Выпуск 20(37) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 519.283

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

И.А.Красс, В.П.Малюков

Как известно, для многих классов игр с разрывной функцией платы на компакте доказано существование ε -равновесия в смешанном расширении игры [1-3] . Однако только для весьма небольшого класса игр пока удалось доказать наличие точного равновесия [4,5] . В данной работе будет показано наличие точного равновесия для некоторого класса игр с разрывной функцией платы.Кроме того, в работе приведена теорема о существовании ε -равновесия для более широкого класса функций платы.Теоремы о равновесии снабжены примерами, показывающими, что условия, накладываемые в этих теоремах на функцию платы, близки к необходимым.

Сформулируем сначала несколько определений и предположений. Везде ниже K - ограниченная и измеримая по Борелю функция из $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ в R , где $\mathcal{X}$ - компакт в R^n , а $\mathcal{Y}$ - в R^m.

Пусть $A, B \subset \mathcal{X}$. Будем говорить, что функция K доминирует по x множество A множеством B , и записывать этот факт так: $A \overset{K,x}{\leq} B$, если для любого $x \in A$ существует $x_1 \in B$ такое, что $K(x,y) \leq K(x_1,y)$ для любого $y \in \mathcal{Y}$. Точно так же будем говорить, что функция K доминирует по x множество A множеством B с точностью до ε , и записывать этот факт так: $A \underset{\varepsilon}{\overset{K,x}{\leq}} B$, если для любого $x \in A$ существует

x_1 такое, что

$$K(x,y) \le K(x_1,y)+\varepsilon$$

для любого $y \in \mathcal{Y}$.

Аналогично определяется отношение доминирования и доминирования с точностью до ε множества C множеством $\mathcal{D}$ функцией K по y. Соответствующие обозначения имеют вид: $C \overset{K,y}{\leqq} \mathcal{D}$ и $C \underset{\varepsilon}{\overset{K,y}{\leqq}} \mathcal{D}$.

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ есть множество точек разрыва функции K по x (т.е. при любом фиксированном $y \in \mathcal{Y}$ функция $K(\cdot,y)$ непрерывна на множестве $\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$). Для краткости в дальнейшем такую функцию будем называть непрерывной по x на множестве $\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$. Будем говорить, что K возрастает по x в точках разрыва, если существует открытое в $\mathcal{X}$ множество B такое, что $int\,\mathcal{D} \subset B$ и $\partial B \overset{K,x}{\geqq} B$, а на $\mathcal{X} \setminus B$ функция K непрерывна по x.

Приведем типичный пример функции K, возрастающей по x в точках разрыва. Пусть точки разрыва функции K, как функции от x, лежат на $(n-1)$-мерной кусочно-гладкой поверхности Σ, которая разбивает $\mathcal{X}$ на три части: $\mathcal{X}^+$, Σ и $\mathcal{X}^-$, где $\mathcal{X}^+$ и $\mathcal{X}^-$ открытые, на $(\mathcal{X}^+ \cup \Sigma)\times\mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}^- \times \mathcal{Y}$ функция K непрерывна. Пусть, кроме того, для каждого $x_0 \in \Sigma$ существует окрестность $W(x_0)$ точки x_0 такая, что $\{x_0\} \overset{K,x}{\geqq} (W(x_0) \cap \mathcal{X}^-)$. Тогда функция K возрастает по x в точках разрыва.

Приведенная функция является полунепрерывной сверху по x, однако можно привести примеры функций, возрастающих в своих точках разрыва, но не являющихся полунепрерывными сверху. Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ для } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ x \text{ для } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

на сегменте $[0,1]$ является возрастающей в точках разрыва, но не полунепрерывной сверху. Легко построить примеры функций, полунепрерывных сверху по x, но не являющихся возрастающими в точках разрыва.

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ есть множество точек разрыва функции K по x. Будем говорить, что K почти возрастает по x в точках разрыва, если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество B_ε такое, что $int\,\mathcal{D} \subset B_\varepsilon$ и $\partial B_\varepsilon \underset{\varepsilon}{\overset{K,x}{\geqq}} B_\varepsilon$, а на $\mathcal{X} \setminus B_\varepsilon$

функция K непрерывна по x.

Ниже в работе приведен пример функции, почти возрастающей в точках разрыва, но не полунепрерывной сверху; можно привести примеры функций, полунепрерывных сверху по x, но не являющихся почти возрастающими в точках разрыва.

Приведем пример функции, почти возрастающей по x в точках разрыва. Пусть функция K, как функция x, обладает на множестве $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ следующим свойством полунепрерывности сверху. Для любого $\varepsilon>0$ и $x\subset\mathcal{X}$ существует $\bar{\rho}(\varepsilon,x)>0$, что как только $\rho(x_1,x)<\bar{\rho}(\varepsilon,x)$, так $K(x,y)\geq K(x_0,y)-\varepsilon$. Пусть множество $\mathcal{D}$ точек разрыва функции K, как функции от x, замкнуто, $int\,\mathcal{D}=\emptyset$ и сужение функции K на множество $\mathcal{D}\times\mathcal{Y}$ непрерывно. Тогда K почти возрастает в точках разрыва. (В качестве B_ε в данном случае можно взять множество

$$B_\varepsilon=[\bigcup_{x\in\mathcal{D}}W(x,\bar{\rho}(\varepsilon,x))\setminus\mathcal{D}].)$$

Из этого рассуждения видно, что если к функции описанного вида прибавить любую непрерывную функцию, то полученная функция будет также почти возрастающей по x в своих точках разрыва.

Будем говорить, что функция K убывает (почти убывает) по x в точках разрыва, если функция $-K$ возрастает (почти возрастает) по x в этих точках.

Аналогично вводится понятие возрастания (убывания) и почти возрастания (почти убывания) функции K по y в точках разрыва.

Пусть теперь $\langle\mathcal{X},\mathcal{Y},K\rangle$ - антагонистическая игра в нормальной форме [6]. Под решением игры будем понимать решение смешанного расширения данной игры, а ситуацию $(\bar{\mu},\bar{\nu})$, решающую эту игру, где $\bar{\mu}$ - вероятностная мера на $\mathcal{X}$ и $\bar{\nu}$ - вероятностная мера на $\mathcal{Y}$, будем называть седловой, соответственно меры $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ - седловыми стратегиями первого - максимизирующего и второго - минимизирующего игроков.

Все меры, рассматриваемые ниже, неотрицательные, σ - аддитивные и регулярные. Множество таких мер с носителями в данном множестве $\mathcal{X}$ и $\mu(\mathcal{X})=1$ будем обозначать символом $P(\mathcal{X})$.

В случае матричных игр довольно просто показать, что

если $A \overset{K,x}{\leq} B$, где $A, B \subset \mathcal{X}$, $A \cap B = \emptyset$, или соответственно $C \overset{K,y}{\leq} \mathcal{D}$, где $C \cap \mathcal{D} = \emptyset; C, \mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$, то существуют такие седловые стратегии $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, что

$$\operatorname{supp} \bar{\mu} \cap A = \operatorname{supp} \bar{\nu} \cap \mathcal{D} = \emptyset; \qquad (I)$$

здесь через $\operatorname{supp} \mu$ обозначен носитель меры μ.

Однако в случае бесконечных антагонистических игр отыскание седловых стратегий $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, удовлетворяющих (I), весьма затруднительно. Докажем две теоремы подобного рода (теоремы о доминировании). Предварительно сформулируем две леммы.

ЛЕММА I. Пусть A – открытое и $A \subset \mathcal{X}$, $\mu_n \xrightarrow{*} \mu_0$ на $\mathcal{X}$ (символ $*$ обозачает $*$-слабую сходимость), и пусть $\operatorname{supp} \mu_n \subset \mathcal{X} \setminus A$: Тогда $\mu_n|_{\mathcal{X} \setminus A} \xrightarrow{*} \mu_0|_{\mathcal{X} \setminus A}$, где $\mu|_{\mathcal{X} \setminus A}$ – сужение меры на множество $\mathcal{X} \setminus A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \subset A$ и B замкнуто. Тогда $\mu_0(B) = 0$. Действительно, существует непрерывная функция $f \geq 0$ такая, что $\operatorname{supp} f \subset A$ и $f(x) = 1$ для $x \in B$. Но по условию, $\int_{\mathcal{X}} f \mu_n = 0$ и $\int_{\mathcal{X}} f \mu_n \to \int_{\mathcal{X}} f \mu_0$, поэтому $\mu_0(B) \leq \int f \mu_0$. С другой стороны, A может быть представлено как счетное объединение замкнутых множеств, лежащих в нем. Ввиду неотрицательности и σ-аддитивности меры μ_0 имеем $\mu_0(A) = 0$, что и доказывает наше предложение.

Из измеримости и ограниченности функции K легко следует

ЛЕММА 2. Пусть μ, ν – меры на $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно, и пусть A – измеримое множество в $\mathcal{X}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{A_i\}$ множества A на n_ε непересекающихся измеримых множеств и точки $x_i \in A_i$ так, что $\gamma(\varepsilon) < \varepsilon$ и

$$\int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} K(x,y) \mu \nu = \int_{(\mathcal{X} \setminus A) \times \mathcal{Y}} K(x,y) \mu \nu + \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \mu(A_i) \int_{\mathcal{Y}} K(x_i, y) \nu + \gamma(\varepsilon). \qquad (2)$$

Заметим, что разбиение $\{A_i\}$ зависит не только от ε, но и от меры ν.

Будем говорить, что функция K не зависима в среднем от $\mathcal{Y}$ на $\mathcal{A}$, если разбиение $\{A_i\}$ не зависит от меры ν. Совершенно симметрично определяется независимость в среднем от $\mathcal{X}$ на измеримом множестве $B\subset\mathcal{Y}$.

Функцию K назовем удовлетворяющей условию (а) на $\mathcal{A}\times B$ если она не зависима в среднем от $\mathcal{Y}$ на $\mathcal{A}$ и от $\mathcal{X}$ на B.

Пусть функция $F:\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to R$, где $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – компакты в R^n, R^m, такова, что существует разбиение $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ на телесные, выпуклые, измеримые множества $\{Q_i\}_{i\in\{1,\dots,K\}}$, $\{P_j\}_{j\in\{1,\dots,\ell\}}$ такое, что $\mathcal{X}=\bigcup_i Q_i$, $\mathcal{Y}=\bigcup_j P_j$ и функция F равномерно непрерывна на $Q_i\times P_j$ $\forall(i,j)$. Тогда F удовлетворяет условию (а) на $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

ТЕОРЕМА I (о доминировании). Пусть открытые множества $\mathcal{A}\subset\mathcal{X}$, $\mathcal{D}\subset\mathcal{Y}$ и замкнутые множества B, C таковы, что $\mathcal{A}\overset{K,x}{\leq}B$, $C\overset{K,y}{\leq}\mathcal{D}$, причем $\mathcal{A}\cap B=C\cap\mathcal{D}=\emptyset$, функция K непрерывна по x на B, по y на C и удовлетворяет условию (а) на $\mathcal{A}\times\mathcal{D}$. Тогда если игра $\Gamma=\langle\mathcal{X},\mathcal{Y},K\rangle$ имеет решение, то найдется ситуация $(\bar\mu,\bar\nu)$, удовлетворяющая (I).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\bar{\bar\mu},\bar{\bar\nu})$ – равновесная ситуация в игре Γ. Тогда для любой меры ν на $\mathcal{Y}$, согласно лемме 2 и условиям теоремы, найдется разбиение $\{A_i\}$, $i=1,\dots,n_\varepsilon$, не зависящее от ν, множества $\mathcal{A}$ и точки $\bar x_i\in A_i$ такие, что

$$\int\limits_{(A\times B)\times\mathcal{Y}} K(x,y)\bar{\bar\mu}\,\nu=\int\limits_{B\times\mathcal{Y}} K(x,y)\bar{\bar\mu},\nu+\sum_{i=1}^{n_\varepsilon}\bar{\bar\mu}(A_i)\int\limits_{\mathcal{Y}} K(\bar x_i,y)\nu+\gamma(\varepsilon),\quad(3)$$

где $|\gamma(\varepsilon)|<\varepsilon$. По условию теоремы найдутся точки $\bar{\bar x}_i\in B$: $K(\bar{\bar x}_i,y)\geq K(\bar x_i,y)$. Рассмотрим меру μ_ε на $\mathcal{A}\cup B$, определенную так: для $\xi\in B\setminus\{\bar{\bar x}_1,\dots,\bar{\bar x}_{n_\varepsilon}\}$ полагаем $\tilde\mu_\varepsilon(\xi)=\bar{\bar\mu}(\xi)$, $\tilde\mu_\varepsilon(\mathcal{A})=0$, $\tilde\mu_\varepsilon(\bar{\bar x}_i)=\bar{\bar\mu}(\bar{\bar x}_i)+\bar{\bar\mu}(A_i)$. (Если точка $\bar{\bar x}_i\in B$ доминирует несколько точек $x_i\in A_i$, то столько же слагаемых появляется в сумме, определяющей $\tilde\mu_\varepsilon(\bar{\bar x}_i)$.) Нетрудно проверить, исходя

из построения и равенства (3), неравенство

$$\int\limits_{(A\cup B)\times Y} K(x,y)\tilde{\mu}_\varepsilon\nu \geq \int\limits_{(A\cup B)\times Y} K(x,y)\bar{\bar{\mu}}\nu+\gamma(\varepsilon). \qquad (4)$$

Беря $\varepsilon = 1/n$, получаем последовательность мер $\tilde{\mu}_n=\tilde{\mu}_{1/n}$, которую без ограничения общности можно считать слабо сходящейся к $\tilde{\mu}$. Из построения мер $\tilde{\mu}_n$ имеем $supp\tilde{\mu}_n\subset \mathcal{X}\setminus A$. Тогда из леммы I вытекает $\tilde{\mu}_n|_B \xrightarrow{*} \tilde{\mu}$, причем $\tilde{\mu}|_A=0$. Но так как функция K на компакте B непрерывна по x, то при любом фиксированном $y\in Y$ имеем

$$\int\limits_{A\cup B} K(x,y)\tilde{\mu}_n \longrightarrow \int\limits_{A\cup B} K(x,y)\tilde{\mu}$$

и ввиду ограниченности K по теореме Лебега

$$\int\limits_{(A\cup B)\times Y} K(x,y)\tilde{\mu}_n\nu \longrightarrow \int\limits_{(A\cup B)\times Y} K(x,y)\tilde{\mu}\nu .$$

Делая предельный переход в (4) по n для $\varepsilon = 1/n$ получаем, что мера $\tilde{\mu}$ удовлетворяет соотношениям

$$\int\limits_{(A\cup B)\times Y} K(x,y)\tilde{\mu}\nu \geq \int\limits_{(A\cup B)\times Y} K(x,y)\bar{\bar{\mu}}\nu, (supp\tilde{\mu})\cap A=\emptyset. \qquad (5)$$

С помощью $\tilde{\mu}$ и $\bar{\bar{\mu}}$ построим меру $\bar{\mu}$ таким образом: для $\xi\subset\mathcal{X}\setminus(A\cup B)$ полагаем $\bar{\mu}(\xi)=\bar{\bar{\mu}}(\xi)$, а для $\xi\in(A\cup B)$ соответственно $\bar{\mu}(\xi)=\tilde{\mu}(\xi)$, где ξ – произвольное измеримое множество.

Из построения меры $\bar{\mu}$ имеем для любой меры ν на Y неравенство

$$\int\limits_{\mathcal{X}\times Y} K(x,y)\bar{\mu}\nu \geq \int\limits_{\mathcal{X}\times Y} K(x,y)\bar{\bar{\mu}}\nu ,$$

откуда следует, что стратегия $\bar{\mu}$ – седловая и $(supp\bar{\mu})\cap A=\emptyset$. (Равенство $\bar{\mu}(\mathcal{X})=1$ выполнено по построению.)

Совершенно аналогично по седловой стратегии $\bar{\bar{\nu}}$ можно построить стратегию $\bar{\nu}$, которая для любой меры μ на $\mathcal{X}$ удовлетворяет соотношениям

$$\int\limits_{\mathcal{X}\times Y} K(x,y)\mu\bar{\nu} \leq \int\limits_{\mathcal{X}\times Y} K(x,y)\mu\bar{\bar{\nu}}; (supp\bar{\nu})\cap\mathcal{D}=\emptyset .$$

Откуда видно, что $\bar{\nu}$ – седловая стратегия второго игрока и ситуация ($\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$) удовлетворяет равенству (3), что и тре-

бовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Абсолютно такими же рассуждениями можно показать справедливость утверждения:

Пусть открытые множества $\mathcal{A}\subset\mathcal{X}$ и $\mathcal{D}\subset\mathcal{Y}$ и замкнутые множества $\mathcal{B}\subset\mathcal{X}$, $C\subset\mathcal{Y}$ таковы, что функция K непрерывна по x на $\mathcal{B}$ и по y на C, и K удовлетворяет условию (а) на $\mathcal{A}\times\mathcal{D}$, и пусть $\mathcal{A}\overset{K,x}{\underset{\varepsilon}{\leqq}}\mathcal{B}$, $C\overset{K,y}{\underset{\varepsilon}{\leqq}}\mathcal{D}$ для любого $\varepsilon>0$, причем $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=C\cap\mathcal{D}=\emptyset$. Тогда, если игра Γ имеет значение, то для любого $\varepsilon>0$ найдутся стратегии μ_ε, ν_ε такие, что $supp\,\mu_\varepsilon\subset\mathcal{X}\setminus\mathcal{A}$, $supp\,\nu_\varepsilon\subset\mathcal{Y}\setminus\mathcal{D}$ и ситуация $(\mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon)$ определяет ε-равенство в игре Γ, т.е. выполняется неравенство

$$-\varepsilon+\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}K(x,y)\nu_\varepsilon\mu\leq\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}K(x,y)\mu_\varepsilon\nu_\varepsilon\leq\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}K(x,y)\mu_\varepsilon\nu+\varepsilon$$

для любых $\mu\in P(\mathcal{X})$, $\nu\in P(\mathcal{Y})$.

Напомним: говорят, что игра $\Gamma=<\mathcal{X},\mathcal{Y},K>$ имеет значение, если выполняется равенство

$$\sup_{\mu\in P(\mathcal{X})}\inf_{\nu\in P(\mathcal{Y})}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}K(x,y)\mu\nu=\inf_{\nu\in P(\mathcal{Y})}\sup_{\mu\in P(\mathcal{X})}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}K(x,y)\mu\nu.$$

Применяя построения меры, приведенные при доказательстве теоремы I, можно доказать другую теорему о доминировании.

ТЕОРЕМА 2 (о доминировании). Пусть открытые множества $\mathcal{A}\subset\mathcal{X}$, $\mathcal{D}\subset\mathcal{Y}$ и замкнутые множества $\mathcal{B}$, C таковы, что $\mathcal{A}\overset{K,x}{\leqq}\mathcal{B}$, $C\overset{K,y}{\leqq}\mathcal{D}$, причем $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=C\cap\mathcal{D}=\emptyset$ и, кроме того, K непрерывна на $(\mathcal{X}\setminus\mathcal{A})\times(\mathcal{Y}\setminus\mathcal{D})$. Тогда игра $\Gamma=<\mathcal{X},\mathcal{Y},K>$ имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы следует, что $\mathcal{X}\setminus\mathcal{A}\overset{K,x}{\geqq}\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}\setminus\mathcal{D}\overset{K,y}{\geqq}\mathcal{Y}$ и что у игры $<\mathcal{X}\setminus\mathcal{A},\mathcal{Y}\setminus\mathcal{D},K>$ существует решение [7] $(\bar\mu,\bar\nu)$. Тогда, рассуждая, как и в теореме I, можно $\forall\varepsilon>0$, $\forall\mu\in P(\mathcal{X})$ найти $\bar\mu_{\varepsilon,\bar\nu}\in P(\mathcal{X}\setminus\mathcal{A})$:

$$\int_{(\mathcal{X}\setminus\mathcal{A})\times(\mathcal{Y}\setminus\mathcal{D})}K(x,y)\bar\mu\bar\nu+\gamma(\varepsilon)\geq\int_{(\mathcal{X}\setminus\mathcal{A})\times(\mathcal{Y}\setminus\mathcal{D})}K(x,y)\tilde\mu_{\varepsilon,\bar\nu}\bar\nu+\gamma(\varepsilon)\geq\int_{\mathcal{X}\times(\mathcal{Y}\setminus\mathcal{D})}K(x,y)\mu\bar\nu, \quad (6)$$

где $|\gamma(\varepsilon)|<\varepsilon$. Так как (6) справедлива для любого ε, то

отсюда следует, что

$$\int\limits_{(\mathcal{X}\setminus\mathcal{A})\times(\mathcal{Y}\setminus\mathcal{D})} K(x,y)\bar\mu\bar\nu \geq \int\limits_{\mathcal{X}\times(\mathcal{Y}\setminus\mathcal{D})} K(x,y)\mu\bar\nu \qquad \forall\mu\in P(\mathcal{X}).$$

Аналогично показывается, что

$$\int\limits_{(\mathcal{X}\setminus\mathcal{A})\times(\mathcal{Y}\setminus\mathcal{D})} K(x,y)\bar\mu\bar\nu \leq \int\limits_{(\mathcal{X}\setminus\mathcal{A})\times\mathcal{Y}} K(x,y)\bar\mu\bar\nu \qquad \forall\nu\in P(\mathcal{Y}),$$

отсюда следует утверждение теоремы. В частности, из теоремы 2 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть открытые множества $\mathcal{A}\subset\mathcal{X}$, $\mathcal{B}\subset\mathcal{Y}$ таковы, что существует представление $\mathcal{A}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathcal{A}_i$; $\mathcal{D}=\bigcup\limits_{j=1}^{m}\mathcal{D}_j$; $\mathcal{A}_{i_1}\cap\mathcal{A}_{i_2}=\mathcal{D}_{j_1}\cap\mathcal{D}_{j_2}=\varnothing$, если $i_1\neq i_2$, $j_1\neq j_2$, и существуют точки $x_i\in\mathcal{X}\setminus\mathcal{A}$; $y_j\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{D}_j$; $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,m$, такие, что $\mathcal{A}_i\overset{K,x}{\leq}\{x_i\}$; $\{y_j\}\overset{K,y}{\leq}\mathcal{D}$ $\forall(i,j)$. Тогда, если игра $\langle\mathcal{X},\mathcal{Y},K\rangle$ имеет решение, то существует седловая пара $(\bar\mu,\bar\nu)$, удовлетворяющая (I).

Исходя из введенных в начале статьи понятий возрастания и убывания функций K в точках разрыва, сформулируем еще одно предложение о существовании решения в игре с разрывной функцией платы, которая вытекает из теоремы 2 и определения возрастания функции K по x или y в точках разрыва.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть замкнутые множества $\mathcal{B}\subset\mathcal{X}$ и $C\subset\mathcal{Y}$ таковы, что K равномерно непрерывна на $(\mathcal{X}\setminus\mathcal{B})\times(\mathcal{Y}\times C)$, на $\mathcal{X}\setminus\mathcal{B}$ – по x и на множестве $\mathcal{Y}\setminus C$ – по y. Пусть, кроме того, K возрастает по x в своих точках разрыва и убывает по y. Тогда игра $\langle\mathcal{X},\mathcal{Y},K\rangle$ имеет решение.

Естественно, у функции K, о которой идет речь в предложении, как функции, рассматриваемой на множестве $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, точками разрыва могут являться только точки множества $\mathcal{B}\times\mathcal{Y}$ либо $\mathcal{X}\times C$.

В [I] доказана теорема о существовании значения для функций, полунепрерывных сверху по x. Как мы уже говорили,

класс таких функций не поглощает класса функций, возрастающих по x в точках разрыва. Более того, данное предложение утверждает существование оптимальных стратегий.

В этом предложении нельзя ослабить условия возрастания по x (либо убывания по y функции K в своих точках разрыва). Действительно, рассмотрим игру $\Gamma=\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y}, K\rangle$, где $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=[0,1]$, $K(x,y)=K(x)$, а функция K определяется так:

$$K(x)=\begin{cases} -x \text{ для } 0\leq x\leq 1/2, \\ -x+1 \text{ для } \frac{1}{2}\leq x\leq 1. \end{cases}$$

Тогда, как легко видеть, игра Γ не имеет решения, а функция K равномерно непрерывна на $\mathcal{X}\setminus\{1/2\}$. Правда, данная игра имеет ε-решение для любого $\varepsilon>0$. Поэтому сформулируем аналог предложения 2 для ε-решений игр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть замкнутые множества $B\subset\mathcal{X}$, $C\subset\mathcal{Y}$ таковы, что K равномерно непрерывна на множестве $(\mathcal{X}\setminus B)\times(\mathcal{Y}\times C)$, на $\mathcal{X}\setminus B$ - по x и на множестве $\mathcal{Y}\setminus C$ - по y. Пусть, кроме того, функция почти возрастает по x в своих точках разрыва и почти убывает по y. Тогда игра $\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y}, K\rangle$ имеет ε-решение для любого $\varepsilon>0$.*

Доказательство этого предложения вытекает из замечания к теореме I и определения почти возрастания функции в точках разрыва.

В приведенном выше примере игры функция платы почти возрастала в своих точках разрыва по x.

Приведем пример игры, где ослабление условия почти возрастания приводит к отсутствию значения игры. (Этот пример сводится к тому, что игрокам приходится выбирать стратегии из некомпактного множества.) Для доказательства этого факта рассмотрим игру $\Gamma=\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y}, K\rangle$, где $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=[0,1]$, а для определения функции K построим функцию K_1 на множестве $[0,1/2 \times[0,1/2)$. Функцию K_1 определим с помощью графика линейчатой поверхности в R^3, определяемой так. Рассмотрим в R^3 множества

$$\Pi_1=\{(x,y,z):(x,y,z)=(0,0,0)+u(1/2,0,1)=(x_1(u),y_1(u),z_1(u));u\in[0,1]\}, \quad (7)$$

$$\Pi_2=\{(x,y,z):(x,y,z)=(1/4,1/4,0)+u(1/4,0,1)=(x_2(u),y_2(u),z_2(u)),u\in[0,1]\},\quad(8)$$

$$\Pi_3=\{(x,y,z):(x,y,z)=(1/2,1/2,0)+u(0,0,1)=(x_3(u),y_3(u),z_3(u)),u\in[0,1]\},\quad(9)$$

т.е. Π_1 - отрезок, соединяющий точки (0,0,0) и (I/2,0,I), Π_2 - - точки (I/4,I/4,0) и (I/2,I/4,I) и Π_3 - точки (I/2,I/2,0) и (I/2,I/2,I). С помощью отрезков Π_1 , Π_2 построим линейчатую поверхность Σ_1 по формуле $\Sigma_1=\{(x,y,z):(x,y,z)=\lambda(x_1(u), y_1(u),z_1(u))+(1-\lambda)(x_2(u),y_2(u),z_2(u)); \lambda\in[0,1], u\in[0,1]\}$, где отображения $\{x_i(u),y_i(u),z_i(u)\}$ определяют отрезки $\Pi_i (i=1,2)$ по формулам (7),(8). Аналогично, с помощью отрезков Π_2 , Π_3 построим поверхность Σ_2 . Нетрудно видеть, что объединение поверхностей $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ определяет в множестве $\{(x,y):y\le x, 0\le x< <1/2\}\times[0,1]$ график некоторой функции, которую обозначим через $\tilde{K}_1$. Продолжая функцию $\tilde{K}_1$ на множестве $\{(x,y):y>x,0\le x<1/2\}$ нулем, получаем функцию K_1 , определенную на $[0,1/2 \times[0,1/2]$. Теперь может быть определена функция платы K :

$$K(x,y)=\begin{cases} K_1(x,y), & \text{если } (x,y)\in[0,1/2)\times[0,1/2),\\ -100, & \text{если } (x,y)\in[1/2,1)\times[0,1/2),\\ +100, & \text{если } (x,y)\in[0,1/2)\times[1/2,1],\\ 0, & \text{если } (x,y)\in[1/2,1]\times[1/2,1].\end{cases}$$

Тогда

$$\sup_{\mu\in P(x)} \inf_{\nu\in P(y)} \int_{X\times Y} K(x,y)\mu\nu=0. \quad (10)$$

Действительно, как нетрудно видеть, у первого игрока стратегии из множества [0,I/2) доминируют стратегии из множества [I/2,I] , поэтому ему выгодно брать в качестве стратегий меры μ такие, что $\operatorname{supp}\mu\subset[0,1/2)$. Ввиду регулярности меры μ найдется интервал $(\xi(\epsilon), 1/2)$, где $\xi(\epsilon)>0$, такой, что вариация сужения меры μ на интервал $(\xi(\epsilon),1/2)$ меньше ϵ . Тогда, взяв в качестве стратегии ν_μ второго игрока точечный заряд, сосредоточенный в точке $y_0\in(\xi(\epsilon), 1/2)$, будем иметь

$$\left|\int_{X\times Y} K(x,y)\nu_\mu\mu\right|<C\cdot\epsilon,$$

где $C=\max_{(x,y)\in X\times Y}|K(x,y)|$,что и доказывает равенство (I0).

Точно так же у второго игрока стратегии из множества [0,I/2) доминируются стратегиями из множества [I/2,I] , т.е. он может обойтись стратегиями ν такими, что $\operatorname{supp}\nu\subset[0,1/2)$.

Нетрудно показать, что если ν – стратегия второго игрока такая, что $\operatorname{supp}\nu \subset [0,1/2)$, то, взяв свою стратегию μ_ν достаточно близко к стратегии, сосредоточенной в точке I/2, но такой, что $\operatorname{supp}\mu_\nu \subset [0,1/2)$, первый игрок может всегда добиться неравенства $\int\limits_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} K(x,y)\mu_\nu\nu \geqslant 1-\varepsilon$, откуда вытекает

$$\inf_{\nu\in P(\mathcal{Y})}\ \sup_{\mu\in P(\mathcal{X})} \int\limits_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} K(x,y)\mu\nu = 1,$$

что вместе с (IO) и дает отсутствие у игры ε-ситуации равновесия для $0\leq\varepsilon<1$.

Другими словами, в этой игре ни у одного из игроков нет гарантирующей стратегии, и поэтому каждый из игроков вынужден "ошибаться", беря "почти гарантирующие стратегии", а эти ошибки используются противником. В приведенной игре Γ функция K непрерывна по x на множестве $\mathcal{X}\setminus\{1/2\}$ и по y на множестве $\mathcal{Y}\setminus\{1/2\}$, она не является почти возрастающей по x в точках разрыва.

Развитая техника позволяет иногда решить задачу о существовании седла для функции платы с произвольными разрывами. Например, нетрудно, как и выше, доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть борелевские множества $A\subset\mathcal{X}$, $B\subset\mathcal{Y}$ таковы, что в игре $\langle A,B,\bar{R}\rangle$, где $\bar{R}(x,y)=K(x,y)|_{A\times B}$, существуют оптимальные смешанные стратегии. И пусть выполняются условия: $A \overset{\tilde{R},\mathcal{X}}{\geqslant} \mathcal{X}$, где $\tilde{R}(x,y)=K(x,y)|_{\mathcal{X}\times B}$; и $B \overset{K^*,\mathcal{Y}}{\leqslant} \mathcal{Y}$, где $K^*(x,y)=K(x,y)|_{A\times\mathcal{Y}}$. Тогда в игре $\langle\mathcal{X},\mathcal{Y},K\rangle$ существуют оптимальные смешанные стратегии.*

ЛИТЕРАТУРА

I. ЯНОВСКАЯ Е.Б. О существовании значения антагонистических игр с полунепрерывными функциями выигрышей. – "Изв. АН СССР. Техническая кибернетика", 1973, № 6, с.56-60.
2. ПАРТХАСАРАТХИ Т., РАГХАВАН Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М., "Мир", 1974.

3. ХОАНГ ТУЙ. Об одной общей минимаксной теореме. - "ДАН СССР", 1974, т. 219, № 4, с.818-822.
4. СУДЖЮТЕ Д. Сходимость ε-равновесных стратегий к равновесным в неантагонистических играх с выбором момента времени.- "Литов. мат. сб.", 1974, т.14, № 3, с. 195-223.
5. КАРЛИН С. Операторное истолкование принципа минимакса. - В кн.: Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963, с. 47-76.
6. ВОРОБЬЕВ Н.Н. Бесконечные антагонистические игры. - В кн.: Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963, с. 7-23.
7. ГЛИКСБЕРГ И.Л. Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуации равновесия в смысле Нэша. - В кн.: Бесконечные антагонистические игры. М., 1963, с. 497-503.

Поступила в ред.-изд. отд.
14. X.1977 г.