УДК 51.330.115+513.88

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОДМОДЕЛЕЙ В МОДЕЛИ НЕЙМАНА-ГЕЙЛА

И.А.Красс

В данной статье исследуются некоторые вопросы, связанные с асимптотикой роста продукта на траектории в модели Неймана-Гейла. В первой части статьи показано, что наличие в модели траектории, на которой бы пара продуктов имела разные темпы роста, приводит к существованию в модели подмодели. Во второй части статьи показано, что асимптотика роста продукта на траектории существенно отличается у моделей Неймана и Гейла.

Все основные термины и определения, используемые ниже, аналогичны тем, которые имеются в работе [3].

§ 1. Существование подмоделей в модели Неймана-Гейла

Введем некоторые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть дана $(x(0),\infty)$-траектория $\{x(t)\}$. Будем говорить, что i-й продукт растет на траектории $\{x(t)\}$ с темпом роста $\alpha>0$, если

$$0<\varlimsup_{t\to\infty}\frac{x_i(t)}{\alpha^t}<+\infty,$$

где $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$.

Будем говорить, что i-й продукт растет на траектории $\{x(t)\}$ с темпом роста больше α, если

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_i(t)}{\alpha^t} = +\infty .$$

Кроме того, в дальнейшем нам понадобится понятие подмодели модели $\mathfrak{M}$, которое мы введем, как и в [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что в модели $\mathfrak{M}$ имеется подмодель $\mathfrak{M}'$, определенная над множеством $\mathcal{J}$, если существует выпуклый замкнутый конус $Z' \subset Z$ и подмножество индексов $\mathcal{J} \subset N = \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что из $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) \in Z'$ следует $x_j = y_j = 0$ для $j \in \mathcal{J}$. Кроме того, конус Z удовлетворяет следующему условию, аналогичному условию Гейла для модели $\mathfrak{M}$. Существует процесс $(x, y) \in Z'$, такой что $y_j > 0$ для $j \in \mathcal{J}$.

Будем говорить, что модель $\mathfrak{M}$ с технологическим конусом Z удовлетворяет условию а), если

$$\pi_X(Z) = \pi_Y(Z),$$

где π_X – оператор проектирования на первые n- осей пространства R^{2n}, π_Y – на последние.

ТЕОРЕМА I. Если в модели $\mathfrak{M}$ существует $(x(0), \infty)$ - траектория $\{x(t)\}$ такая, что максимальный темп роста продуктов на ней β и имеется хотя бы один продукт, растущий с темпом роста $\alpha < \beta$, то в модели имеется подмодель, удовлетворяющая условию а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z – технологический конус модели $\mathfrak{M}$; рассмотрим конус $Z^\beta \subset R_+^{2n}$

$$Z^\beta = \{(x, y) : (x, y) = (\tilde{x}, \tfrac{1}{\beta} \tilde{y}); (\tilde{x}, \tilde{y}) \in Z$$

и модель $\mathfrak{M}^\beta$, задаваемую этим конусом. Очевидно, что $\alpha(\mathfrak{M}^\beta) = \frac{\alpha(\mathfrak{M})}{\beta}$. Если $\{y(t)\}$ есть траектория в модели $\mathfrak{M}$, то ей соответствует траектория $\{y^\beta(t)\}$ (где $y^\beta(t) = \frac{y(t)}{\beta^t}$) в модели $\mathfrak{M}^\beta$.

Поэтому для данной траектории $\{x(t)\}$ будет выполняться:

$$\begin{cases} \overline{\lim}\, x_i^\beta(t) = 0 \text{ для } i \in N - \mathcal{K}\ ; \\ \\ \overline{\lim}\, x_i^\beta(t) = c_i > 0 \text{ для } i \in \mathcal{K}\ , \end{cases} \tag{4}$$

где $\mathcal{K}$ – множество индексов продуктов, возрастающих с темпом роста β . Отсюда следует, что последовательность $\{x^\beta(t)\}$ ограничена.

Рассмотрим последовательность пар $\{(x^\beta(t), x^\beta(t+1))\}$. Очевидно, эта последовательность также ограничена в пространстве R^{2n} , поэтому из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Рассмотрим множество $M \subset R^{2n}$ пределов всех таких подпоследовательностей.

Ввиду второго равенства в (4), M не пусто, и для каждого $i \in \mathcal{K}$ существует пара $(x^\beta, y^\beta) \in M$, такая что $x_i^\beta \neq 0$. Кроме того, множество M обладает следующим свойством (А) : если пара $(x^\beta, y^\beta) \in M$, то в множестве M существуют пары (x_1^β, x^β) и (y^β, y_1^β). Действительно, если $(x^\beta, y^\beta) \in M$, то существует подпоследовательность $\{(x^\beta(t_k), x^\beta(t_k+1)\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} (x^\beta(t_k), x^\beta(t_k+1)) = (x^\beta, y^\beta). \tag{5}$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{(x^\beta(t_k-1), x^\beta(t_k))\}$ ограниченной последовательности $\{(x^\beta(t), x^\beta(t+1))\}$ и выберем из неё сходящуюся подпоследовательность $\{(x^\beta(t_{k(1)}-1), x^\beta(t_{k(1)}))\}$ $(\{t_{k(1)}\} \subset \{t_k\})$. Ввиду (5), $\lim\limits_{k\to\infty} x^\beta(t_k) = x^\beta$, а значит, и $\lim\limits_{k(1)\to\infty} x^\beta(t_{k(1)}) = x^\beta$. Поэтому

$$\lim_{k(1)\to\infty} (x^\beta(t_{k(1)}-1), x^\beta(t_{k(1)})) = (x_{-1}^\beta, x^\beta).$$

Аналогично показывается существование в M пары (y^β, y_1^β).

Пусть M_1 –выпуклая оболочка M . Тогда M_1 замкнуто, а ввиду того, что любой элемент из M_1 может быть представлен в виде выпуклой комбинации не более чем $(n+1)$ элементов из M (см. [8]), M_1 удовлетворяет свойству A .

Так как Z^β – замкнутый выпуклый конус, то M , $M_1 \subset Z^\beta$ и, исходя из первого равенства в (4), из $(x^\beta, y^\beta) \in M_1$ следует, что $x_i^\beta = y_i^\beta = 0$ для $i \in \mathcal{K}$.

Натягивая на M_1 коническую оболочку, получаем выпуклый замкнутый конус $Z_1^\beta \subset Z^\beta$, причём в силу того, что множество M удовлетворяет свойству A, имеем :

$$\mathcal{K}_X(Z_1^\beta) = \mathcal{K}_Y(Z_1^\beta).$$

Из вышеприведенного рассуждения следует также, что во множестве $M_1 \subset Z_1^\beta$ существует процесс (x, y), такой что $y_j > 0$ для $j \in \mathcal{K}$. Таким образом, конус Z_1^β - технологический и удовлетворяет условию а), а поэтому задаёт подмодель $\mathfrak{M}_1^\beta$ модели $\mathfrak{M}^\beta$, определенную над множеством $\mathcal{K}$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если технологическое отображение a модели $\mathfrak{M}$ нормально, то есть из $y \in a(x)$ и $y' \leq y$ следует, что $y' \in a(x)$, то условия теоремы также и необходимы.

Действительно, пусть в модели $\mathfrak{M}$ существует подмодель $\mathfrak{M}_1$, определенная над множеством $\mathcal{K} \neq N$. Пусть $\alpha(\mathfrak{M}_1)$ - технологический темп роста подмодели $\mathfrak{M}_1$ ($\alpha(\mathfrak{M}_1) = \alpha_1 > 0$). Тогда в $\mathfrak{M}_1$ существует процесс ($\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$) такой, что

$$\alpha_1 \bar{x}_1 \leq \bar{y}_1,$$

а ввиду нормальности a в $\mathfrak{M}$ существует и процесс ($\bar{x}_1, \bar{y}_1$) такой, что $\alpha_1 \bar{x}_1 = \bar{y}_1$. Очевидно, ($x(0), \infty$) - траектория $\{x(t)\}$, где $x(0) = x$, $x(t) = \alpha_1^t \bar{x}$, есть траектория в подмодели $\mathfrak{M}_1$, причем $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{x_i(t)}{\alpha^t} > 0$ для тех индексов, для которых $\bar{x}_i > 0$. В то же время для любого $j \in N \setminus \mathcal{K}$ имеем $x_j(t) \equiv 0$, то есть продукт j имеет нулевой темп роста.

Таким образом, траектория $\{x(t)\}$ удовлетворяет условиям теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия теоремы можно переписать следующим способом: существуют два ненулевых функционала p, $q \geq 0$ такие, что $0 < \varlimsup\limits_{t \to \infty} \frac{px(t)}{\alpha^t} < +\infty$; $0 < \varlimsup \frac{qx(t)}{\beta^t} < +\infty$ и $\alpha \neq \beta$. Однако в этом случае труднее определить то множество продуктов, на котором работает подмодель $\mathfrak{M}_1$.

Теорема I, однако, не охватывает случая, когда i-й продукт на траектории $\{x(t)\}$ растёт с темпом роста, большим β,

не выполняется $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{x_i(t)}{\alpha^t}=0$ для всех $\alpha>\beta$ (например, $x_i(t)=t\beta^t$). Поэтому представляет интерес

ТЕОРЕМА 2. Пусть на траектории $\{x(t)\}$ продукты $i=1,\dots,\kappa$ растут с темпом, большим β, тогда в модели $\mathcal{M}$ существует подмодель, определенная над множеством $\mathcal{J}\subset\mathcal{K}=\{1,2,\dots,\kappa\}$ и удовлетворяющая условию а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть траектория $\{x(t)\}$ такова, что

$$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\frac{x_i(t)}{\beta^t}=+\infty \quad \text{для } i\in\mathcal{K}\,. \tag{6}$$

Как и в теореме I, перейдем к модели $\mathcal{M}^\beta$. Тогда на траектории $\{x^\beta(t)\}$ в силу (6) выполняется соотношение

$$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, x_i^\beta(t)=+\infty;\ i=1,2,\dots,\kappa, \tag{7}$$

и, исходя из условия теоремы, получим :

$$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, x_i^\beta(t)=c_i<\infty \ \text{для } i\in N\setminus\mathcal{K}\,. \tag{8}$$

Пусть в R^n введена какая-нибудь норма. Тогда, в силу (7),

$$\lim\limits_{t\to\infty}\|x_i^\beta(t)\|=+\infty\,. \tag{9}$$

Построим числовую последовательность $\{\gamma(t)\}$. Пусть $\gamma(0)=\|x^\beta(0)\|$. Ввиду (9) найдется минимальное $t_1>0$, такое, что $\|x^\beta(t_1)\|\geq\gamma(0)$, положим $\gamma(t_1)=\|x^\beta(t_1)\|$. Пусть определены $\gamma(0),\gamma(t_1),\dots,\gamma(t_\kappa)$. Ввиду (9) найдется минимальное $t_{\kappa+1}>t_\kappa>0$, такое что $\|x^\beta(t_{\kappa+1})\|>\|x^\beta(t_\kappa)\|$; положим $\gamma(t_{\kappa+1})=\|x^\beta(t_{\kappa+1})\|$. Так определяется строго возрастающая подпоследовательность $\{\gamma(t_\kappa)\}$. Если же $t\notin\{t_\kappa\}$, то найдется максимальное κ , такое что $t_\kappa<t<t_{\kappa+1}$; положим

$$\gamma(t)=\gamma(t_\kappa)\left(\frac{\gamma(t_{\kappa+1})}{\gamma(t_\kappa)}\right)^{\frac{t-t_\kappa}{t_{\kappa+1}-t_\kappa}}. \tag{10}$$

Отметим некоторые свойства полученной последовательности. Во-первых, она строго возрастающая. Во-вторых, для всех

$$\frac{\|x^\beta(t)\|}{r(t)} \leq 1. \tag{11}$$

Действительно, пусть существует $\bar{t}$, такое что $\frac{\|x^\beta(\bar{t})\|}{r(\bar{t})} > 1$. Так как по определению $\frac{\|x^\beta(t_\kappa)\|}{r(t_\kappa)} = 1$, то $\bar{t} \in \{t_\kappa\}$, поэтому найдется максимальное κ такое, что $t_\kappa < \bar{t} < t_{\kappa+1}$. Ввиду (10) $r(\bar{t}) > r(t_\kappa)$, но тогда $\|x(\bar{t})\| > r(\bar{t}) > r(t_\kappa)$, а это противоречит определению $r(t_{\kappa+1})$.

Как уже отмечалось, $\frac{\|x^\beta(t_\kappa)\|}{r(t_\kappa)} = 1$, что вместе с (11) дает

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\|x^\beta(t)\|}{r(t)} = 1. \tag{12}$$

Так как $a(\Omega)$ - компакт, если Ω - компакт, то

$$\max_{\substack{y \in a(x) \\ \|x\| = 1}} \|y\| = c < +\infty,$$

и, в силу однородности отображения a, для любого $y \in a(x)$ имеем

$$\|y\| \leq c\,\|x\|. \tag{13}$$

Из (13) имеем $\frac{r(t_{\kappa+1})}{r(t_\kappa)} = \frac{\|x^\beta(t_{\kappa+1})\|}{x^\beta(t_\kappa)} \leq C^{t_{\kappa+1} - t_\kappa}$, что вместе с (10) дает

$$\frac{r(t+1)}{r(t)} \leq C. \tag{14}$$

Рассмотрим последовательность пар

$$\{(\tilde{x}^\beta(t),\ \tilde{x}^\beta(t+1))\} = \left\{\left(\frac{x^\beta(t),\ x^\beta(t+1)}{r(t) + r(t+1)}\right)\right\}.$$

Тогда, ввиду (11), имеем

$$\|(\tilde{x}^\beta(t),\ \tilde{x}^\beta(t+1))\| = \|\tilde{x}^\beta(t)\| + \|\tilde{x}^\beta(t+1)\| \leq 2. \tag{15}$$

(Здесь принято $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$).

Следовательно, из последовательности $\{(\bar{x}^\beta(t), \bar{x}^\beta(t+1))\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть M – множество всех пределов таких подпоследовательностей. Ввиду замкнутости конуса Z^β, имеем $M \subset Z^\beta$, а ввиду (12), $M \neq \varnothing$. (Достаточно рассмотреть подпоследовательность $\{(\bar{x}^\beta(t_\kappa - 1), \bar{x}^\beta(t_\kappa))\} = \left\{\frac{(x^\beta(t_\kappa-1), x^\beta(t_\kappa))}{r(t_\kappa-1)+r(t_\kappa)}\right\}$, и так как $\left\|\frac{x^\beta(t_\kappa)}{r(t_\kappa-1)+r(t_\kappa)}\right\| \geqslant \frac{\|x^\beta(t_\kappa)\|}{r(t_\kappa)} \geqslant \frac{1}{2}$, то для предела (x, y) любой подпоследовательности, выделенной из данной, выполняется $y \geqslant \frac{1}{2}$, то есть $(x, y) \neq 0)$.

Пусть $(x^\beta, y^\beta) \in M$. Из (8) вытекает, что $x_i^\beta = y_i^\beta = 0$ для $i \in N \setminus \mathcal{K}$, а по определению M существует подпоследовательность $\{t_n\}$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} (\bar{x}^\beta(t_n), \bar{x}^\beta(t_n+1)) = (x^\beta, y^\beta) \neq (0,0). \qquad (16)$$

Докажем, что в M выполняется свойство, аналогичное (A) в теореме I. Для этого рассмотрим подпоследовательность $\{(\bar{x}^\beta(t_n-1), \bar{x}^\beta(t_n))\}$. Из монотонности $r(t)$ и (16) следует

$$\frac{\|(x^\beta(t_n-1), x^\beta(t_n))\|}{r(t_n-1)+r(t_n)} \geqslant \frac{\|x^\beta(t_n)\|}{r(t_n)+r(t_n+1)} \geqslant \varepsilon$$

для $n \geqslant n(\varepsilon)$. С другой стороны, для указанной подпоследовательности выполняется неравенство (15), поэтому найдется подпоследовательность $\{t_{n(1)}\} \subset \{t_n\}$ такая, что

$$\lim_{n(1) \to \infty} (\bar{x}^\beta(t_{n(1)}-1), \bar{x}^\beta(t_{n(1)})) = (\bar{x}_{-1}^\beta, \bar{x}^\beta).$$

Так как вектор $\frac{x^\beta(t_n)}{r(t_n)+r(t_n+1)}$ отличается от вектора $\frac{x^\beta(t_n)}{r(t_n-1)+r(t_n)}$ только коэффициентом, то $(\bar{x}_{-1}^\beta, \bar{x}^\beta) = \alpha\,(x_{-1}^\beta, x^\beta)$.

Оценим норму элемента (x_{-1}^β, x^β). Имеем $\frac{r(t_n)+r(t_n+1)}{r(t_n-1)+r(t_n)} \geqslant 1$ и $\alpha \geqslant \lim_{n \to \infty} \frac{r(t_n)+r(t_n+1)}{r(t_n)+r(t_n-1)} \geqslant 1$, что вместе с (19) даёт

$$(x_{-1}^\beta, x^\beta) = \frac{1}{\alpha} \quad (\bar{x}_{-1}^\beta, \bar{x}^\beta) \leqslant 2$$

Как и в теореме I, рассмотрим далее подпоследовательность $\{(\bar{x}^\beta(t_n+1), \bar{x}^\beta(t_n+2))\}$. Из (13) и (16) следует, что при $n \geqslant n(\varepsilon)$

$$\frac{\|(x^\beta(t_n+1),\ x^\beta(t_n+2))\|}{\gamma(t_n+1)+\gamma(t_n+2)} \geqslant \frac{\|x^\beta(t_n+1)\|}{c\,\gamma(t_n)+c\cdot\gamma(t_n+1)} \geqslant \varepsilon\ ,$$

поэтому, как и выше, найдется подпоследовательность $\{t_{n(2)}\} \subset \{t_n\}$ такая, что

$$\lim_{n(2)\to\infty} (\tilde{x}^\beta(t_{n(2)}+1), \tilde{x}^\beta(t_{n(2)}+2)) = (\tilde{y}^\beta; \tilde{y}_1^\beta) = \delta(y^\beta; y_1^\beta):$$

И так как

$$\frac{\gamma(t_n) + \gamma(t_n+1)}{\gamma(t_n+1)+\gamma(t_n+2)} \geqslant \frac{1}{c}\ ,$$

то

$$\|(y^\beta; y_1^\beta)\| = \frac{1}{\delta}\ \|(\tilde{y}^\beta; \tilde{y}_1^\beta)\| \leqslant 2c\,.$$

Таким образом, для конуса Z_1^β, натянутого на множество M, имеем: если $(x^\beta, y^\beta) \in Z_1^\beta$, то $x_i^\beta = y_i^\beta = 0$ для $i \in N \setminus \mathcal{K}$ в конусе найдутся процессы (x_{-1}^β, x^β) и (y^β, y_1^β), причем если $(x^\beta, y^\beta) = \lambda(\tilde{x}^\beta, \tilde{y}^\beta)$, где $(\tilde{x}^\beta, \tilde{y}^\beta) \in M$, то

$$\begin{cases} \|(x_{-1}^\beta, x^\beta)\| < 2\lambda\,, \\ \|(y^\beta, y_1^\beta)\| \leqslant 2\lambda c\,. \end{cases} \tag{I7}$$

Другими словами,

$$\pi_X(Z_1^\beta) = \pi_Y(Z_1^\beta)\ . \tag{I8}$$

Ясно, что равенство (I8) сохранится и для Z_2^β - выпуклой оболочки конуса Z_1^β. Неравенства (I7) также сохранятся, если под λ понимать число такое, что $(x^\beta, y^\beta) = \lambda(\tilde{x}^\beta, \tilde{y}^\beta)$, где $(x^\beta, y^\beta) \in Z_2^\beta$, а $(\tilde{x}^\beta, \tilde{y}^\beta)$ входит в выпуклую оболочку M.

Так как множество M, как множество всех частичных пределов последовательности $\left\{\frac{(x^\beta(t), x^\beta(t+1))}{\gamma(t)+\gamma(t+1)}\right\}$, замкнуто, то конус $Z_2^\beta \subset Z^\beta$.

Ввиду вышесказанного конус Z_2^β задает подмодель $\mathfrak{M}_1^\beta$ модели $\mathfrak{M}^\beta$, определенную над множеством $J \subset \mathcal{K}$, что и доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из теорем I и 2 следует, что если модель неразложимая, то есть не содержит подмоделей (например, леонтьевская модель с неразложимой технологической матрицей [2]), то на любой бесконечной траектории все продукты имеют один и тот же темп роста.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как и в случае теоремы I, условие теоремы 2 можно переформулировать в "бескоординатной форме". Именно, существует функционал $q \geq 0$ и $(x(0), \infty)$ - траектория $\{x(t)\}$ такие, что

$$\varlimsup_{t \to \infty} \frac{q\,x(t)}{\alpha^t} = +\infty.$$

Оказывается, что понятие темпа роста связано с понятием равновесия. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Если на $(x(0),\infty)$-траектории $\{x(t)\}$ продукт i растёт с темпом роста β, то в модели $\mathfrak{M}$ имеется обобщенное состояние равновесия, темп роста которого не менее β.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем предполагать, что β - наибольший темп роста продукта на траектории. Тогда из теоремы 2 следует, что в модели $\mathfrak{M}$ существует подмодель $\mathfrak{M}_1$. Покажем, что в подмодели $\mathfrak{M}_1$ существует обобщенное состояние равновесия с темпом роста $\alpha \geqslant \beta$.

Предположим, что это не так. Тогда для любой пары $(x, y) \in Z_1$ (Z_1 - технологический конус модели $\mathfrak{M}_1$) выполняется

$$py \leq \alpha px < \beta px; \; px \neq 0.$$

Причём так как подмодель $\mathfrak{M}$ определена над множеством $\mathcal{K}$ (см. условие теоремы 2), то $p_i = 0$ для $i \in N \setminus \mathcal{K}$, где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. С другой стороны, так как $p \neq 0$, то существует $j_0 \in \mathcal{K}$, что $p_{j_0} > 0$.

Перейдем, как и выше, к модели $\mathfrak{M}^\beta$, тогда для подмодели $\mathfrak{M}_1^\beta$ наше предположение дает

$$py^\beta < px^\beta; \; px^\beta \neq 0 \qquad (19)$$

для всех $(x^\beta, y^\beta) \in Z_1^\beta$.

Ввиду (8),

$$\varlimsup_{t \to \infty} px^\beta(t) = c > 0. \qquad (20)$$

Пусть $\{x(t_\kappa)\}$ - подпоследовательность последовательности $\{x(t)\}$ такая, что

$$\lim_{\kappa\to\infty} px^\beta(t_\kappa)=c \quad . \tag{21}$$

Рассмотрим последовательность пар $\{(x^\beta(t_\kappa-1), x^\beta(t_\kappa))\}$.

Предположим сначала, что существует $t_\circ$, такое что для всех $t_\kappa \geq t_\circ$ выполняется

$$px^\beta(t_\kappa) \leq px^\beta(t_\kappa-1). \tag{22}$$

Так как последовательность $\{(x^\beta(t_\kappa-1), x^\beta(t_\kappa))\}$ ограничена, то из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{(x^\beta(t_{\kappa(1)}-1), x^\beta(t_{\kappa(1)}))\}$. Тогда, ввиду (20), $\lim\limits_{\kappa(1)\to\infty} px^\beta(t_{\kappa(1)}-1) \leq$ $\leq c$, а отсюда с помощью (21) и (22) получаем

$$\lim_{\kappa(1)\to\infty} px^\beta(t_{\kappa(1)}-1)=c .$$

Таким образом, если $\lim\limits_{\kappa(1)\to\infty}(x^\beta(t_{\kappa(1)}-1), x^\beta(t_{\kappa(1)}))=(x^\beta, y^\beta)$, то $px^\beta=py^\beta=c>0$, что противоречит (19).

Поэтому наше предположение о существовании $t_\circ$ неверно, то-есть существует такая подпоследовательность $\{t_{\kappa(2)}\}$, что

$$px^\beta(t_{\kappa(2)}-1) \leq px^\beta(t_{\kappa(2)}). \tag{23}$$

Пусть $\{(x^\beta(t_{\kappa(3)}-1), x^\beta(t_{\kappa(3)}))\}$ - сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{(x^\beta(t_{\kappa(2)}-1), x^\beta(t_{\kappa(2)}))\}$. Тогда, переходя к пределу в неравенстве (23), имеем $px^\beta \leq py^\beta$, где $(x^\beta, y^\beta)=\lim\limits_{\kappa(3)\to\infty}(x^\beta(t_{\kappa(3)}-1), x^\beta(t_{\kappa(3)}))$, что также противоречит (19). Тем самым лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Аналогичное доказательство проходит и в случае, если на траектории $\{x(t)\}$ продукт i растет с темпом роста больше β.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из работы [7] следует, что на любой траектории темп роста продукта не превосходит $\alpha(\mathfrak{M})$, где $\alpha(\mathfrak{M})$ - технологический темп роста модели $\mathfrak{M}$. Однако если на траектории $\{x(t)\}$ продукт i растет с темпом роста большим β, то есть $\overline{\lim} \frac{x_i(t)}{\beta^t}=+\infty$, то это отнюдь не означает,

что в модели имеется обобщенное состояние равновесия с темпом роста $\alpha > \beta$. (Естественно, интерес представляет только случай $\lim \frac{x_i(t)}{\alpha^t} = 0$ для всех $\alpha > \beta$). Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть следующий пример двухпродукновой модели Неймана.

В качестве базисных процессов рассмотрим процессы: ((1,0); (I,0)); ((I,0); (I,0)); ((0,I); (0,I)); ((I,0); (0,0)); ((I,0); (0,0)). Конус Z модели $\mathfrak{M}$ есть коническая оболочка этих процессов. Нетрудно непосредственно вычислить (например, с помощью метода, предложенного в [6]), что для этой модели $\alpha(\mathfrak{M})=1$. Однако в этой модели существует траектория $x(t)=(1,t)(t=1,2,\dots)$, т.е. $x_2(t)\to\infty$.

§ 2. Асимптотика роста продуктов на траектории в моделях Неймана и Гейла

Рассмотрим вначале модель Неймана $\mathfrak{M}_N$. Технологический конус Z модели $\mathfrak{M}_N$ можно описать следующим образом (см. [2]) :

$$Z=\{z=(x,y):(x,y)=\sum_{i=1}^{m}(a_i,b_i)u_i;\, u_i\geqslant 0\}.$$

Процессы (a_i, b_i) $(i=1,2,\dots,m)$ называются базисными. Вектор $u=(u_1,u_2,\dots,u_m)$ называется вектором интенсивностей.

Если $(x,y)\in Z$, то существует вектор $u\in R_+^m$ такой, что $x=Au$, $y=Bu$, где A - матрица, i-тый столбец которой равен a_i (матрица затрат), B - матрица, у которой i-тый столбец есть b_i (матрица выпуска). Если в модели $\mathfrak{M}_N$ имеется $(x(0),T)$ - траектория $\{x(t)\}_{t=0}^{t=T}$, то ей отвечает последовательность $\{u(t)\}_{t=0}^{t=T}$ (траектория в параметризованной модели [4]) такая, что

$$x(t)=Au(t). \qquad (24)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Для любой $(x(0),\infty)$ - траектории $\{x(t)\}$ и для любого продукта $i\in\{1,2,\dots,n\}$ имеет место соотношение

$$\overline{\lim} \frac{x_i(t)}{t^{\kappa}\alpha^{t}(\mathfrak{M}_N)} < +\infty, \qquad (25)$$

где κ - число различных подмоделей с технологическим темпом роста $\alpha(\mathfrak{M}_N)$ в модели $\mathfrak{M}_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в теореме I, перейдем от модели $\mathfrak{M}_N$ к модели $\mathfrak{M}^{\alpha}$, где $\alpha = \alpha(\mathfrak{M}_N)$. Очевидно, технологический темп роста в модели $\mathfrak{M}^{\alpha}$ равен 1, и следует доказать, что для любой траектории в ней выполняется

$$\overline{\lim} \frac{x_i(t)}{t^{\kappa}} < +\infty .$$

Итак, пусть $\{x^{\alpha}(t)\}$ есть $(x^{\alpha}(0), \infty)$ - траектория в модели $\mathfrak{M}^{\alpha}$, на которой хотя бы для одного индекса, справедливо

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} x_i^{\alpha}(t) = +\infty.$$

Среди всех состояний равновесия с темпом роста 1 выделим состояние равновесия с максимальным числом ненулевых координат у равновесного функционала $p_1 = (p_1^1, p_2^1, \dots, p_m^1)$, и пусть

$$\mathcal{P}_1 = \{ i : p_i^1 > 0\} \subset N = \{1, 2, \dots, n\} .$$

В силу определения состояния равновесия

$$p_1 x^{\alpha} \geq p_1 y^{\alpha} \text{ для всех } (x^{\alpha}, y^{\alpha}) \in Z^{\alpha}, \qquad (26)$$

и поэтому

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} x_i^{\alpha}(t) < +\infty \text{ для } i \in \mathcal{P}_1 .$$

Пусть N_1 - множество индексов таких продуктов, что $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} x_i^{\alpha}(t) < +\infty$ (в частности, может быть, что $x_i^{\alpha}(t) \equiv 0$).

Из вышесказанного следует, что $N_1 \supset \mathcal{P}_1$. Пусть оператор проектирования на подпространство, натянутое на оси с номерами из N_1, есть π_1.

Разобьем все базисные процессы на два класса. В первый класс отнесем процессы (a_i^{α}, b_i^{α}), такие что $\pi_1 a_i \neq 0$ либо $\pi_1 b_i \neq 0$, и пусть эти процессы имеют номера $1, 2, \dots, m_1$ $(\{1, 2, \dots, m_1\} = M_1 \subset \{1, 2, \dots, m\})$. Пусть, далее, траектории $\{x^{\alpha}(t)\}$ отвечает (в смысле (24)) последовательность $\{u(t)\}$. Тогда

$$\varlimsup_{t\to\infty} u_j(t) < +\infty \quad \text{для} \quad j \in M_1 .$$

Рассмотрим Z_1^α – выпуклую коническую оболочку процессов (a_i^α, b_i^α) для $i \notin M_1$. Тогда конус Z_1^α задает подмодель $\mathfrak{M}_1^\alpha$ модели $\mathfrak{M}^\alpha$. Действительно, в определении подмодели надо проверить только существование в конусе Z_1^α процесса (x^α, y^α) такого, что $y_i^\alpha > 0$ для $i \notin N_1$.

Но, по построению,

$$\varlimsup_{t\to\infty} x_i^\alpha(t) = +\infty \quad \text{для} \quad i \notin N_1 , \tag{27}$$

поэтому для любого $i \notin N_1$ существует процесс $(a_{j(i)}^\alpha, b_{j(i)}^\alpha)$ такой, что $j(i) \in M_1$ и $b_i^{j(i)} > 0$ (здесь $b_{j(i)}^\alpha = (b_1^{j(i)}, b_2^{j(i)}, \ldots, b_n^{j(i)}$

Из теоремы 3 следует, что технологический темп роста подмодели $\mathfrak{M}_1^\alpha$ равен 1. Рассмотрим состояние равновесия с темпом роста 1 в подмодели $\mathfrak{M}_1^\alpha$ такое, что равновесный функционал $P_2 = (P_1^2, \ldots, P_n^2)$ имеет максимальное количество компонент, отличных от нуля, и пусть

$$\mathcal{P}_2 = \{i : P_i^2 > 0\} \subset N.$$

По построению,

$$\varlimsup_{t\to\infty} P_2 x^\alpha(t) = +\infty ,$$

а ввиду определения состояния равновесия

$$P_2 x^\alpha \geq P_2 y^\alpha \quad \text{для всех} \ (x^\alpha, y^\alpha) \in Z_1^\alpha .$$

Пусть $(x^\alpha(t), x^\alpha(t+1)) = (x_1^\alpha(t), y_1^\alpha(t+1)) + (x_2^\alpha(t), y_2^\alpha(t+1))$

$$= \sum_{j=1}^{m_1} (a_j^\alpha, b_j^\alpha) u_j(t) + \sum_{j=m_1+1}^{m} (a_j^\alpha, b_j^\alpha) u_j(t).$$

Тогда $\Delta P_2(t) = P_2 x^\alpha(t+1) - P_2 x^\alpha(t) = P_2 y_1^\alpha(t+1) - P_2 x_1^\alpha(t) +$

$$+ P_2 y_2^\alpha(t+1) - P_2 x_2^\alpha(t) \leq P_2 y_1^\alpha(t+1) - P_2 x_1^\alpha(t),$$

ибо $(x_2^\alpha(t), y_2^\alpha(t+1)) \in Z_1^\alpha$.

Но

$$P_2 y_1^\alpha(t+1) - P_2 x_1^\alpha(t) = P_2 \Big(\sum_{j=1}^{m_1} (b_j^\alpha - a_j^\alpha) u_j(t)\Big) < C ,$$

так как $\varlimsup\limits_{t\to\infty} u_j(t) \le c_j$ для $j \in M_1$.

Отсюда $P_2 x^\alpha(t+1) \le c(t+1)$ для $t = 1, 2, \dots$ или $\varlimsup\limits_{t\to\infty} \frac{P_2 x^\alpha(t)}{c \cdot t} < +\infty$, то есть для $i \in \mathcal{P}_2$

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{x_i^\alpha(t)}{t} < +\infty. \qquad (28)$$

Пусть множество индексов продуктов, для которых выполняется (28), есть N_2 (в частности, $N_1 + \mathcal{P}_2 \subset N_2$), а π_2 – оператор проектирования на подпространство, натянутое на все e с номерами из N_2. Как и ранее, все базисные процессы разобьем на два класса. В первый класс отнесем все процессы такие, что $\pi_2 a_j^\alpha \ne 0$ или $\pi_2 b_j^\alpha \ne 0$, и пусть номера этих процессов суть $\{1, 2, \dots, m_2\} = M_2$ (очевидно, $m_1 > m_2$). Тогда,

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{u_j(t)}{t} < +\infty \quad \text{для } j \in M_2 .$$

Как и выше, можно показать, что конус Z_2^α – выпуклая коническая оболочка процессов (a_j^α, b_j^α), $j \in M_2$ задает подмодель $\mathfrak{M}_2^\alpha$ модели $\mathfrak{M}_1^\alpha$, а следовательно, и модели $\mathfrak{M}$, причем технологический темп роста модели $\mathfrak{M}_2^\alpha$ равен 1.

Пусть $P_3 = (P_1^3, P_2^3, \dots, P_n^3)$ – равновесный функционал в модели $\mathfrak{M}_2^\alpha$, отвечающий состоянию равновесия с темпом роста 1 и имеющий максимальное количество ненулевых компонент. Положим

$$\mathcal{P}_3 = \{ i : P_i^3 > 0 \} .$$

Так же, как и выше, можно показать, что

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{P_3 x^\alpha(t)}{t^2} < +\infty \ \text{ и } \ \varlimsup_{t\to\infty} \frac{x_i^\alpha(t)}{t^2} < +\infty \quad \text{для } i \in \mathcal{P}_3 .$$

Повторяя этот процесс не более K раз, где K – число подмоделей, имеющих технологический темп роста 1 и вложенных друг в друга (то есть $Z_K^\alpha \subset Z_{K-1}^\alpha \subset \dots \subset Z_1^\alpha \subset Z$, где Z_j^α – технологический конус j-той подмодели), получаем, что для $i \in N_j$ $(1 \le j \le K)$

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{x_i^\alpha(t)}{t^j} < +\infty .$$

Здесь N_j есть такое подмножество индексов, что для любого процесса $(x^\alpha, y^\alpha) \in Z_j^\alpha$ выполняется $x_i^\alpha = y_i^\alpha = 0$ для $i \notin N_j$.

Теперь переход от модели $\mathfrak{M}^{\alpha}$ к модели $\mathfrak{M}$ доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ. Для модели Неймана на любой $(x(0),\infty)$-траектории $\{x(t)\}$ выполняется $\varlimsup_{t\to\infty} \frac{x_i(t)}{t^{n-1}\alpha^t(\mathfrak{M})} < +\infty$, где n - число продуктов в модели.

ЗАМЕЧАНИЕ. Данная асимптотическая оценка аналогична оценке роста траекторий для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При этом числу K, фигурирующему в условии теоремы, отвечает степень вырожденности наибольшего по модулю характеристического уравнения соответствующей системы (см. [5]).

Оказывается, что оценка, сделанная в теореме I, не улучшаема. Действительно, рассмотрим n-продуктовую модель Неймана, у которой матрицы A и B соответственно равны:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \right\| \qquad B = \left\| \begin{matrix} \mathrm{I} & \mathrm{I} & \dots & \mathrm{I} \\ 0 & \mathrm{I} & \dots & \mathrm{I} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{I} \end{matrix} \right\|$$

Нетрудно видеть, что конус Z этой модели удовлетворяет ограничениям определения технологического конуса. Из работы [6] следует, что технологический темп роста данной модели равен наибольшему неотрицательному корню уравнения $\det(B-\alpha A)=0$, то есть в данном случае равен I. В то же время $(x(0),\infty)$-траектория $\{x(t)\}$ $(x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t)))$, выходящая из начального состояния $x(0)=(1,1,\dots,1)$, имеет вид:

$$x_1(t)\equiv 1;\ x_2(t)=1+1+1+\dots+1=t;$$

$$x_3(t)=\underbrace{1+\dots+1}_{t\ \text{раз}}+1+2+\dots+t=\frac{t(t+1)}{2},$$

$$x_4(t)=\underbrace{1+\dots+1}_{t\ \text{раз}}+1+2+\dots+t+1+3+6+\dots+\frac{t(t+1)}{2},$$

$$x_n(t)=1+\sum_{j=1}^{t}x_1(j)+\sum_{j=1}^{t}x_2(j)+\dots+\sum_{j=1}^{t}x_{n-1}(j).$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{t} j^k}{t^{k+1}}>0$ при $k=1,2,\dots$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{x_i(t)}{t^{i-1}}>0.$

Отсюда видно, что асимптотическая оценка для роста продуктов на траектории, полученная в [7] (лемма 3, следствие 2), неверна даже для моделей Неймана.

Оказывается, асимптотическая оценка роста продуктов на траектории для модели Гейла не совпадает с (25). Для доказательства этого факта рассмотрим класс квазинеймановских моделей (такие модели рассматривались в работе [7]). Технологический конус Z такой модели задается бесконечным числом базисных процессов

$$(a_i, b_i)\in R_+^{2n};\ a_i\neq 0\quad \|(a_i,b_i)\|<c\ (i=1,2,\dots),$$

то есть

$$Z=\{(x,y):(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)u_i;\ u_i\geq 0\}. \qquad (29)$$

ЛЕММА. Конус Z замкнут, если множество $\tilde{Z}=\{(a_i,b_i);\ i=1,2,\dots\}$ замкнуто в R^{2n}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_k,y_k)\quad(x,y)$ и $(x_k,y_k)\in Z$. Так как Z есть выпуклая конусная оболочка множества $\tilde{Z}$, то любой $(x,y)\in Z$ есть положительная линейная комбинация не более чем $(2n+1)$-й точки из $\tilde{Z}$ (см. [8]). Пусть

$$(x_k,y_k)=\sum_{j=1}^{2n+1}u_j^k(a_j^k,b_j^k);\ u_j^k\geq 0\ , \qquad (30)$$

где $\{(a_1^k,b_1^k),(a_2^k,b_2^k),\dots,(a_{2n+1}^k,b_{2n+1}^k)\}\subset\tilde{Z}\quad(k=1,2,\dots)$.

Рассмотрим последовательность векторов $\{u_1^k(a_1^k,b_1^k)\}$; так как $\{(x_k,y_k)\}$ сходится, то последовательность $\{u_1^k(a_1^k,b_1^k)\}$ ограничена, поэтому из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{u_1^{k(1)}(a_1^{k(1)},b_1^{k(1)})\}$, то есть

$\lim\limits_{k(1)\to\infty}u_1^{k(1)}(a_1^{k(1)},b_1^{k(1)})=u_1^0(a_1^0,b_1^0)$. Ввиду замкнутости $\tilde{Z}$ имеем $(a_1^0,b_1^0)\in\tilde{Z}$. Рассмотрим теперь последовательность $\{u_2^{k(1)}(a_2^{k(1)},b_2^{k(1)})\}$. Так же, как и выше, выделяем из

неё сходящуюся подпоследовательность $\{u_2^{\kappa(2)}(a_2^{\kappa(2)}, b_2^{\kappa(2)})\}$ такую, что

$$\lim_{\kappa(2)\to\infty} u_2^{\kappa(2)}(a_2^{\kappa(2)}, b_2^{\kappa(2)}) = u_2^\circ(a_2^\circ, b_2^\circ).$$

Таким образом, строится последовательность $\{\kappa(n)\} \subset \{1, 2, \ldots, n\} = N$ по которой можно сделать переход в (30). Совершая этот переход, имеем

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{2n+1} u_j^\circ(a_j^\circ, b_j^\circ),$$

где $(a_j^\circ, b_j^\circ) \in \tilde{Z}$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n+1)$, что и доказывает лемму.

С помощью этой леммы может быть доказана

ТЕОРЕМА 5. Пусть положительная числовая последовательность такова, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\gamma(t)}{\gamma(t+1)} = 1 \quad .$$

Тогда существует модель Гейла $\mathfrak{M}$, такая что $\alpha(\mathfrak{M}) = 1$ и $(x(0), \infty)$ - траектория в ней $\{x(t)\}$, для которой $x_i(t) = \gamma(t)$ для некоторого $i \in N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем существование указанной модели в случае $n = 2$. Действительно рассмотрим квазинеймановскую модель, базисные процессы которой суть

$$(a_i, b_i) = \left(\left(\frac{1}{\gamma(i+1)}; \frac{\gamma(i)}{\gamma(i+1)}\right); \left(\frac{1}{\gamma(i+1)}; 1\right)\right) \; (i = 1, 2, \ldots) \; .$$
$$(a_0, b_0) = ((0, 1); (0, 1)).$$

Нетрудно видеть, что множество $\tilde{Z} = \{(a_i, b_i) / i = 0, 1, 2 \ldots\}$ замкнуто. Из предыдущей леммы следует, что конус Z - выпуклая коническая оболочка $\tilde{Z}$ - удовлетворяет всем ограничениям, накладываемым на технологический конус. Технологический темп роста данной модели равен 1 , что проверяется непосредственно.

Рассмотрим $(x(0), \infty)$- траекторию $\{x(t)\}$, где $x(0) = (1, \gamma(1))$, и последовательность векторов - интенсивностей $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots)$, где

$$u_i(t) = \begin{cases} \gamma(t+1) \text{ для } i \neq t \; ; \\ 0 \quad \text{для } i \neq t \; . \end{cases}$$

Тогда $x(t)=(1,\gamma(t))$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Существуют модели Гейла $\mathfrak{M}$ такие, что на некоторых $(x(0),\infty)$ траекториях $\{x(t)\}$ выполняется

$$\lim \frac{x_i(t)}{\gamma(t)} > 0 \quad ,$$

если $\{\gamma(t)\}$ неотрицательная числовая последовательность такая, что $\lim \frac{\gamma(t)}{\gamma(t+1)} = \alpha(\mathfrak{M})$. Например, $\gamma(t)=\tilde{\gamma}(t)\alpha^t(\mathfrak{M})$, где $\gamma(t)$ удовлетворяет условию данной теоремы. В то же время из §2 следует, что в этом случае у данной модели имеется подмодель с технологическим темпом роста $\alpha(\mathfrak{M})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из 1) и 2) следует, что асимптотика траекторий резко меняется при переходе от модели Гейла к модели Неймана.

Теорема 1 допускает некоторое обобщение. Как известно [9], у модели Неймана $\mathfrak{M}_N$ имеется конечное число ($\ell \leqslant \min(m,n)$) состояний равновесия с различными темпами роста, которые мы занумеруем так, чтобы $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_\ell$, где $\alpha_1 = \alpha(\mathfrak{M})$. Все продукты (см. [9]) разбиваются на ℓ непересекающихся подмножеств $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_\ell$ (то есть $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j = \phi$ для $i \neq j$; $\bigcup_{i=1}^{\ell} \mathcal{J}_i = N$) таких, что проекция конуса Z на оси с номерами из множества $\left(\bigcup_{i=j+1}^{\ell} \mathcal{J}_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=j+1}^{\ell} \mathcal{J}_i \oplus n\right)$ есть конус, удовлетворяющий условиям, накладываемым на технологические конусы *), и, следовательно, задающий модель $\mathfrak{M}^j$ (где $j=1,2,\dots,\ell$; $\mathfrak{M}^1=\mathfrak{M}$). Кроме того, для модели $\mathfrak{M}^j$ выполняются $\alpha(\mathfrak{M}^j)=\alpha_j$ $(j=1,2,\dots,\ell)$. Тогда из вышесказанного (проектируя траекторию на соответствующие оси) имеем:

ТЕОРЕМА 3. Для любой $(x(0),\infty)$-траектории $\{x(t)\}$ и любого продукта

---

*) Если $\mathcal{J} = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, то $\mathcal{J} \oplus n = \{i_1+n, i_2+n, \dots, i_k+n\}$

$i \in L_j = \bigcup_{i=j+1}^{\ell} \mathcal{I}_i \ (j=1,\ldots,\ell)$ выполняется

$$\lim \frac{x_i(t)}{\alpha_j^t t^k} < +\infty ,$$

где k - число подмоделей в модели m^j, технологический темп роста которых α_j.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого продукта $i \in L_j$ и любого $\beta > \alpha_j$ выполняется $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{x_j(t)}{\beta^t} = 0$ на произвольной (x_0, ∞) траектории.

Литература

1. А.М.Рубинов, Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства.-Оптимальное планирование, 9, Н., (1967), 87-111.
2. Д.Гейл, Замкнутая линейная модель производства. Сб. "Линейные неравенства и смежные вопросы", Физматгиз, М., 1963, 382-400.
3. В.Л.Макаров, А.М.Рубинов, Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики,-УМН, 5 (1970), 125-169.
4. И.А.Красс, Некоторые вопросы теории модели Неймана. Сб. "Исследования по кибернетике", "Советское радио", М.,1970, 53-87.
5. И.Г.Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Физматгиз, М., 1952.
6. R.L.Weil. "An algorithm for the von Neuman Economy". Zeitshrift für Nationalökonomie 371-384.
7. С.М.Мовшович, Теоремы о магистрали в модели Гейла-Неймана. Экономика и математические методы, 5, 6 (1969), 877-889.
8. С.Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, ИИЛ, М., 1966.
9. В.Л.Макаров, Состояния равновесия замкнутой линейной модели расширяющейся экономики, Экономика и математические методы, 1, 5 (1965), 736-738.

Поступила в редакцию
28.IV. 1970 г.