{p}\bar{x} > 0$ следует, что существует натуральное i_0, $1 \le i_0 \le s$, такое, что i_0 – координаты $\bar{p}_{i_0}$ и $\bar{x}_{i_0}$ векторов $\bar{p}$ и $\bar{x}$ положительны. Не нарушая общности, можно считать, что $i_0 \in \mathcal{J}(B_i)$. Из $\alpha \bar{p} x \ge \bar{p} y$ для всех $(x, y) \in Z(\bar{A}, \bar{B})$ следует, что $\alpha \bar{p} \bar{x}^i \ge \bar{p} \bar{y}^i$, где n-мерные векторы $\bar{x}^i$ и $\bar{y}^i$ определены следующим образом:

$$\bar{x}^i = (0, \dots, \bar{u}_{\tau_i}, 0, \dots, 0), \quad \bar{y}^i = \bar{B}_1 \bar{x}^i = \tau_i \bar{x}^i \quad (\text{где } \bar{u}_{\tau_i} > 0).$$

Тогда из $\alpha \bar{p} \bar{x}^i \ge \bar{p} \bar{y}^i$ следует, что $\alpha \ge \tau_i$, т.к. $p \bar{x}^i > 0$.

С другой стороны, из $\alpha\bar{x}\le\bar{y}$ следует, что $\alpha P_{\tau_{\Gamma_i}}\bar{x}\le P_{\tau_{\Gamma_i}}\bar{y}$,
(где Γ_i – пространство, натянутое на орты e_i, $i\in\mathcal{J}(B_i)$),
т.е. $P_{\tau_{\Gamma_i}}\bar{y}=\alpha P_{\tau_{\Gamma_i}}\bar{x}+\Delta$, где $\Delta\geqslant 0$. Тогда $(\tau_i-\alpha)p_{\tau_i}P_{\tau_{\Gamma_i}}\bar{x}\geqslant 0$, отсюда $\tau_i\geqslant\alpha$. Итак, $\alpha=\tau_i$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I.

$$\alpha_{\bar{N}}=\max_{1\le i\le s}\tau_i \quad \text{и} \quad \beta_{\bar{N}}=\min_{1\le i\le s}\tau_i.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если для темпа роста $\tau(\tau')$ модели $\bar{N}$ существует оптимальный положительный собственный вектор $\bar{x}$ (оптимальный собственный положительный вектор $\bar{p}$), то $\alpha_{\bar{N}}=\beta_{\bar{N}}$.

В частности, если $\bar{B}_1$ – квазидиагональна, т.е. $\tau=\tau_i$ для всех i, $1\le i\le s$, то условие следствия 2 выполнено, потому $\alpha_{\bar{N}}=\beta_{\bar{N}}$.

Более того, справедлива

ТЕОРЕМА 8. Если $\bar{B}_1$ состоит из изолированных блоков и выполнено $(+)$, то $\alpha_{\bar{N}}=\beta_{\bar{N}}$ тогда и только тогда, когда $\bar{B}_1$ квазидиагональна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{B}_1$ квазидиагональна, то справедливость теоремы 8 следует из следствия 2. Если же $\bar{B}_1$ не квазидиагональна, то, исходя из условия теоремы 8, по теореме 7 заключаем, что модель $\bar{N}$ имеет не менее двух темпов роста. Этим противоречием завершается доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из условия $(+)$ следует, что для темпа роста $\tau=\max_{1\le i\le s}\tau_i$ существует положительный оптимальный вектор цен $\bar{p}=(p^1, p^2, \dots, p^s)$, более того, оптимальным вектором цен для τ является любой вектор $\bar{p}=(\lambda_1\bar{p}_{\tau_1},\dots,\lambda_i\bar{p}_{\tau_i},\dots,\lambda_s\bar{p}_{\tau_s})$, где $\lambda_j\geqslant 0$, $\lambda_i>0$, $i\ne j$, $1\le i, j\le s$, если $\tau=\tau_i$. Отсюда, в частности, получаем, что из существования $\bar{p}>0$ не следует $\alpha_{\bar{N}}=\beta_{\bar{N}}$. Аналогично, для $\tau'=\min_{1\le i\le s}\tau_i$ существует положительный оптимальный вектор $\bar{x}=(\bar{x}_{\tau_1},\dots,\bar{x}_{\tau_s})$, любой вектор $\bar{x}=(\lambda_1\bar{x}_{\tau_1},\dots,\lambda_i\bar{x}_{\tau_i},\dots,\lambda_s\bar{x}_{\tau_s})$, где $\lambda_j\geqslant 0$, $\lambda_i>0$, $i\ne j$, $1\le j\le s$, $\tau'=\tau_i$, является оптимальным собственным вектором для τ'.

Так как из $\tau'\bar{x}\le\bar{y}$ следует, что существует $\bar{y}>0$, то отсюда, в частности, следует, что условие полурегулярности $\bar{N}$, .

недостаточно для справедливости $\alpha_{\bar{R}}=\beta_{\bar{R}}$ (см. [5]).

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\bar{B}_1$ состоит из изолированных блоков и выполнено $(+)$. Тогда из того, что α – темп роста отображения α^T, следует, $\sqrt[T]{\alpha}$ – темп роста технологического отображения α.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ число τ_i^T является единственным темпом роста α^T над Γ_i^+ (Γ_i^+ – положительный ортант пространства Γ_i), притом с положительными оптимальными векторами $\bar{p}_{\tau_i}$ и $\bar{x}_{\tau_i}$. Тогда любой темп роста α^T совпадает с одним из τ_i^T (доказывается так же, как и в теореме 7). Отсюда $\sqrt[T]{\alpha}=\tau_i$ – темп роста α над E_+^n.

Автор благодарит своего руководителя А.М.Рубинова за внимание и помощь в работе.

Литература

1. Д.Гейл. Замкнутая линейная модель производства – в сборнике "Линейные неравенства и смежные вопросы", ИЛ, Москва, 1959.
2. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц . "Наука", М. 1967.
3. А.М.Рубинов. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства – в сборнике "Оптимальное планирование", "Наука", 9, 1967, 87–111.
4. В.Л.Макаров. Автореферат диссертации, Новосибирск, 1968.
5. В.Л.Макаров. Об условиях равновесия в моделях Неймана . Сиб. мат. журнал, 1962, т.3, № 3, 476–478.

Поступила в редакцию
7.VII. 1970 г.