УДК 512.25/26

КВАЗИСТРАТЕГИИ В ПОЗИЦИОННЫХ ИГРАХ НА ГРАФАХ

Б.М.Конурбаева

Введение

Одной из основных задач теории игр является задача редукции стратегий, т.е. выделение некоторого, по возможности более узкого подмножества множества всех смешанных стратегий, и доказательство эквивалентности каждой смешанной стратегии некоторой стратегии из выделенного подкласса. Имеются различные пути редуцирования. Например, в работах [5] и [6] используется следующий метод. Для игр, заданных на деревьях, известно (см.[I]), что для эквивалентности смешанных стратегий μ_1 и μ_2 некоторого фиксированного игрока необходимо и достаточно, чтобы для каждой окончательной позиции x дерева K имело место равенство $\mu_1[x]=\mu_2[x]$. Следовательно, для произвольного класса эквивалентных смешанных стратегий вектор $\{\mu[x]\}_{x\in\bar{X}}$, где $\bar{X}$ – множество всех окончательных позиций, а μ – произвольная стратегия из этого класса, является характеристическим. Произвольный вектор $\{\rho[x]\}_{x\in\bar{X}}$ с неотрицательными компонентами, подчиняющийся некоторым условиям согласованности, называется квазистратегией. Теорема об эквивалентности звучит так: для любой смешанной стратегии μ вектор $\{\mu[x]\}_{x\in\bar{X}}$ является квазистратегией, и по любой квазистратегии $\{\rho[x]\}_{x\in\bar{X}}$ можно найти смешанную стратегию μ, такую, что для всех окончательных позиций x $\mu[x]=\rho_x$. Грубо говоря, первая часть теоремы утверждает, что каждая смешанная стратегия имеет эквивалентную квазистратегию, а вторая – что множество квазистратегий является подмножеством множества смешанных стратегий. В [5] эта теорема доказана для игр с полной памятью, в [6] - для произвольных игр.

В данной работе этот метод редуцирования применяется к играм, заданным на произвольных ориентированных ациклических графах. (Определение этих игр и основные понятия, их касающиеся, нужно смотреть в [7]). В отличие от игр, заданных на деревьях, в играх на графах в позицию x можно попасть различными путями поэтому, вообще говоря, невозможно разумным способом определить вероятность попадания в x в условиях смешанной стратегии игрока. Для каждой позиции x вводится множество $P(x)$ генеалогических вариантов x относительно рассматриваемого игрока, где каждый генеалогический вариант есть частичная стратегия игрока, определяющая некоторый путь, по которому можно попасть в x. (В играх, заданных на деревьях, для каждой не минимальной позиции x определен ровно один генеалогический вариант - это частичная стратегия игрока, заданная на всех информационных множествах, предшествующих x, и выбирающая на каждой из них альтернативу, направленную в x). Тогда для каждой позиции x, каждого его варианта π_v из множества $P(x)$ и смешанной стратегии μ можно говорить о вероятности $\mu[x \mid \pi_v]$ попадания в x по варианту x в условиях μ. Имеем следующий критерий эквивалентности: для того, чтобы смешанные стратегии μ_1 и μ_2 были эквивалентны, достаточно, чтобы для всех окончательных позиций x и всех $\pi_v \in P(x)$ $\mu_1[x \mid \pi_v] = \mu_2[x \mid \pi_v]$. Таким образом, использование предыдущего критерия нам дает более мелкое разбиение R смешанных стратегий, чем разбиение на эквивалентные элементы, причём для каждого класса $A \in R$ характеристическим является вектор $\{\mu[x \mid \pi_v]\}_{\pi_v \in P(x),\ x \in \bar{X}}$, где μ - произвольный элемент A. Оказывается, и в этом случае можно ввести понятие квазистратегии и доказать теорему об эквивалентности.

Используется терминология из [3], [4], а также терминология, обозначения и результаты [7].

Игра будет исследоваться относительно одного фиксированного игрока k, поэтому через π, μ, U, Y, Π будем обозначать его чистую и смешанные стратегии, множество информационных множеств, множество позиций и множество чистых стратегий. Буквы " X " и " $\bar{X}$ " сохраняются для обозначения множества всех вершин и всех окончательных вершин графа K. Под минимальным элементом, генеалогическим вариантом x, генеалогией $P(x)$ $(x \in X)$ будем подразумевать κ – минимальный элемент, κ – генеалогический вариант x, κ – генеалогию $P_\kappa(x)$. Для каждого $x \in X$ через $U(x)$ обозначаем множество всех информационных множеств игрока κ, предшествующих x.

§ I. Упорядочение множеств всех информационных множеств и частичных стратегий

Пусть u_1, $u_2 \in U$. Скажем, что u_1 и u_2 связаны в $C_n(K)$, если либо $u_1 < u_2$, либо $u_2 < u_1$. Произвольный ориентированный ациклический граф G с множеством вершин U назовем допустимым, если

1) любые u_1, $u_2 \in U$, связанные в $C_n(K)$, связаны в G;

2) каково бы ни было $x \in X$, в множестве $U(x)$ найдется максимальный относительно частичного упорядочения на U, порожденного транзитивным замыканием графа G, элемент $\bar{u}(x)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Множество всех допустимых графов не пусто.

Зафиксируем произвольный допустимый граф G. Тогда множество U строго частично упорядочено отношением " α " (отношением предшествования), порожденным транзитивным замыканием G.

Через " $<_0$ " обозначим бинарное отношение, порожденное минимальным порождающим графом для G и назовем его отношением непосредственного предшествования, а через " $\bar{\alpha}$ " – отношение частичного упорядочения на U, полученного добавлением петли для каждого $u \in U$ в отношении " α ".

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. U индуктивно относительно упорядочения " $\bar{\alpha}$ ".

Пусть $u \in U$. Обозначим через $R(u)$, $\bar{R}(u)$, $\mathcal{G}_{R(u)}$, $\Pi_{R(u)}$, $Q(u)$ – множество всех $\bar{u} \in U$, предшествующих u, множество

$R(u)\cup\{u\}$, произвольную $R(u)$ - частичную стратегию, множество всех $\mathcal{T}_{R(u)}$ и множество всех $\tilde{u}\in U$, непосредственно предшествующих u, соответственно.

Множество

$$S(u)=\{\mathcal{T}_{\bar{U}}\mid\mathcal{T}_{\bar{U}}\in P(x),\ x\in\bar{X},\ \ \bar{U}\cap R(u)\neq\Lambda,\ \ u\tilde{\alpha}\hat{u}(x),\ \mathcal{T}_{\bar{U}}\prec(\mathcal{T}_{\bar{U}})_{R(u)}\}$$

назовем **множеством стволов для** u, а произвольный его элемент **стволом для** u. Таким образом, ствол - это проекция на $R(u)$ генеалогического варианта окончательной позиции.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. **Пусть** $u_1, u_2\in U$, $u_1\alpha u_2$, $\mathcal{T}_{\bar{U}}\in S(u_2)$. **Тогда если** $\bar{U}\cap R(u_1)\neq\Lambda$, **то**

$$Pr_{R(u_1)}\mathcal{T}_{\bar{U}}\in S(u_1).$$

Назовем $\mathcal{T}^1_{R(u)}$ и $\mathcal{T}^2_{R(u)}$ эквивалентными $(\mathcal{T}^1_{R(u)}\sim\mathcal{T}^2_{R(u)})$, если для каждого ствола для u они одновременно являются или нет его продолжениями.

Очевидно, что отношение " $\sim$ " является отношением эквивалентности в $\Pi_{R(u)}$ и, следовательно, порождает его разбиение $\{\Pi^{\kappa}_{R(u)}\}^{\Delta(u)}_{\kappa=1}$ на эквивалентные элементы. Скажем, что $R(u)$ - частичная стратегия $\mathcal{T}_{R(u)}$ **вполне не существенна** для u, если она не существенна для всех $\tilde{u}$, таких, что $u\tilde{\alpha}\tilde{u}$. Мы хотим добиться максимально возможной редукции, поэтому, пользуясь свойством вполне не существенных стратегий, при построении информационной структуры мы будем "склеивать" все $\mathcal{T}_{R(u)}$, проекции которых на $R(u)$ вполне не существенны для u.

Пусть $u\in U$. Нетрудно видеть, что любые две эквивалентные $R(u)$ - частичные стратегии одновременно либо вполне не существенны для u, либо нет. Если выполнено хотя бы одно из двух: а) K - древовидно, б) любому информационному множеству $\tilde{u}$, непосредственно следующему за u, непосредственно предшествует только u, то любые две вполне не существенные стратегии эквивалентны. В этом случае положим $\delta(u)$ равным числу классов эквивалентных вполне существенных для u стратегий, в противном случае полагаем $\delta(u)=\Delta(u)$.

§ 2. Некоторые разбиения Π

Пусть Z – произвольное множество, $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_m$ – произвольные классы подмножеств Z. Под объединением $\bigcup_{i=1}^{m} \Sigma_i$ классов $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_m$ будем понимать класс, состоящий из всех подмножеств множества Z, попавших хотя бы в одно Σ_i, $i = 1,2,\ldots, m$, а под пересечением $\bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i$ классов $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots,$ Σ_m – класс, состоящий из всех подмножеств Z вида $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$, где $A_i \in \Sigma_i$, $i = 1,2,\ldots, m$. Скажем, что класс Σ_1 крупнее, чем Σ_2, если каждый элемент Σ_1 есть объединение некоторого числа элементов Σ_2.

Пусть u, $\tilde{u} \in U$ и $u \propto \tilde{u}$. Разбиение $\{\Pi^{\kappa}_{R(\tilde{u})}\}_{\kappa=1}^{\Delta(\tilde{u})}$ множества $\Pi_{R(\tilde{u})}$ на эквивалентные элементы индуцирует покрытие $\{\Pi^{\kappa}_{R(u)}, \tilde{u}\}_{\kappa=1}^{\Delta(\tilde{u})}$ множества $\Pi^{\kappa}_{R(\tilde{u})}$, где $\Pi^{\kappa}_{R(u)}, \tilde{u}$ есть образ в $\Pi_{R(u)}$ множества $\Pi_{R(u)}, \tilde{u}$ относительно оператора проектирования. Легко видеть, что покрытие $\Pi_{R(u)}, \tilde{u}$ множества $\Pi_{R(u)}$ крупнее, чем его разбиение на эквивалентные элементы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть u, $\tilde{u} \in U$, $u \propto \tilde{u}$ и $\mathcal{T}_{R(\tilde{u})} \in \Pi_{R(\tilde{u})}$. Пусть, далее, $\mathcal{T}'_{R(u)}$ – произвольная $R(u)$ – частичная стратегия, эквивалентная проекции $\mathcal{T}_{R(u)}$ стратегии $\mathcal{T}_{R(\tilde{u})}$ на $R(u)$. Найдется продолжение $\mathcal{T}'_{R(u)} \in \Pi_{R(u)}$ стратегии $\mathcal{T}'_{R(u)}$, эквивалентное $\mathcal{T}_{R(u)}$ и выбирающее на u ту же альтернативу, что и $\mathcal{T}_{R(\tilde{u})}$.

Зафиксируем любое $u \in U$. Обозначим через Σ^u разбиение множества Π, индуцированное разбиение $\Pi_{R(u)}$ на эквивалентные элементы, т.е. $\Sigma^u = \bigcup_{\kappa=1}^{\Delta(u)} \Sigma^{u,\kappa}$ и через Σ_u разбиение

$$\langle \Sigma_u^{j,\nu_u}, \Sigma^{u,\kappa} / j = 1, 2, \ldots, \delta(u), \ \nu_u \in \Pi_u, \ \kappa = \delta(u)+1, \ldots, \Delta(u) \rangle,$$

где для всех $\kappa = 1,2,\ldots,\ \Delta(u)\ \Sigma^{u,\kappa}$ есть прообраз в Π множества $\Pi^{\kappa}_{R(u)}$ относительно оператора проектирования, и для всех $j = 1,2,\ldots,\ \delta(u)$, $\vartheta_u \in \Pi_u$, а $\Sigma^{j}_{R(u)}$ есть множество всех таких прообразов в Π элементов из $\Pi^{j}_{R(u)}$, которые на u выбирают альтернативу ϑ_u, т.е.

$$\Sigma^{j,\vartheta_u}_{u} = \{\mathcal{T}/\mathcal{T}\in\Pi,\ \mathcal{P}r_{R(u)}\mathcal{T}\in\Pi^{j}_{R(u)},\ \mathcal{T}(u)=\vartheta_u\}.$$

Очевидно, что разбиение Σ^{u} множества Π крупнее, чем разбиение Σ_u.

Обозначим через Σ_G покрытие

$$\bigcup_{u\in U}\left[\Sigma_u \cup \bigcup_{\tilde{u}\in Q(u)} \left(\Sigma^{u}\cap\Sigma_{\tilde{u}}\right)\right]$$

множества Π. Алгебру, порожденную классом Σ_G, обозначим через σ_G.

Пусть μ - смешанная стратегия, тогда она индуцирует вероятностную меру $P^{(\mu)}$ на алгебру σ_G, такую, что для всех $A\in\Sigma_G$, $P_A=\mu[A]$. Допустим теперь, что на алгебре σ_G имеется вероятностная мера P, индуцированная некоторой смешанной стратегией μ.

Пусть $x\in X$ - произвольная не минимальная позиция K, $\mathcal{T}_{\bar{v}}\in P(x)$. Покажем, что, зная P, можно определить вероятность x в условиях μ по генеалогическому варианту $\mathcal{T}_{\bar{v}}$ (заметим, что если x - минимальная позиция, то $\mu[x]=1=P_n$).

Вспомним, что

$$\mu[x/\mathcal{T}_{\bar{v}}] = \sum_{\substack{\mathcal{T}\in\Pi \\ (x/\mathcal{T}_{\bar{v}})\in\mathcal{P}_{oss}\mathcal{T}}} \mu[\mathcal{T}].$$

Нетрудно установить истинность следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.

1. Если $(x/\mathcal{T}_{\bar{v}})\in\mathcal{P}_{oss}\,\mathcal{T}_{R(\hat{u}(x))}$, то $(x/\mathcal{T}_{\bar{v}})\in\mathcal{P}_{oss}\,\mathcal{T}$ для любого продолжения $\mathcal{T}\in\Pi$ стратегии $\mathcal{T}_{R(\hat{u}(x))}$.

2. Если $(x|\mathcal{T}_{\bar{v}})\in\mathcal{P}_{oss}\,\mathcal{T}_{R(\hat{u}(x))}$ и $\mathcal{T}_{R(\hat{u}(x))}$

вполне не существенно для $\hat{u}(x)$, то $(x/\mathcal{X}_{\bar{v}}) \in \mathcal{P}_{oss}\ \mathcal{X}'_{R(\hat{u}(x))}$ для любой эквивалентной $\mathcal{X}_{R(\hat{u}(x))}$ $R(\hat{u}(x))$- частичной стратегии $\mathcal{X}'_{R(\hat{u}(x))}$.

3. Если $(x/\mathcal{X}_{\bar{v}}) \in \mathcal{P}_{oss}\ \mathcal{X}_{R(\hat{u}(x))}$, то $(x/\mathcal{X}_{\bar{v}}) \in \mathcal{P}_{oss}\ \mathcal{X}'_{R(\hat{u}(x))}$ для любой такой стратегии $\mathcal{X}'_{R(\hat{u}(x))}$, что а) она выбирает на $\hat{u}(x)$ ту же альтернативу, что и $\mathcal{X}_{R(\hat{u}(x))}$, и б) проекции стратегий $\mathcal{X}_{R}(\hat{u}(x))$ и $\mathcal{X}'_{R(\hat{u}(x))}$ на $R(\hat{u}(x))$ эквивалентны.

Теперь легко проверить предложение, сформулированное выше. Для любого $A \in \Sigma\hat{u}(x)$ положим $A \in Rel(x/\mathcal{X}_{\bar{v}})$, если найдется $\mathcal{X} \in A$, такое, что $(x/\mathcal{X}_{\bar{v}}) \in \mathcal{P}_{oss}\ \mathcal{X}$. Имеем:

$$\mu[x/\mathcal{X}_{\bar{v}}] = \sum_{\mathcal{X} \in Rel(x/\mathcal{X}_{\bar{v}})} \mu[\mathcal{X}] =$$

$$= \sum_{\substack{A \in \Sigma\hat{u}(x) \\ A \in Rel(x/\mathcal{X}_{\bar{v}})}} \mu[A] = \sum_{\substack{A \in \Sigma\hat{u}(x) \\ A \in Rel(x/\mathcal{X}_{\bar{v}})}} \rho_A .$$

То есть действительно, зная вероятностную меру ρ на σ_G, индуцированную некоторой стратегией μ, мы можем для всех $x \in X$ определить вероятность $\mu[x/\mathcal{X}_{\bar{v}}]$ попадания в x в условиях μ по генеалогическому варианту $\mathcal{X}_{\bar{v}}$.

Таким образом, каждая стратегия вполне задается индуцированной на σ_G вероятностной мерой. Далее рассматривается обратная задача: какие вероятностные меры на σ_G можно продолжить в меру на Π, точнее, какие меры на σ_G индуцируются смешанными стратегиями.

§ 3. Построение информационной структуры и понятие квазистратегии

По исходной позиционной структуре $C_n(K)$ строим информационную структуру Γ следующим образом.

I. По каждому $u_k \in U$ строим множество V_k, состоящее из $\Delta(u_k)$ вершин (позиций), которое называем информационным множеством структуры Γ.

Впредь, особо это не оговаривая, будем через u , $\tilde{u}$, u_i , и т.д. обозначать информационные множества в $C_n(K)$, а через v , $\tilde{v}$, v_i и т. д. – соответствующие им информационные множества в T . Множество всех информационных множеств T обозначим через V . Для каждого $v \in V$ фиксируем произвольное взаимно однозначное отображение $\kappa(z)$ множества всех позиций из v на множество $\{1, 2, \dots, \Delta(u)\}$. Пусть $z \in v \in V$. Позицию z будем называть **о с н о в н о й** , если $1 \le \kappa(z) \le \delta(u)$, и **у с л о в н о й** – в противном случае. Заметим, в каждом $v \in V$ может иметься не более одной условной позиции.

2. Каково бы ни было $v \in V$, из каждой основной позиции выходит столько дуг, сколько имеется дуг информационного множества u . Таким образом, каждой дуге α , выходящей из z , соответствует ровно одна альтернатива $\nu(\alpha) \in \Pi_u$.

3. Пусть $z \in v \in V$, z – основная позиция, α – дуга, выходящая из z . Дуга α оканчивается **в с п о м о г а т е л ь н о й в е р ш и н о й (п о з и ц и е й)**, из которой выходит столько дуг, сколько имеется информационных множеств в U , непосредственно следующих за u . Каждая такая дуга оканчивается **д о п о л н и т е л ь н о й в е р ш и н о й (п о з и ц и е й)**. Итак, каждому $\tilde{u} \in U$, $u <_\circ \tilde{u}$ соответствует единственная дополнительная позиция $y(\alpha, \tilde{u})$, в которую можно попасть по дуге α . Так как каждая альтернатива $\nu \in \Pi_u$ единственным образом определяет дугу α , выходящую из z , $\nu(\alpha) = \nu$, то наряду с $y(\alpha, \tilde{u})$ будем использовать запись $y(\nu, \tilde{u})$.

4. Рассмотрим любые u , $\tilde{u} \in U$, $u <_\circ \tilde{u}$ и любые такие позиции $z \in v$, $\tilde{z} \in \tilde{v}$, что найдутся согласованные стратегии $\pi_{R(u)} \in \Pi^{\kappa(z)}_{R(u)}$ и $\pi_{R(\tilde{u})} \in \Pi^{\kappa(\tilde{z})}_{R(\tilde{u})}$. Если z оказалась условной позицией, то проводим дугу из z в $\tilde{z}$. В противном случае проводим дугу из дополнительной позиции $y(\pi_{R(\tilde{u})}(u), \tilde{u})$ в позицию $\tilde{z}$.

5. Для каждой вспомогательной позиции z , из которой выходит одна дуга $\alpha = (z, z_2)$ "склеиваем" α с дугой $\beta = (z_1, z)$, входящей в z , т.е. из T выбрасываются дуги α , β и вершина z и вводится дуга (z_1, z_2) . Затем то же проделываем для каждой дополнительной позиции.

6. Полученный ориентированный граф с информационным делени-

ем назовем **информационной структурой** T.

Пусть u, $\tilde{u} \in U$. Если $u \propto \tilde{u}$ $(u <_o \tilde{u})$, то будем говорить, что v **предшествует** $\tilde{v}$ (v **непосредственно предшествует** $\tilde{v}$) и обозначать это через $v < \tilde{v}$, $v <_o \tilde{v}$.

Через $Q(v)$ обозначим множество информационных множеств T, непосредственно предшествующих v. Назовем v **минимальным**, если $Q(v) = \Lambda$. На множестве всех вершин T имеется отношение "<" строгого частичного упорядочения (отношение предшествования), порожденной транзитивным замыканием T. Пусть $v <_o \tilde{v}$, $z \in v$, $\tilde{z} \in \tilde{v}$, $z < \tilde{z}$. Рассмотрим произвольную цепь γ из z в $\tilde{z}$. Пусть α - дуга этой цепи, входящая из позиции z. Будем говорить, что тогда $\tilde{z}$ **следует за** z **в направлении альтернативы** $\nu(\alpha) \in \Pi_u$, и обозначать это через $\tilde{z} \in \mathcal{D}(z, \nu(\alpha))$. Для любой дуги $\tilde{\alpha}$ цепи γ положим по определению $\nu(\tilde{\alpha}) = \nu(\alpha)$.

Для любой позиции z структуры T через $A^-(z)$ обозначаем множество дуг, выходящих из z. Сформулируем некоторые свойства структуры T. Пусть v, $\tilde{v} \in V$, $v <_o \tilde{v}$.

1. Каждой позиции из $\tilde{v}$ предшествует какая-то позиция из v.

2. Для каждой позиции $z \in v$ и каждой альтернативы $\nu_u \in \Pi_u$ найдется позиция $\tilde{z} \in \Pi_u$, такая, что если z - основная позиция, то $\tilde{z} \in \mathcal{D}(z, \nu_u)$ и из z ведет дуга в $\tilde{z}$ в противном случае.

3. Если $Q(\tilde{v}) = \{v\}$, то между любыми позициями из v и $\tilde{v}$ не найдется промежуточной дополнительной позиции.

4. Между любыми условными позициями из v и $\tilde{v}$ не найдется промежуточной дополнительной позиции.

5. Пусть $\tilde{z} \in \tilde{v}$, $z \in v$, $z \in \mathcal{D}(\tilde{z}, \nu_{\tilde{u}})$ $(\nu_{\tilde{u}} \in \Pi_{\tilde{u}})$. Тогда либо между $\tilde{z}$ и z найдется промежуточная дополнительная позиция такая, что если через γ обозначена цепь, ведущая из $\tilde{z}$ в z и содержащая эту позицию, то $\nu(\alpha) = \nu(u$, либо

$$\Sigma_{\tilde{u}}^{\kappa(\tilde{z}), \nu_{\tilde{u}}} \subset \Sigma^{u, \kappa(z)} .$$

Построим взаимно однозначное отображение f множества всех дуг T на Σ_u, полагая для произвольных $z \in v \in V$, $\alpha \in A^-(z)$

$$f(\alpha) = \begin{cases} \Sigma_u^{\kappa(z),\ \nu(\alpha)}, & \text{если } z \text{ -основная позиция;} \\ \Sigma_u^{\kappa(z)} & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Пу конец у дуги α есть вспомогательная позиция. Для всех β (y) положим $f(\beta)=f(\alpha)$. И пусть, наконец, $z \in \mathcal{V}$, $\tilde{z}$ $\tilde{\mathcal{V}}$, $\tilde{\mathcal{V}} <_o \mathcal{V}$, $\tilde{z} < z$. Рассмотрим произвольную цепь γ из $\tilde{z}$ в z, через $\tilde{\alpha}$ и α обозначим дуги этой цепи, соответственно выходящую из z и входящую в z. Положим

$$f(\alpha)=\Sigma^{u,\kappa(z)} \cap \Sigma_{\tilde{u}}^{\kappa(\tilde{z}),\ \nu(\tilde{\alpha})}.$$

Обозначим через Σ разбиение $\bigcap\limits_{u \in U} \Sigma_u$ множества Π. Легко видеть, что Σ есть разбиение Π, порожденное алгеброй σ_c. Откуда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Какова бы ни была дуга α структуры T, найдутся попарно не пересекающиеся множества $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \bigcap\limits_{u \in U} \Sigma_u$ (т.е. являющиеся элементами соответствующего разбиения), такие, что $f(\alpha)=\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Приступим к определению квазистратегии.

Рассмотрим произвольную позицию z произвольного не минимального информационного множества $\mathcal{V} \in V$ и произвольное $\tilde{\mathcal{V}} \in Q(\mathcal{V})$. Обозначим через $A^+(z, \tilde{\mathcal{V}})$ множество всех дуг, входящих в z и принадлежащих произвольной цепи из произвольной позиции $\tilde{\mathcal{V}}$ в z.

Квазистратегией назовем набор чисел $\{P_\alpha\}_{\alpha \in T}$, приписывающий каждой дуге $\alpha \in T$ неотрицательное число P_α и удовлетворяющий условиям 1-5.

1. Если z - вспомогательная позиция, β - дуга, входящая в z, то для всех $\alpha \in A^-(z)$, $P_\alpha = P_\beta$.

2. Если z - дополнительная позиция, β - дуга, входящая в z, то $P_\beta = \sum\limits_{\alpha \in A^-(z)} P_\alpha$.

3. Если z - позиция минимального информационного множества, то $\sum\limits_{\alpha \in A^-(z)} P_\alpha = 1$.

4. Пусть z – позиция не минимального информационного множества v, тогда для всех $\tilde{v} \in Q(v)$

$$\sum_{\beta \in A^-(z)} P_\beta = \sum_{\alpha \in A^+(z,\tilde{v})} P_\alpha .$$

5. Семейство вероятностей $\{P_{\Sigma_u}\}_{u \in U}$ продолжимо, где вероятностное распределение P_{Σ_u} определяется следующим образом: $P_{\Sigma_u}(f(\alpha)) = P_\alpha$ для всех $\alpha \in A^-(z)$, $z \in v$.

Квазистратегию $\{P_\alpha\}_{\alpha \in T}$, каждая компонента которой равна нулю или единице, назовем **чистой**.

Непосредственным следствием свойств T и определения квазистратегии является

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Пусть $\{P_\alpha\}_{\alpha \in T}$ – произвольная квазистратегия. Каковы бы ни были $v \in V$ и дуга $\bar{\alpha}$ структуры T, выполнено:*

1) $0 \le P_{\bar{\alpha}} \le 1$,

2) $\sum\limits_{z \in v} \sum\limits_{\alpha \in A^-(z)} P_\alpha = 1$.

Пусть μ – произвольная смешанная стратегия. Для каждой дуги α структуры T положим $\mu[\alpha] = \mu[f(\alpha)]$. В частности, если $\pi \in U$, то

$$\pi[\alpha] = \begin{cases} 1, & \text{если } \pi \in f(\alpha); \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. *Для всех μ набор $\{\mu[\alpha]\}_{\alpha \in T}$ есть квазистратегия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что утверждаемое есть следствие следующих, непосредственно проверяемых высказываний.

1. Для любых v, $\tilde{v} \in T$, если $\tilde{v}$ непосредственно предшествует v, $z \in v$, то

$$\bigcup_{\alpha \in A^+(z,\tilde{v})} f(\alpha) = \bigcup_{\beta \in A^-(z)} f(\beta) .$$

2. Если z – дополнительная позиция, β – дуга, входящая в z, то $f(\beta) = \bigcup\limits_{\alpha \in A^+(z)} f(\alpha)$.

§ 4. Некоторые вспомогательные утверждения и основная теорема

ЛЕММА I. Любой чистой квазистратегии $\{P_\alpha\}$ соответствует такая чистая стратегия $\mathcal{F}^{(P)}$, что для любой дуги α структуры T выполнено: $P_\alpha = \mathcal{F}^{(P)}[\alpha]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $v \in V$ через z_v и α_v обозначим позицию и дугу, выходящую из z_v, такие, что $P_{\alpha_v} = 1$. Очевидно, что для всех $\alpha \in A^-(z)$, $\alpha \neq \alpha_v$ имеет место: $P_\alpha = 0$. Положим для всех $u \in U$

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} \vartheta(\alpha_v), & \text{если } z_v \text{ – основная позиция;} \\ \vartheta'_u & \text{– в противном случае, где } \vartheta'_u \text{ произвольная альтернатива } u. \end{cases}$$

Утверждается, что $\mathcal{F}$ – искомая.

Покажем, что для доказательства этого утверждения достаточно установить, что $\mathcal{F}[\alpha_v] = 1$ для каждого $v \in V$. Действительно, пусть для всех $v \in V$, $\mathcal{F}[\alpha_v] = 1$. Очевидно, что тогда для всех $\alpha \in \bigcup_{z \in v} A^-(z)$ имеет место: $\mathcal{F}[\alpha] = P_\alpha$, каково бы ни было $v \in V$.

Рассмотрим произвольную дополнительную или вспомогательную позицию z структуры T и произвольную дугу $\bar\alpha$, выходящую из z. Обозначим через v_1 (v_2) информационное множество, непосредственно предшествующее z (соответственно, произвольное информационное множество, непосредственно следующее за z), через z_1 – позицию v_1, предшествующую z, и через α_1 – дугу, выходящую из z_1 в направлении z.

СЛУЧАЙ I. z – вспомогательная позиция. Имеем:

$$\mathcal{F}[\bar\alpha] = \mathcal{F}[\alpha_1] = P_{\alpha_1} = P_{\bar\alpha}.$$

СЛУЧАЙ 2. z – дополнительная позиция. Через z_2 обозначим конец дуги $\bar\alpha$. Имеем: $z_2 \in v_2$.

СЛУЧАЙ 2.I. Пусть $P_{\bar\alpha} = 1$. Тогда найдется такая дуга $\alpha_2 \in A^-(z_2)$, что $P_{\alpha_2} = 0$. Следовательно, $\mathcal{F} \in f(\alpha_1) \cap f(\alpha_2) \subset f(\bar\alpha)$. То есть $\mathcal{F}[\bar\alpha] = 1$.

СЛУЧАЙ 2.2. $P_{\bar\alpha}=0$. Предположим, что $\sum_{\alpha\in A^-(z_2)} P_\alpha = 0$.
Тогда $\mathcal{T}\notin \Sigma^{u_2,\kappa(z_2)}$, откуда ясно, что $\mathcal{T}\notin f(\bar\alpha)$, т.е. $\mathcal{T}[\bar\alpha]=0$.

Пусть теперь $\sum_{\alpha\in A^-(z_2)} P_\alpha = 1$. Тогда $\mathcal{T}\in \Sigma^{u_2,\kappa(z_2)}$. Допустим, что $\mathcal{T}[\bar\alpha]=1$, т.е. $\mathcal{T}\in f(\bar\alpha)$. Отсюда сразу получаем: $\mathcal{T}\in f(\alpha_1)$. Следовательно, $P_{\alpha_1}=1$. Таким образом,

$$\sum_{\alpha\in A^-(z)} P_\alpha = 1 .$$

Пусть $\tilde\alpha\in A^-(z)$ дуга, для которой $P_{\tilde\alpha}=1$. Обозначим через $\tilde z$ – конец дуги $\tilde\alpha$. Из того, что $P_{\tilde\alpha}=1\neq 0=P_{\bar\alpha}$, следует: $\tilde\alpha\neq\bar\alpha$. Следовательно, $z_2\neq\tilde z$. По построению Γ $\tilde z\in V_2$. Соотношение $\sum_{\alpha\in A^-(\tilde z)} P_\alpha = 1$ влечет за собой соотношение $\mathcal{T}\in\Sigma^{u_2,\kappa(z_2)}$. Итак, $\mathcal{T}\in\Sigma^{u_2,\kappa(\tilde z)}\cap\Sigma^{u_2,\kappa(z_2)}$ и $\tilde z\neq z_2$. Это абсурдно. Следовательно, $\mathcal{T}[\bar\alpha]=0$. Таким образом, нам осталось доказать, что для всех $v\in V$ $\mathcal{T}[\alpha_v]=1$. Для любого $v\in V$ положим $\ell(v)$ равным числу всех информационных множеств, предшествующих v.

Доказательство будем вести индукцией по числу $\ell(v)$. Очевидно, что для всех минимальных v имеет место: $\mathcal{T}[\alpha_v]=P_{\alpha_v}$ $(*)$. Предположим, что $(*)$ имеет место для всех $v\in V$, таких, что $\ell(v)\leq\ell<\max_{v'\in V}\ell(v')$.
Рассмотрим произвольное $v\in V$ такое, что для любого $\tilde v$, непосредственно предшествующего v, выполнено: $\ell(\tilde v)\leq\ell$. Для любого $\tilde v$ непосредственно предшествующего v, $z_v\in\mathcal{D}(z_{\tilde v},\alpha_{\tilde v})$.
Действительно, допустим, что найдется $\tilde v\in Q$, для которого $z_v\notin\mathcal{D}(z_{\tilde v},\alpha_{\tilde v})$.
Тогда

$$1=P_{\alpha_v}=\sum_{\alpha\in A^+(z_v,\tilde v)} P_\alpha\leq\sum_{z\in\tilde v}\sum_{\substack{\alpha\in A^-(z)\\ \alpha\neq\alpha_{\tilde v}}} P_\alpha=0 .$$

Это абсурдно.

По построению, $\mathcal{T}(u)=\vartheta(\alpha_v)$. Нам нужно показать, что $\mathcal{T}\in\Sigma^{\bar u,\kappa(z_v)}$. Допустим, что $\mathcal{T}\notin\Sigma^{u,\kappa(z_v)}$. Для каждого $\tilde v\in Q(v)$, $\mathcal{T}\in\Sigma^{\bar u,\kappa(z_{\tilde v})}$, $\mathcal{T}(\bar u)=\vartheta(\alpha_{\tilde v})$.
Зафиксируем произвольное $\tilde v\in Q(v)$. В силу утверждения 4, существует продолжение $\mathcal{T}^{(\tilde v)}\in\Sigma^{u,\kappa(z_v)}$ $\bar R(u)$– частичной стратегии $(\mathcal{T})_{R(u)}$. Зафиксируем произвольное $\mathcal{T}'_{R(u)}\in\Pi^{u,\kappa(z_v)}_{R(u)}$.

Так как $\mathcal{T}'_{R(u)} \propto (\mathcal{T})_{R(u)}$, то найдется такое $\mathcal{T}_{\bar{v}} \in S(u)$, что ровно одна из стратегий $\mathcal{T}'_{R(u)}$ и $(\mathcal{T})_{R(u)}$ будет продолжением $\mathcal{T}_{\bar{v}}$.

Обозначим через $\hat{\Omega}$ максимальный относительно упорядочения "$\propto$" элемент $\bar{v}$ (см. утверждение 3), а через u^* – то информационное множество, непосредственно предшествующее u, для которого $\Omega \bar{\propto} u'$. Из того, что $\mathcal{T}'_{R(u)} \sim (\mathcal{T}^{(v^*)})_{R(u)}, \mathcal{T}'_{R(u)} \neq (\mathcal{T})_{R(u)}$, следует, что ровно одна из стратегий $(\mathcal{T}^{(v^*)})_{R(u)}$ и $(\mathcal{T})_{R(u)}$ является продолжением $\mathcal{T}_{\bar{v}}$. Но это противоречит тому, что $\bar{v} \subset R(u^*)$ и $(*)^{(*)}_{(u)}$ есть продолжение $(\mathcal{T})_{R(u^*)}$. Таким образом, $\mathcal{T}[\alpha_v] = 1$. (*) (символы в оригинале не читаются)

Тем самым утверждение доказано.

ЛЕММА 2. Множество всех квазистратегий есть выпуклый многогранник, множеством всех крайних точек которого являются все чистые квазистратегии.

В силу утверждения 6, по каждой дуге α структуры T найдется семейство $\{A_i^{(\alpha)}\}_{i \in I_\alpha}$, попарно не пересекающих подмножеств Ω, входящих в Σ, такое что

$$f(\alpha) = \bigcup_{i \in I_\alpha} A_i^{(\alpha)} .$$

Очевидно, что если $\rho = \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in T}$ удовлетворяет условиям (I–4), то для того, чтобы ρ было квазистратегией, необходимо и достаточно, чтобы система

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i \in I_\alpha} \bar{\rho}(A_i^{(\alpha)}) &= \rho_\alpha \\ \bar{\rho}(A_i^{(\alpha)}) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

была совместима.

Для произвольного набора $\bar{\rho} = \{\bar{\rho}_\alpha\}_{\alpha \in T}$, сопоставляющего каждой дуге $\alpha \in T$ число $\bar{\rho}_\alpha$, через $S(\bar{\rho})$ будем обозначать систему, полученную из (I) заменой в ней столбца свободных членов на $\bar{\rho}$.

Зафиксируем произвольные квазистратегии P^1 и P^2 и число $a\in(0,1)$. Легко видеть, что $P=aP^1+(1-a)P^2$ удовлетворяют условиям (I-4). Если через $\bar P^1$ и $\bar P_2$ обозначены соответственно решения систем $S(P^1)$ и $S(P^2)$, то система $S(P)$ имеет решение $a\bar P^1+(1-a)\bar P^2$.

Аналогично проверяется замкнутость множества квазистратегий.

Очевидно, что все чистые квазистратегии являются крайними точками многогранника квазистратегий.

Предположим, что $P=\{P_\alpha\}_{\alpha\in T}$ является крайней точкой, но не является чистой квазистратегией.
Пусть $\bar P=\{\bar P(A)\}_{A\in\Sigma}$ — произвольное решение системы $S(P)$. Легко видеть, что для всех $A\in\Sigma$ $0\le\bar P(A)\le 1$. Выберем произвольное $A_1\in\Sigma$, такое, что $\bar P(A_1)>0$. Зафиксируем любое $\mathcal{T}\in A_1$. Обозначим через $P^*=\{P^*_\alpha\}_{\alpha\in T}$ чистую квазистратегию $\{\mathcal{T}[\alpha]\}_{\alpha\in T}$. Очевидно, что система $S(P^*)$ имеет решение $P'=\{P'(A)\}_{A\in\Sigma}$, где

$$P'(A)=\begin{cases} 1, & \text{если } A=A_1,\\ 0 & \text{– в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть ε есть наименьшее из чисел $\bar P(A_1)/(1-\bar P(A_1))$ и $(1-\bar P(A))/\bar P(A)$ при всех $A\in\Sigma$, $A\neq A_1$. Для каждого $A\in\Sigma$ положим $\hat P(A)=(1+\varepsilon)\bar P(A)-\varepsilon P'(A)$. Легко видеть, что для всех $A\in\Sigma$ $0\le\hat P(A)\le 1$. Имеем:

$$\sum_{A\in\Sigma}\hat P(A)=(1+\varepsilon)\sum_{A\in\Sigma}\bar P(A)-\varepsilon\sum_{A\in\Sigma}\bar P(A)=1.$$

Очевидно, что $\{\hat P(A)\}$ единственным образом продолжимо на σ_0. Рассмотрим след $\{\tilde P(A)\}_{A\in\Sigma_0}$ этого продолжения на Σ_0.

$$\tilde P_\alpha=\tilde P[f(\alpha)]=\sum_{\substack{A\in f(\alpha)\\ A\in\Sigma}}\hat P(A)=$$

$$=\sum_{\substack{A\in f(\alpha)\\ A\in\Sigma}}\left[(1+\varepsilon)\bar P(A)-\varepsilon P'(A)\right]=(1+\varepsilon)P_\alpha-\varepsilon P^*_\alpha.$$

Таким образом, $\{\tilde P_\alpha\}_{\alpha\in T}$ — квазистратегия и $P=\frac{1}{1+\varepsilon}\tilde P+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}P^*$ — это противоречит исходному предположению.

ТЕОРЕМА 2. По любой квазистратегии $\{P_\alpha\}_{\alpha\in T}$ найдется такая смешанная стратегия μ, что для всех $\alpha \in T$ $P_\alpha = \mu[\alpha]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждаемое есть следствие лемм I и 2.

Литература

I. И.Н.Врублевская, Эквивалентность стратегий в конечной позиционной игре. Сб. "Позиционные игры", Физматгиз, М.,II4-I32.

2. Н.Н.Воробьев, Редуцированные стратегии в позиционных играх. Сб. "Позиционные игры", Физматгиз, М., I967, 94-II3.

3. Н.Н.Воробьев, "О продолжимости согласованного семейства мер" Теория вероятностей и её применение, УП, 2,I962, I53-I69.

4. О.Оре, Теория графов, Физматгиз, М., I968.

5. Н.В.Романовский, О сведении игры с полной памятью к матричной игре., ДАН СССР, I962, I44, № I.

6. Е.Б.Яновская, Квазистратегии в позиционных играх, Известия АН, Техническая кибернетика, I960, № I.

7. Б.М.Конурбаева, Игры на графах., Исследование операций и метод Монте-Карло, ЛГУ (в печати).

Поступила в редакцию
I5.XII. I970 г.