Выпуск 21 (38) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Выпуклый анализ

УДК 518.9:519.53

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ЯДРА КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

В.А.Васильев

Важность понятия ядра в теории игр и теории экономического равновесия хорошо известна (см., например, [1,2]). Непустота ядра кооперативной игры $\Gamma=(N,v)$ означает, в частности, возможность полной децентрализации Γ (см. предложение 3.1 ниже). Именно, если, как и в [3], величинам v_ω, определяемым из соотношений

$$v(S)=\sum_{\omega\subseteq S} v_\omega \qquad (S\subseteq N), \tag{0.1}$$

придавать смысл (суммарного) дивиденда, которым располагает союз ω, то каждый элемент ядра $C(v)$ может быть получен в результате распадения всех союзов и распределения соответствующих дивидендов между их участниками.

Однако класс игр с непустым ядром сравнительно узок и применение указанного процесса в общей ситуации дает "неблокируемые" дележи лишь в случае, когда определенная часть союзов сохраняется. В итоге в распоряжение отдельных участников переходит лишь часть суммарного капитала $v(N)=\sum_{\omega\subseteq N} v_\omega$, а остальная доля передается в агрегированном виде сохранившимся союзам. Получившийся дележ естественно интерпретировать как результат частичной децентрализации (структуры союзов) исходной игры Γ. Приведенное соображение позволяет строить такие аналоги ядра кооперативной игры, которые во многих отношениях выполняют роль обычного ядра, если таковое отсутст-

вует. Кроме того, возникает возможность классификации всех игр по степени допустимой децентрализации.

В формальном плане настоящую работу можно рассматривать как продолжение работы [4], одной из целей которой являлось изучение полиномиальных "опорных" множеств для функций ограниченной полиномиальной вариации. Работа состоит из четырех частей. В первой части формулируются и обсуждаются различные варианты понятия полиномиального ядра кооперативной игры. Здесь же приводятся необходимые для дальнейшего сведения из [4]. Остальные три части посвящены, главным образом, выяснению условий, обеспечивающих непустоту полиномиальных ядер для игр ограниченной полиномиальной вариации. Во второй части устанавливается непустота слабого квадратичного ядра для любой полиномиальной функции множества из $V(\Sigma)$. Здесь же доказывается, что множество всех функций из $\tau V(\Sigma)$, имеющих непустое квадратичное ядро, всюду плотно в $\tau V(\Sigma)$ (по норме полной вариации). Связь между обычными и полиномиальными ядрами изучается в третьей части. Среди других результатов здесь следует отметить предложение 3.I, характеризующее элементы C_1 - ядра конечной игры с точки зрения структуры ее союзов. Содержание четвертой части составляет доказательство критерия непустоты сильного полиномиального ядра и обобщение предложения 3.I на случай $m>1$. Основным инструментом исследования, как и в работе [5], является теорема Фань Цзи о разрешимости системы линейных неравенств. При этом систематически используется линеаризация исходной задачи, состоящая в переходе к соответствующей тензорной степени нормированного пространства $B(Q,\Sigma)$.

I. Зафиксируем некоторые обозначения и приведем необходимые в дальнейшем определения из [4].

Пусть (Q,Σ) - произвольное измеримое пространство. Для каждого $e\in\Sigma$ и $n\geq 1$ через $\Xi_n(e)$ обозначим совокупность всех Σ -измеримых разбиений $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}$ элемента e таких, что $m\leq n$. Положим $\Xi_n \triangleq \bigcup_{e\in\Sigma}\Xi_n(e)$, $\Xi(e)\triangleq\bigcup_{n=1}^{\infty}\Xi_n(e)$, $\Xi\triangleq\bigcup_{e\in\Sigma}\Xi(e)$. Далее, через $U(\Sigma)$ обозначим совокупность всех вещественнозначных функций ϑ, определенных на Σ, таких, что $\vartheta(\emptyset)=0$. Для $\vartheta\in U(\Sigma)$ и $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in\Xi$ через $\vartheta(\eta)=$ $=\vartheta_m(e_1,\dots,e_m)$ будем обозначать величину, называемую в дальней-

шем полиномиальной разностью ϑ порядка m (см.[6]). Последняя определяется следующими рекуррентными соотношениями:

$$\vartheta_1(e_1) \triangleq \vartheta(e_1),$$
$$\vartheta_{n+1}(e_1,\dots,e_n,e_{n+1}) \triangleq \vartheta_n(e_1,\dots,e_{n-1},e_n \cup e_{n+1}) -$$
$$- \vartheta_n(e_1,\dots,e_{n-1},e_n) - \vartheta_n(e_1,\dots,e_{n-1},e_{n+1}). \qquad (1.1)$$

Отметим сразу же, что в случае, когда $Q=N$ дискретно, полиномиальные разности $\vartheta(\eta)$, определяемые по формулам (I.I), в случае $\eta=\{\{i_1\},\dots,\{i_k\}\}$ совпадают с величинами ϑ_ω $(\omega=\{i_1,\dots,i_k\})$, фигурирующими в соотношениях (0.I). Отсюда, в частности, вытекает, что для любого разбиения $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}$ $(\eta\in\Xi)$ справедливо равенство, аналогичное (0.I):

$$\vartheta\Big(\bigcup_{i=1}^{m} e_i\Big) = \sum_{\omega\subseteq N^\ell} \vartheta(\eta^\omega), \qquad (1.2)$$

где $\eta^\omega \triangleq \{e_{i_1},\dots,e_{i_k}\}$ $\quad(\omega=\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq N^\ell=\{1,\dots,m\})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I. Будем говорить, что функция $\vartheta\in U(\Sigma)$ вполне положительна, если все ее полиномиальные разности любого порядка неотрицательны.

Выпуклый конус таких функций обозначим через $V_+(\Sigma)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2. Будем говорить, что функция $\vartheta\in U(\Sigma)$ имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если она представима в виде разности двух функций из $V_+(\Sigma)$.

Совокупность всех функций ограниченной полиномиальной вариации обозначим через $V(\Sigma)$. С помощью конуса $V_+(\Sigma)$ и нормы $\|\cdot\|_0$, определенной по формуле

$$\|\vartheta\|_0 \triangleq \inf\{u(Q)+w(Q) \mid \vartheta=u-w,\ u,w\in V_+(\Sigma)\},$$

линейное множество функций $V(\Sigma)$ наделяется структурой полуупорядоченного нормированного векторного пространства $(V(\Sigma),\|\cdot\|_0,\geq_0)$.*)

Таким образом, для каждого элемента $\vartheta\in V(\Sigma)$ определены величины $\vartheta_+=\vartheta\vee\mathbb{O}$, $\vartheta_-=-\vartheta\vee\mathbb{O}$, $|\vartheta|=-\vartheta\vee\vartheta$, называемые в дальнейшем положительной, отрицательной и полной вариациями ϑ соответственно.

---

*) Здесь, как и обычно, $u\geq_0\vartheta \Longleftrightarrow u-\vartheta\in V_+(\Sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Норма $\|\cdot\|_0$ может быть определена также следующими выражениями:

$$\|\vartheta\|_0 = \sup\{\sum_{\omega\in N^{\tau}} |\vartheta(\eta^{\omega})| \,|\, \eta\in \Xi(Q)\},$$

$$\|\vartheta\|_0 = |\vartheta|(Q) = \vartheta_+(Q) + \vartheta_-(Q).$$

Через $V^m(\Sigma)\,(m\geq 1)$ будем обозначать совокупность всех функций $\vartheta\in V(\Sigma)$, у которых все полиномиальные разности порядка $m+1$ обращаются в нуль. Положим $\rho V(\Sigma) \triangleq \bigcup_{m=1}^{\infty} V^m(\Sigma)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.3 [6]. Функция ϑ называется полиномиальной (порядка m), если $\vartheta\in\rho V(\Sigma)$ $(\vartheta\in V^m(\Sigma))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.4. Функция $\vartheta\in V^m(\Sigma)$ называется однородной порядка m, если она дизъюнктна (в смысле полуупорядоченности $\geq_0$) с подпространством $V^{m-1}(\Sigma)$.*)

Совокупность всех однородных порядка m функций будем обозначать через $V^{(m)}(\Sigma)$ $(V^{(1)}(\Sigma)\triangleq V^1(\Sigma))$.

Можно показать (см.[7], теорема 2.2), что для каждого $m\geq 1$ подпространство $V^{(m)}(\Sigma)$ является компонентой пространства $(V(\Sigma), \geq_0)$. Поэтому для каждого элемента $\vartheta\in V(\Sigma)$ существует его проекция (в смысле полуупорядоченности) $\vartheta_{(m)}$ на подпространство $V^{(m)}(\Sigma)$ $(m\geq 1)$. Для каждого $m\geq 1$ положим $\vartheta_m \triangleq \sum_{k=1}^{m} \vartheta_{(k)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.5. Функция $\vartheta\in V(\Sigma)$ называется аналитической, если

$$\vartheta(e) = \lim_{m\to\infty} \vartheta_m(e) \qquad (e\in\Sigma).$$

Совокупность всех таких функций будем обозначать через $aV(\Sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.2. Простейшим примером аналитических функций множества могут служить функции из $\rho V(\Sigma)$, поскольку для любой функции $\vartheta\in V^m(\Sigma)$ справедливо разложение

$$\vartheta = \sum_{k=1}^{m} \vartheta_{(k)}, \tag{I.3}$$

(см.[7], теорема 3.I).

Напомним еще определение регулярных функций множества (для случая, когда Σ - борелевская σ-алгебра компакта Q).

*) Однородные порядка m функции полностью характеризуются тем, что они удовлетворяют соотношениям $\vartheta\in V^m(\Sigma)$, $\lim_{\eta\in\Xi(e)} \sum_{|\omega|=k} \vartheta(\eta^{\omega}) = 0$ для всех $e\in\Sigma$, $k<m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.6. Функция $v \in V(\Sigma)$ называется регулярной, если для любых $m \geq 1$, $\eta = \{e_1, \ldots, e_m\} \in \Xi$ выполняется условие

$$|v|_m(e_1, \ldots, e_m) = \sup\{|v|_m(f_1, \ldots, f_m) \mid f_i \in \hat{Q}, f_i \subseteq e_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)\},$$

где $\hat{Q}$ – совокупность всех замкнутых подмножеств Q. Множество всех таких функций будем обозначать через $r V(\Sigma)$.

Определим, наконец, основные объекты, изучаемые в работе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.7. Полиномиальным ядром порядка m функции $v \in V(\Sigma)$ называется множество $C_m(v)$ всех функций $w \in V^m(\Sigma)$, удовлетворяющих условиям

$$w \geq_0 v_m, \tag{I.4}$$

$$w(e) \geq v(e) \qquad (e \in \Sigma), \tag{I.5}$$

$$w(Q) = v(Q). \tag{I.6}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.8. Слабым полиномиальным ядром порядка m функции $v \in V(\Sigma)$ будем называть множество $C_m^w(v)$ все функций $w \in V^m(\Sigma)$, удовлетворяющих условиям (I.5), (I.6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.9. Сильным полиномиальным ядром порядка m функции $v \in V(\Sigma)$ будем называть множество $C_m^s(v)$ всех функций $w \in C_m(v)$, удовлетворяющих неравенствам

$$w(\eta) \geq v(\eta) \tag{I.7}$$

для всех $\eta = \{e_1, \ldots, e_k\} \in \Xi_m$ таких, что $\bigcup_{i=1}^{k} e_i \notin supp\, v$, где $supp\, v \triangleq \{R \in \Sigma \mid v(e) = v(e \cap R) \ (e \in \Sigma)\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.3. Ясно, что справедливы включения

$$C_m^s(v) \subseteq C_m(v) \subseteq C_m^w(v). \tag{I.8}$$

Далее, для любой функции $v \in V(\Sigma)$ множество $C_1^s(v) = C_1(v)$ представляет собой обычное ядро кооперативной игры $\Gamma = (\Sigma, v)$ (неравенство (I.4) в данном случае является следствием неравенств (I.5)). Условие (I.4) представляет собой соответствующий аналог требования индивидуальной рациональности для элементов из ядра кооперативной игры. Оно приобретает особенно простой вид, когда $Q = N$ дискретно. В этом случае, как нетрудно проверить, условие (I.4) эквивалентно следующему:

$$w_\omega \geq v_\omega \tag{I.4'}$$

для всех $\omega \subseteq N$ таких, что $|\omega| \leq m$.

Если, как и в [3], величинам v_ω придавать смысл (сум-

марного) дивиденда, которым располагает союз (акционерное общество) ω, то условие (I.4) можно интерпретировать как требование акционерной рациональности соответствующего порядка, а условие (I.7) - как требование коалиционной акционерной рациональности. Условия (I.5), (I.6) имеют тот же смысл, что и при $m = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.4. Пусть Q дискретно. Если во множестве

$$X_m(v)=\{w\in V^m(\Sigma)\mid w(Q)=v(Q),\ w_\omega \geq v_\omega\ (|\omega|\leq m)\}$$

всех акционерно-рациональных (порядка m) дележей игры $\Gamma=(Q,v)$ ввести отношение доминирования

$$w \succ_m w' \Longleftrightarrow \exists S\subseteq Q\ \ \forall\omega\subseteq S[(w_\omega > w'_\omega)\ \&\ (w(S)\leq v(S))],$$

то $C_m(v)$ представляет собою совокупность недоминируемых дележей из $X_m(v)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.5. Если $C_m(v)\neq\emptyset$, то, как будет показано ниже, всегда найдется элемент $w\in C_m(v)$, который можно представить в виде

$$w_\omega = \sum_{\omega'|\omega\subseteq\omega'} q_\omega^{\omega'}\cdot v_{\omega'} \qquad (|\omega|\leq m), \tag{I.9}$$

где $q_\omega^{\omega'}\geq 0,\ \sum_{\omega|\omega\subseteq\omega',|\omega|\leq m} q_\omega^{\omega'} = 1.$

Укажем еще, что представление (I.9) имеет место для каждого элемента ядра $C_m^s(v)$ (предложение 4.I ниже). Таким образом, как уже отмечалось ранее, наличие непустого ядра $C_1(v)$ отвечает возможности полной " децентрализации" игры $\Gamma=(\Sigma,v)$. Если же $C_1(v)=\emptyset$, то в качестве соответствующей замены выступают ядра $C_m(v)$, измеряющие спенень допустимой "децентрализации" Γ.

2. Начнем с рассмотрения условий, обеспечивающих непустоту слабых полиномиальных ядер. С этой целью отметим, прежде всего, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Если $v\in V_+(\Sigma)$, то $C_m^\omega(v)\neq\emptyset$ для всех m.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v - произвольная функция из $V_+(\Sigma)$. Покажем, что $C_1^\omega(v)\neq\emptyset$. Для этого, на основании теоремы 4.2 из [I], достаточно убедиться в сбалансированности функции v, т.е. в справедливости неравенств

$$\sum_I \alpha_i \cdot v(e_i) \leq v(Q) \qquad (2.1)$$

для любых наборов $\{\alpha_i, e_i\}_I$ таких, что

$$e_i \in \Sigma, \ \alpha_i \geq 0 \ (i \in I), \ \sum_I \alpha_i \chi_{e_i} \leq \chi_Q.^{*)} \qquad (2.2)$$

Итак, пусть $\{e_i, \alpha_i\}_I$ - произвольный набор, удовлетворяющий условиям (2.2). Рассмотрим разбиение $\eta = \{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_s\} \in \Xi(Q)$, индуцированное элементами $e_i (i \in I)^{**)}$, и, используя формулу (I.2) перепишем выражение $\sum_I \alpha_i v(e_i)$ в виде $\sum_{N^\eta} \alpha_\omega \cdot v(\eta^\omega)$, где $\alpha_\omega \triangleq \sum_{i/\hat{e}_k \subseteq e_i \, (k \in \omega)} \alpha_i$. Учитывая условие (2.2), убеждаемся в том, что $0 \leq \alpha_\omega \leq 1$ для всех $\omega \subseteq N^\eta$. Поскольку $v \in V_+(\Sigma)$, то

$$v(Q) = \sum_{N^\eta} v(\eta^\omega) \geq \sum_{N^\eta} \alpha_\omega \cdot v(\eta^\omega) = \sum_I \alpha_i \cdot v(e_i).$$

Таким образом, $C_1^\omega(v) \neq \emptyset$ для всех $v \in V_+(\Sigma)$, что вместе с очевидными включениями

$$C_m^\omega(v) \subseteq C_n^\omega(v) \qquad (n \geq m \geq 1) \qquad (2.3)$$

и подтверждает справедливость предложения .I.

Переходя к доказательству основного результата этого пункта, приведем простую вспомогательную лемму, представляющую, по-видимому, и самостоятельный интерес.

Пусть $I = \{0, 1, \ldots, k\}$ и $\{e_i, \alpha_i\}_I$ - произвольный набор элементов из Σ и R соответственно. Для каждого конечного подмножества $\tau \subseteq Q$ положим

$$K_\tau \triangleq \{i \in I \mid \tau \subseteq e_i\}, \quad \alpha^\tau \triangleq \sum_{K_\tau} \alpha_i .$$

В этих обозначениях справедлива

ЛЕММА 2.I. Пусть набор $\{e_i, \alpha_i\}_I$ таков, что

I) $e_0 = Q, \ e_i \neq Q \quad (i \neq 0)$,

---

*) Здесь, как и далее, χ_e - характеристическая функция множества e.

**) Каждое $\hat{e}_k$ имеет вид $\bigcap_{i \in I} \tilde{e}_i$, где $\tilde{e}_i$ равно либо e_i, либо $Q \setminus e_i$.

2) $\alpha_0 < 0$, $\alpha_i > 0 \quad (i \neq 0)$, (2.4)

3) $|\alpha^\tau| \leq 1 \quad (|\tau| \leq 2)$.

Т о г д а

$$|\alpha^\tau| \leq 2|\tau| - 3 \tag{2.5}$$

д л я в с е х $\tau \subseteq Q$ т а к и х , ч т о $2 \leq |\tau| < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ - некоторое конечное подмножество Q и $t \notin \tau$. Определим $K_\tau^t \triangleq \{i \in I / \tau \subseteq e_i, t \notin e_i\}$, $\alpha_t^\tau \triangleq \sum_{K_\tau^t} \alpha_i$ и покажем, что для всех таких τ и t справедливы неравенства

$$0 \leq \alpha_t^\tau \leq 2. \tag{2.6}$$

В самом деле, так как $0 \notin K_\tau^t$, то на основании (2.4) $\alpha_t^\tau \geq 0$ для всех $\tau, t \notin \tau$. Для доказательства неравенства $\alpha_t^\tau \leq 2$ рассмотрим сначала случай, когда $\tau = \{t_1\}$. В этой ситуации, в силу условий (2.4), справедливы соотношения

$$-1 \leq \alpha_t^{\{t_1\}} + \alpha^{\{t_1, t\}} \leq 1, \quad -1 \leq \alpha^{\{t_1, t\}} \leq 1,$$

из которых и вытекает нужная нам оценка $\alpha_t^{\{t_1\}} \leq 2$.

Общий случай сводится к рассмотренному с помощью неравенств $\alpha_t^{\tau_1} \leq \alpha_t^{\tau_2}$ $(\tau_2 \subseteq \tau_1, t \notin \tau_1)$, вытекающих из (2.4) и непосредственно из определения величины α_t^τ.

Переходя к доказательству неравенства (2.5), отметим, что при $|\tau| = 2$ оно совпадает с одним из условий (2.4). Доказательство (2.5) для общего случая проведем индукцией по числу элементов в τ. Итак, пусть неравенство (2.5) справедливо для всех τ таких, что $2 \leq |\tau| \leq m$, и покажем, что оно выполняется и для $m+1$ -элементных множеств $\tau' = \{t_1, \ldots, t_m, t_{m+1}\}$. Полагая $\tau_1' = \{t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}\}$, получаем

$$\alpha^{\tau_1'} = \alpha_{t_1}^{\tau_1'} + \alpha^{\tau'}.$$

Из индукционного предположения вытекают неравенства

$$-2m + 3 \leq \alpha_{t_1}^{\tau_1'} + \alpha^{\tau'} \leq 2m - 3,$$

откуда, на основании (2.6), имеем: $|\alpha^{\tau'}| \leq 2(m+1) - 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I. Оценки (2.5) допускают уточнения в связи с тем, что величины α^τ стабилизируются, начиная с $|\tau| \geq m_0$, где m_0 - число элементов в разбиении Q, индуцированном множествами $\{e_i\}_I$. В результате для τ, число элементов которых не превосходит m_0, справедливы неравенства

$$|\alpha^{\tau}| \le 2m_0 - 3.$$

Вместе с тем неравенства (2.5) неулучшаемы для всех τ таких, что $|\tau| < m_0$. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев произвольное разбиение $\eta = \{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_{m_0}\} \in \Xi(Q)$ и полагая $e_0 = Q$, $e_i = Q \setminus \hat{e}_i$ $(i = 1, \ldots, m_0)$, $\alpha_0 = 3 - 2m_0$, $\alpha_i = 2$ $(i = 1, \ldots, m_0)$.

ТЕОРЕМА 2.I. Если $\vartheta \in V(\Sigma)$ такова, что $\vartheta_- \in aV(\Sigma)$ и $\sum_{m=1}^{\infty} m \|(\vartheta_-)_{(m)}\|_0 < \infty$, то $C_2^{\omega}(\vartheta) \ne \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\vartheta = \vartheta_+ - \vartheta_-$, $C_2^{\omega}(\vartheta_+) + C_2^{\omega}(-\vartheta_-) \subseteq C_2^{\omega}(\vartheta)$ и, в силу предложения 2.I, $C_2^{\omega}(\vartheta_+) \ne \emptyset$, то всюду в дальнейшем можем считать, что $\vartheta \in -V_+(\Sigma)$.

Вопрос о непустоте $C_2^{\omega}(\vartheta)$ редуцируется к вопросу о разрешимости некоторой системы линейных неравенств следующим образом. На тензорном квадрате $X = B \overset{\vee}{\otimes} B$ пространства $B = B(Q, \Sigma)$ ограниченных Σ-измеримых функций на Q, наделенном топологией равностепенно-непрерывной сходимости и отвечающей ей нормой $\|\cdot\|_{\varepsilon}$ (см.[8], гл. IУ, § 9), рассмотрим систему линейных неравенств

$$\left.\begin{aligned} &\ell(\lambda_{\{e\}}) \ge \vartheta(e) \qquad (e \in \Sigma), \\ &\ell(-\lambda_{\{Q\}}) \ge -\vartheta(Q), \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

где $\ell \in X'$, $\lambda_{\{e\}} \triangleq \chi_e \otimes \chi_e$ $\quad (e \in \Sigma)$.

Пусть ℓ — некоторое решение системы (2.6). Положим $w(e) = w_{\ell}(e) \triangleq \ell(\lambda_{\{e\}})$ $(e \in \Sigma)$. Если верно, что $w \in C_2^{\omega}(\vartheta)$, то для доказательства теоремы 2.I останется лишь проверить, что система (2.6) разрешима.

Из построения w ясно, что доказательство включения $w \in C_2^{\omega}(\vartheta)$ сводится к установлению квадратичности w и ограниченности ее полиномиальной вариации. Что касается квадратичности, то она вытекает из легко проверяемого тождества

$$\lambda_{\{e_1 \cup e_2 \cup e_3\}} + \lambda_{\{e_1\}} + \lambda_{\{e_2\}} + \lambda_{\{e_3\}} = \lambda_{\{e_1 \cup e_2\}} + \lambda_{\{e_1 \cup e_3\}} + \lambda_{\{e_2 \cup e_3\}} \qquad (\{e_1, e_2, e_3\} \in \Xi_3)$$

и линейности ℓ. Для доказательства того, что $w \in V(\Sigma)$, покажем, что $\sum_{\omega \in N^2} |w(\eta^{\omega})| \le \|\ell\|$ для любого $\eta \in \Xi(Q)$ $(\eta = \{e_1, \ldots, e_n\})$. С этой целью оценим значение ℓ на элементе $\alpha = \sum_{|\omega| \le 2} \varepsilon_{\omega} \cdot \lambda_{\eta}^{\omega}$, где

$$\varepsilon_\omega = \begin{cases} -1, & w(\eta^\omega) \geq 0, \\ -1, & w(\eta^\omega) < 0, \end{cases}$$

$$\lambda_\eta^{\{i\}} = \lambda_{\{e_i\}}, \quad \lambda_\eta^{\{i,j\}} = \chi_{e_i} \otimes \chi_{e_j} + \chi_{e_j} \otimes \chi_{e_i}.$$

Ясно, что $\|\alpha\|_\varepsilon \leq 1$. Действительно, пусть $\mu, \nu \in V^1(\Sigma)$ и $\|\mu\|_0 \leq 1$, $\|\nu\|_0 \leq 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{\{i\}} \cdot \mu(e_i) \cdot \nu(e_i) + \sum_{i \neq j} \varepsilon_{\{i,j\}} \cdot (\mu(e_i) \cdot \nu(e_j) + \mu(e_j) \cdot \nu(e_i)) \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\mu(e_i)|\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\nu(e_i)|\right),$$

откуда, в силу определенной нормы $\|\cdot\|_\varepsilon$, и вытекает оценка $\|\alpha\|_\varepsilon \leq 1$. Таким образом, $|\ell(\alpha)| \leq \|\ell\|$. Но $\ell(\alpha) = \sum_{\omega \subseteq N^e} |w(\eta^\omega)|$, как это следует непосредственно из построения α. Отсюда, ввиду произвольности $\eta \in \Xi(Q)$, получаем требуемое: $\|w\|_0 \leq \|\ell\|$.

Покажем, наконец, что система (2.6) разрешима. Пусть $\{\lambda_{\{e_i\}}, \alpha_i\}_{i=1}^m$ — произвольный конечный набор, удовлетворяющий условиям

$$\alpha_i \geq 0 \quad (i=1,\ldots,m), \quad \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_{\{e_i\}}\right\|_\varepsilon = 1.$$

Суммируя коэффициенты при $\lambda_{\{Q\}}$, преобразуем выражение $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_{\{e_i\}}$ к виду $\sum_{i \in I'} \alpha_i \lambda_{\{e_i\}} + \alpha_0 \lambda_{\{Q\}}$, где $e_i \neq Q$ для всех $i \in I'$. Положим $I = I' \cup \{0\}$, $e_0 = Q$. Если $\alpha_0 \geq 0$, то $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot v(e_i) \leq 0$, как это вытекает из неравенств $\alpha_i \geq 0$ $(i \in I')$ и включения $v \in -V_+(\Sigma)$. Рассмотрим другой случай: $\alpha_0 < 0$. Пусть $\eta_0 = \{e_1^0, \ldots, e_{m_0}^0\} \in \Xi(Q)$ — разбиение, индуцированное семейством $\{e_i\}_I$. Применяя формулу (I.2), перепишем выражение $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot v(e_i)$ в виде $\sum_{N^{e_0}} \alpha_\omega \cdot v(\eta_0^\omega)$, где

$$\alpha_\omega \triangleq \begin{cases} \sum_{K_\omega} \alpha_i, & K_\omega \neq \emptyset \\ 0, & K_\omega = \emptyset \end{cases},$$

$$K_\omega \triangleq \{i \in I \mid e_k^0 \subseteq e_i \ (k \in \omega)\}.$$

Выберем произвольные элементы $t_i^0 \in e_i^0$ $(i \in N^{e_0})$ и положим $\tau_\omega = \{t_i^0 \mid i \in \omega\}$ $(\omega \subseteq N^{e_0})$. Как и в лемме 2.I, через α^{τ_ω} будем

обозначать величину $\sum_{i|\tau_\omega \leq e_i} \alpha_i$. Легко проверить, что $\alpha^{\tau_\omega} = \alpha_\omega$ для всех $\omega \subseteq N^{\ell_0}$. Далее, используя соотношение $\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_{\{e_i\}}\|_\varepsilon = 1$, убеждаемся в том, что набор $\{e_i, \alpha_i\}_I$ удовлетворяет всем условиям леммы 2.I. Поэтому $|\alpha_\omega| \leq 2|\omega| - 3$ для всех $\omega \subseteq N^{\ell_0}$. Отсюда, учитывая аналитичность ϑ, имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \vartheta(e_i) \leq \sum_{\omega \subseteq N^{\ell_0}} |\alpha_\omega| \cdot |\vartheta(\eta_0^\omega)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\omega \subseteq N^{\ell_0}} |\alpha_\omega| \cdot |\vartheta_{(m)}(\eta_0^\omega)| \leq$$

$$\leq |\vartheta_{(1)}(Q)| + \sum_{m=2}^{\infty} (2m-3) \cdot |\vartheta_{(m)}(Q)|. \qquad (2.7)$$

Из условия $\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \|\vartheta_{(m)}\|_0 < \infty$ вытекает, что выражение, стоящее последним в цепочке (2.8), ограничено константой, не зависящей от выбора системы $\{e_i, \alpha_i\}_{i=1}^{m}$. Таким образом, величина σ, определяемая применительно к нашей системе (2.6) по формуле

$$\sigma = \sup\{\sum_I \alpha_i \cdot \vartheta(e_i) \,|\, |I| < \infty, \alpha_i \geq 0 \ (i \in I),$$
$$\|\sum_I \alpha_i \lambda_{\{e_i\}}\|_\varepsilon = 1\},$$

конечна. Но это, в силу известной теоремы о разрешимости систем линейных неравенств (см. [9], теорема I3), и означает разрешимость системы (2.6). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.I. $C_2^\omega(\vartheta) \neq \phi$ для всех $\vartheta \in pV(\Sigma)$.

Применяя теорему 2.1 и следствие 2.1, получаем следующий принцип эквивалентности.

ТЕОРЕМА 2.2. Для всех $m \geq 3$ $C_m^\omega(\vartheta) \neq \phi \Longleftrightarrow C_2^\omega(\vartheta) \neq \phi$.

Отметим еще, что в случае, когда Σ - борелевская σ-алгебра метрического компакта Q, использование следствия 2.I и теоремы об аналитичности регулярных функций множества (см.[4], теорема 4.2) приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2.3. Множество всех функций $\vartheta \in rV(\Sigma)$, имеющих непустое квадратичное ядро $C_2^\omega(\vartheta)$, всюду плотно в пространстве $(rV(\Sigma), \|\cdot\|_0)$.

Далее нам потребуется более подробная характеристика

квадратичных ядер конечных игр*). Поскольку каждая из них является полиномиальной в соответствующем расширении, то, в силу следствия 2.I, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для каждой конечной игры $\Gamma=(N,v)$ ядро $C_2^{\omega}(v)$ непусто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Если $v\in -V_+(N)$ и $v_{\{i\}}=0$ для всех $i\in N$, то

$$\min\{\|w\|_0 \mid w\in C_2^{\omega}(v)\}=\sum_{m=2}^{|N|}(2m-3)\cdot\|v_{(m)}\|_0. \qquad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В конечномерном пространстве $R^{N^{(2)}}$ $(S^{(2)}\triangleq\{\omega\subseteq S \mid |\omega|\le 2\})$ рассмотрим систему линейных неравенств

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\omega\in S^{(2)}} w_\omega \ge v(S) \qquad (S\subseteq N),\\ &-\sum_{\omega\in N^{(2)}} w_\omega \ge -v(N). \end{aligned}\right\}$$

Полагая $x_0=-\chi_{N^{(2)}}$, $x_i=\chi_{(N\setminus\{i\})^{(2)}}$ $(i\in N)$, $\alpha_0=2|N|-3$, $\alpha_i=2$ $(i\in N)$, $\|x\|=\max\{|x_\omega| \mid \omega\in N^{(2)}\}$, имеем: $\|\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x_i\|=1$. При этом, как нетрудно проверить, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot v(N\setminus\{i\})-\alpha_0\cdot v(N)=$ $=\sum_{m=2}^{n}(2m-3)\cdot\|v_{(m)}\|_0$. Отсюда, на основании теоремы Фань Цзи, и получаем соотношение (2.8). Минимум в (2.8) реализуется, например, на функции $w_0=\sum_{|\omega|\ge 2} v_\omega\cdot\delta_\omega$, где

$$(\delta_\omega)_{\{i\}}\triangleq\begin{cases}-(|\omega|-2)/|\omega|, & i\in\omega,\\ 0, & i\notin\omega,\end{cases}$$

$$(\delta_\omega)_{\{i,j\}}\triangleq\begin{cases}2/|\omega|, & \{i,j\}\subseteq\omega,\\ 0, & \{i,j\}\not\subseteq\omega.\end{cases}$$

В заключение приведем два примера функций ограниченной полиномиальной вариации, для которых квадратичные (а тем самым и все остальные) ядра пусты. Эти примеры показывают, что ограничения, налагаемые на функцию v в теореме 2.I, существенны.

ПРИМЕР 2.I. Пусть (Q,Σ) - произвольное измеримое прост-

---

*) Напомним, что в этом случае $V^2(N)=\{v\in V(N) \mid v_\omega=0\ (|\omega|>2)\}$, и вообще, $V^m(N)=\{v\in V(N) \mid v_\omega=0\ \ (|\omega|>m)\}$, $m=1,\ldots,|N|$.

ранство, обладающее тем свойством, что для любого натурального m существует нетривиальное разбиение $\eta_m \in \Xi(Q)$ $(\eta_m = \{e_1^m, \dots, e_m^m\})$. Рассмотрим функцию

$$-\varepsilon_Q(e) = \begin{cases} 0, & e \neq Q, \\ -1, & e = Q. \end{cases}$$

Ясно, что $-\varepsilon_Q \in -V_+(\Sigma)$. В то же время $-\varepsilon_Q \notin aV(\Sigma)$ и $C_2^\omega(-\varepsilon_Q) = Q$. Действительно, $(-\varepsilon_Q)_{(m)} = 0$ для всех $m = 1, \dots$, откуда вытекает ее неаналитичность. Допуская, что $C_2^\omega(-\varepsilon_Q) \neq \neq \emptyset$, возьмем произвольный элемент $w \in C_2^\omega(-\varepsilon_Q)$ и для каждого $m > 1$ и нетривиального разбиения $\eta_m = \{e_1^m, \dots, e_m^m\}$ $(\eta_m \in \Xi(Q))$ определим функции $v_m : 2^{N\eta_m} \to R$, $w_m : 2^{N\eta_m} \to R$

$$v_m(\omega) \triangleq -\varepsilon_Q\left(\bigcup_{i\in\omega} e_i^m\right),$$

$$w_m(\omega) \triangleq w\left(\bigcup_{i\in\omega} e_i^m\right).$$

Ясно, что $w_m \in C_2^\omega(v_m)$ для всех $m > 1$. Поскольку $\|w\|_0 \geq \geq \|w_m\|_0$, то, на основании предложения (2.8), получаем

$$\|w\|_0 \geq 2m - 3 \quad (m > 1),$$

что противоречит конечности полной вариации всех элементов квадратичного ядра. Итак, $C_2^\omega(-\varepsilon_Q) = \emptyset$.

ПРИМЕР 2.2. Пусть Σ - борелевская σ-алгебра единичного отрезка $Q = [0,1]$, μ - мера Лебега на (Q, Σ). Рассмотрим функцию

$$v(e) \triangleq -\sum_{m=2}^{\infty} \mu^m(e) / (2m-3)^2 \quad (e \in \Sigma).$$

Нетрудно проверить, что v - регулярная (и тем самым аналитическая) функция множества. Кроме того, ясно, что $v = -v_-$, $v_{(1)} = 0$, $v_{(m)} = -\mu^m/(2m-3)^2 (m>1)$ и $\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \|v_{(m)}\|_0 = \infty$. Таким образом, v удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1, кроме последнего. Покажем, что $C_2^\omega(v) = \emptyset$. Действительно, допуская существование $w \in C_2^\omega(v)$, с помощью тех же аргументов, что и в примере 2.1, можно доказать, что

$$\|w\|_0 \geq \sum_{m=3}^{\infty} 1/2m-3 .$$

Но это противоречит включению $C_2^\omega(v) \subseteq V(\Sigma)$, а тем самым и допущению $C_2^\omega(v) \neq \emptyset$.

3. Условия непустоты ядра $C_m(v)$ можно было бы получить на том же пути, что и доказательство теоремы 2.I (введение тензорного произведения $B^m = B\check{\otimes}\ldots\check{\otimes} B$ и соответствующая линеарицация задачи). Однако в этом нет необходимости, как показывает следующая

ТЕОРЕМА 3.I. $C_m(v)\neq\emptyset \Longleftrightarrow C_1(v-v_m)\neq\emptyset$ для всех $m\geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $C_1(v-v_m)\neq\emptyset$, то, как нетрудно убедиться, все элементы из $C_1(v-v_m)$ принадлежат $V_+(\Sigma)$ Поэтому, взяв произвольную функцию $w_1\in C_1(v-v_m)$ и полагая $w=w_1+v_m$, получаем: $w\in C_m(v)$.

Пусть теперь $C_m(v)\neq\emptyset$ и $w\in C_m(v)$. Ясно, что функция $w-v_m=w'$ принадлежит $C_m^+(v-v_m)$.*) Но тогда, в силу предложения 2.I, существует $\mu\in C_1(w')$, которая, очевидно, принадлежит и $C_1(v-v_m)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, в силу теоремы 3.I и теоремы 4.I из [I], справедлив следующий критерий непустоты ядра C_m.

ТЕОРЕМА 3.2. Для того чтобы ядро $C_m(v)$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного набора $\{e_i,\alpha_i\}_I$ такого, что

$$\sum_I \alpha_i \chi_{e_i} \leq \chi_Q ,$$

выполнялось неравенство

$$\sum_I \alpha_i v^{(m)}(e_i)\leq v^{(m)}(Q),$$

где $v^{(m)}\triangleq v-v_m$.

Для каждого $m\geq 1$ через $V_{+m}(\Sigma)$ обозначим совокупность всех функций $v\in V(\Sigma)$, у которых все разности порядка выше m неотрицательны. Нетрудно проверить, что для каждой функции $v\in V_{+m}(\Sigma)$ справедливы включения: $v^{(s)}\in V_+(\Sigma)$ $(s\geq m+1)$. Отсюда и из теоремы 3.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.I. Если $v\in V_{+m}(\Sigma)$, то $C_s(v)\neq\emptyset$ для всех $s\geq m+1$. В частности, $C_m(v)\neq\emptyset$ для всех $v\in V_+(\Sigma)$, $m\geq 1$.

Перейдем к обоснованию замечания I.5 (в той части, которая относится к C_m-ядрам). Основным (и представляющим самостоятельный интерес) является здесь случай $m=1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. Каждый элемент $w\in C_1(v)$ конечной игры $\Gamma=(N,v)$ представим

*) $C_m^+(v-v_m)\triangleq C_m(v-v_m)\cap V_+(\Sigma)$.

в виде

$$w_i = \sum_{\omega | i \in \omega} q_i^{\omega} \cdot v_{\omega} \quad (i \in N), \qquad (3.1)$$

где $q_i^{\omega}\ (i \in \omega \subseteq N)$ – некоторые неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i \in \omega} q_i^{\omega} = 1 \qquad (\omega \subseteq N). \qquad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, всякий элемент w ядра $C_1(v)$ представим в виде разности двух элементов из $C_1(v_+)$ и $C_1(v_-)$ соответственно. Действительно, пусть w_1 – произвольный элемент из $C_1(v_-)$ ($C_1(v_-)$ непусто в силу следствия 3.1). Тогда очевидно, что $w_2 = w + w_1 \in C_1(v_+)$, откуда и вытекает требуемое: $w = w_2 - w_1$. Далее, поскольку v_+ и v_- дизъюнктны ($(v_+)_{\omega} \cdot (v_-)_{\omega} = 0$ для всех $\omega \subseteq N$), то из вышесказанного вытекает, что доказательство формулы (3.1) достаточно провести для случая, когда $v = v_+$.

Итак, пусть $v \in V_+(N)$. Проверку предложения 3.1 будем осуществлять с помощью индукции по индексу $\rho(v) = (k_v, \ell_v)$, где $k_v \triangleq \min\{k \mid v \in V^k(N)\}$, $\ell_v \triangleq |\{\omega \mid |\omega| = k_v, v_{\omega} > 0\}|$ *).

Предложение 3.1 очевидно, если $\rho(v)$ имеет вид $(1, m)$. Пусть представление (3.1) справедливо для всех $u \in V_+(N)$ таких, что $\rho(v) \leqslant_{\lambda} (k, \ell)$. Не уменьшая общности, можно считать, что следующая за (k, ℓ) пара имеет вид $(k, \ell+1)$. Пусть $\rho(v) = (k, \ell+1)$ и $w \in C_1(v)$. Выберем произвольное $\omega_0 \subseteq N$ такое, что $|\omega_0| = k$, $v_{\omega_0} > 0$, и зафиксируем некоторое разбиение ω_0 на два непустых подмножества ω_1 и ω_2. Положим $\nu = w - v$ и определим величины

$$\alpha_1 = \min\{\nu(S) \mid S \in \mathcal{T}_1\},$$

$$\alpha_2 = \min\{\nu(T) \mid T \in \mathcal{T}_2\},$$

где $\mathcal{T}_1 = \{S \subseteq N \mid \omega_1 \subseteq S, \omega_2 \nsubseteq S\}$, $\mathcal{T}_2 = \{T \subseteq N \mid \omega_2 \subseteq T, \omega_1 \nsubseteq T\}$. Покажем, что выполняется неравенство

$$v_{\omega_0} \leqslant \alpha_1 + \alpha_2. \qquad (3.3)$$

---

*) Пары (k, ℓ) упорядочены лексикографически.

С этой целью зафиксируем некоторые множества $S_0 \in \mathcal{T}_1$, $T_0 \in \mathcal{T}_2$, удовлетворяющие равенствам $\alpha_1 = \nu(S_0)$, $\alpha_2 = \nu(T_0)$, и рассмотрим тождество, вытекающее из формулы (I.3):

$$\nu(S_0 \cup T_0) + \nu(S_0 \cap T_0) - \nu_2(\bar{S}_0, \bar{T}_0) - \nu_3(\bar{S}_0, \bar{T}_0, S_0 \cap T_0) = \nu(S_0) + \nu(T_0), \tag{3.4}$$

где $\bar{S}_0 = S_0 \setminus T_0$, $\bar{T}_0 = T_0 \setminus S_0$. Поскольку $w_2(\bar{S}_0, \bar{T}_0) = w_3(\bar{S}_0, \bar{T}_0, S_0 \cap T_0) = 0$, тождество (3.4) можно переписать в виде

$$v_2(\bar{S}_0, \bar{T}_0) + v_3(\bar{S}_0, \bar{T}_0, S_0 \cap T_0) + \alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2, \tag{3.5}$$

где $\alpha_{12} = \nu(S_0 \cup T_0) + \nu(S_0 \cap T_0)$. Далее, так как $w \in C_1(v)$, то, в силу (3.5), справедливо неравенство: $v_2(\bar{S}_0, \bar{T}_0) + v_3(\bar{S}_0, \bar{T}_0, S_0 \cap T_0) \le \alpha_1 + \alpha_2$. Отсюда, учитывая неотрицательность величин v_ω $(\omega \le N)$ и тот факт, что $S_0 \in \mathcal{T}_1$, $T_0 \in \mathcal{T}_2$, получаем требуемое:

$$v_{\omega_0} \le v_2(\bar{S}_0, \bar{T}_0) + v_3(\bar{S}_0, \bar{T}_0, S_0 \cap T_0) \le \alpha_1 + \alpha_2 .$$

Учитывая (3.3), выберем $\bar{v}_{\omega_1}$, $\bar{v}_{\omega_2}$ из условий $0 \le \bar{v}_{\omega_1} \le \alpha_1$, $0 \le \bar{v}_{\omega_2} \le \alpha_2$ и определим $v' \in V(N)$ в соответствии с формулой

$$v'(S) = \begin{cases} v(S) + \bar{v}_{\omega_1}, & S \in \mathcal{T}_1, \\ v(S) + \bar{v}_{\omega_2}, & S \in \mathcal{T}_2, \\ v(S), & S \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 . \end{cases}$$

Ясно, что $v' \in V_+(N)$ и $w \in C_1(v')$. Ввиду того, что $\rho(v') \le_\Lambda (k, \ell)$, индукционное предположение влечет представимость w в виде

$$w_i = \sum_{\omega / i \in \omega} \bar{q}_i^{\,\omega} \cdot v'_\omega \qquad \Big(\bar{q}_i^{\,\omega} \ge 0, \sum_{i \in \omega} \bar{q}_i^{\,\omega} = 1\Big).$$

А так как $v'_{\omega_0} = 0$, $v'_{\omega_1} = v_{\omega_1} + \bar{v}_{\omega_1}$, $v'_{\omega_2} = v_{\omega_2} + \bar{v}_{\omega_2}$, $v'_{\omega'} = v_{\omega'}$ $(\omega' \ne \omega_1, \omega_2)$, то, полагая

$$q_i^{\omega} = \begin{cases} \bar{q}_i^{\,\omega}, & \omega \ne \omega_0, \\ \bar{q}_i^{\,\omega_1} \cdot (\bar{v}_{\omega_1} / v_{\omega_0}), & \omega = \omega_0, \ i \in \omega_1, \\ \bar{q}_i^{\,\omega_2} \cdot (\bar{v}_{\omega_2} / v_{\omega_0}), & \omega = \omega_0, \ i \in \omega_2, \end{cases}$$

получаем

$$w_i = \sum_{\omega | i \in \omega} q_i^{\omega} \cdot v_{\omega} \qquad (i \in N),$$

что требовалось доказать.

Если $v \in V_+(N)$, то, как нетрудно убедиться, каждый элемент $w \in V'(N)$, компоненты которого определены в соответствии с формулой (3.I), принадлежит ядру $C_1(v)$. Таким образом, из предложения (3.I) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если $v \in V_+(N)$, то дележ w принадлежит C_1-ядру $\Gamma=(N,v)$ тогда и только тогда, когда он представим в виде (3.I).

Ввиду того, что $w + v_m \in C_m(v)$, где w - элемент ядра $C_1(v^{(m)})$, на основании предложения 3.I имеем

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Если $\Gamma=(N,v)$ - конечная игра и $C_m(v) \neq \emptyset$, то и $A_m(v) \neq \emptyset$, где $A_m(v)$ - совокупность всех функций из $C_m(v)$, представимых в виде (I.9).

Приведем простой пример, показывающий, что $A_m(v)$ составляет, вообще говоря, лишь часть ядра $C_m(v)$.

ПРИМЕР 3.I. Пусть $N=\{1,2,3,4\}$, а функции v и w определены (через v_{ω}, w_{ω}) следующим образом: $v_{23}=v_{123}=v_{124}=v_{134}=3$ и $v_{\omega}=0$ в остальных случаях; $w_1=4$, $w_{23}=8$ и $w_{\omega}=0$ в остальных случаях. Ясно, что $w \in C_2(v)$. В то же время $w_{\{2,3\}} > v_{\{2,3\}} + v_{\{1,2,3\}}$, что противоречит неравенствам

$$u_{\omega} \leq \sum_{\omega' | \omega \subseteq \omega'} v_{\omega'} \qquad (\omega \subseteq N),$$

справедливым на основании (I.9) для любой функции $u \in A_2(v)$. Это и доказывает несовпадение множеств $A_2(v)$ и $C_2(v)$.

Наконец отметим, что при $k \neq \ell$, не совпадающих с $|N|$, реализуются все логические возможности относительно непустоты ядер $C_k(v)$ и $C_\ell(v)$. Это вытекает из того, что в отличие от C_m^{ω}-ядер, для которых имеют место включения (2.3), C_m-ядра в общем случае не сравнимы при различных m. Вместе с тем, если в пространстве $V(N)$ рассмотреть единичный шар $W=\{v \mid \sum_{\omega \in N} v_{\omega}^2 \leq 1\}$, то, используя теорему 3.I, можно показать, что

$$mes\, W_1 < mes\, W_2 < \ldots < mes\, W_{|N|-1}, \qquad (3.6)$$

где W_m - совокупность всех игр из W, имеющих непустое C_m-ядро, mes - мера Лебега в пространстве $R^{Q^{(|N|)}}$. Таким образом, доля игр, имеющих непустое C_m-ядро, возрастает с ростом m; при этом $mes\, W_1 < mes\, W_{|N|-1} = \frac{1}{2} mes\, W$.

4. Переходя к доказательству критерия непустоты C_m^s-ядра, приведем одну вспомогательную лемму из [6].

ЛЕММА 4.I ([6], лемма I). Если $\Psi : \Sigma^m \to R$ - аддитивная по каждому аргументу функция множеств m переменных, то ее диагонализация $\vartheta_\Psi(e) \triangleq \Psi(e,\dots,e)$ $(e \in \Sigma)$ удовлетворяет тождеству

$$\vartheta_\Psi(\{e_1,\dots,e_m,e_{m+1}\}) = 0 \qquad (\{e_1,\dots,e_m,e_{m+1}\} \in \Xi_{m+1}).$$

При этом

$$\vartheta_\Psi(\{e_1,\dots,e_k\}) = \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in \mathcal{X}^m_{\{1,\dots,k\}}} \Psi(e_{i_1},\dots,e_{i_m}) \quad (\{e_1,\dots,e_k\} \in \Xi_m),$$

где $\mathcal{X}^m_{\{1,\dots,k\}}$ - совокупность всевозможных упорядоченных наборов $(i_1,\dots,i_m)$, составленных из всех элементов множества $\{1,\dots,k\}$.

Положим $Q^{(m)} = \{\tau \in Q \,/\, |\tau| \le m\}$, $\Xi_m^\vartheta = \{\{e_1,\dots,e_k\} \in \Xi_m \,|\, \bigcup_{i=1}^k e_i \notin$ $\notin supp\,\vartheta\}$ при $k \ne 1\}$ и для каждого $\eta = \{e_1,\dots,e_k\} \in \Xi_m^\vartheta$ через λ_η обозначим функцию из $Q^{(m)}$ в R, определенную в соответствии с формулой

$$\lambda_\eta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \cap e_i \ne \emptyset \quad (i=1,\dots,k), \tau \subseteq \bigcup_{i=1}^k e_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Условия непустоты C_m^s-ядра удобнее формулировать для функций из конуса $V_{m+}(\Sigma) \triangleq \{\vartheta \in V(\Sigma) \,|\, \vartheta(\eta) \ge 0 \ (\eta \in \Xi_m)\}$.

ТЕОРЕМА 4.I. Если $\vartheta \in V_{m+}(\Sigma)$, то $C_m^s(\vartheta) \ne \emptyset$ тогда и только тогда, когда для любого конечного набора $\{\eta_i, \alpha_i\}_I$ такого, что

$$\eta_i \in \Xi_m^\vartheta, \ \alpha_i \ge 0 \qquad (i \in I), \tag{4.I}$$

$$\sum_I \alpha_i \lambda_{\eta_i}(\tau) \le 1 \qquad (\tau \in Q^{(m)}), \tag{4.2}$$

в ы п о л н я е т с я   н е р а в е н с т в о

$$\sum_I \alpha_i \cdot \vartheta(\eta_i) \leq \vartheta(Q).$$

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть функция ϑ из $V_{m+}(\Sigma)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.I. Рассмотрим тензорную степень $X = \underbrace{B\check{\otimes}\ldots\check{\otimes}B}_{m}$, пространства $B = B(Q,\Sigma)$, наделенную нормой

$$\|\sum_{r=1}^{s} f_1^r \otimes \ldots \otimes f_m^r\|_\varepsilon \triangleq \sup\{\sum_{r=1}^{s} \prod_{k=1}^{m} \mu_k(f_k^r) | \mu_k \in V^1(\Sigma),$$

$$\|\mu_k\|_0 \leq 1 \quad (k = 1, \ldots, m)\},$$

и установим разрешимость системы линейных неравенств в X'

$$\ell(\lambda_\eta^*) \geq \vartheta(\eta) \qquad (\eta \in \Xi_m^\vartheta),$$

где $\lambda_\eta^* \triangleq \sum_{(i_1,\ldots,i_m) \in \pi^m_{\{1,\ldots,k\}}} \chi_{e_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \chi_{e_{i_m}} \quad (\eta = \{e_1, \ldots, e_k\} \in \Xi_m^\vartheta)$.
Для этого, в силу теоремы I3 из [9], достаточно доказать, что величина σ, определяемая по формуле

$$\sigma \triangleq \sup\{\sum_I \alpha_i \cdot \vartheta(\eta_i) | |I| < \infty, \alpha_i \geq 0 \ (i \in I), \|\sum \alpha_i \cdot \lambda_{\eta_i}^*\|_\varepsilon = 1\},$$

конечна. Покажем, что $\sigma = \vartheta(Q)$. В силу того, что $\sigma \geq \vartheta(Q)$, как это вытекает из рассмотрения тривиального набора $\{\lambda_{\{Q\}}^*, 1\}$, остается убедиться в справедливости неравенства $\sum_I \alpha_i \cdot \vartheta(\eta_i) \leq \vartheta(Q)$ для произвольного конечного набора $\{\lambda_{\eta_i}^*, \alpha_i\}_I$, удовлетворяющего условиям: $\alpha_i \geq 0 \ (i \in I)$, $\eta_i \in \Xi_m^\vartheta \ (i \in I)$, $\|\sum_I \alpha_i \lambda_{\eta_i}^*\|_\varepsilon = 1$.
С этой целью рассмотрим функцию $\sum_I \alpha_i \lambda_{\eta_i}$, ассоциированную с таким набором $\{\lambda_{\eta_i}^*, \lambda_i\}_I$, и покажем, что ее значения на $Q^{(m)}$ не превышают I. Итак, пусть $\tau_0 = \{t_1^0, \ldots, t_{m_0}^0\} \in Q^{(m)}$. Возьмем произвольное семейство мер Дирака $\{\varepsilon_{t_s}\}_{s=1}^{m}$, носители которых образуют множество τ_0. Из определения нормы $\|\cdot\|_\varepsilon$ получаем

$$\sum_I \alpha_i \cdot [\sum_{\pi^m_{\{1,\ldots,k\}}} (\prod_{r=1}^{m} \chi_{e^i_{i_r}}(t_r))] \leq \|\sum_I \alpha_i \lambda_{\eta_i}^*\|_\varepsilon. \qquad (4.3)$$

Учитывая очевидные тождества $\lambda_{\eta_i}(\tau_0) = \sum_{\pi^m_{\{1,\ldots,k\}}} (\prod_{r=1}^{m} \chi_{e^i_{i_r}}(t_r))$

$(i \in I)$ убеждаемся в том, что $\sum_I \alpha_i \cdot \lambda_{\eta_i}(\tau_0) \leq 1$, откуда, в силу условий теоремы, и вытекает неравенство $\sum_I \alpha_i \cdot \vartheta(\eta_i) \leq \vartheta(Q)$

Таким образом, существует линейный фукционал $\ell \in X'$, удовлетворяющий условиям

$$\ell(\lambda^*_\eta) \geq \vartheta(\eta) \quad (\eta \in \Xi^{\vartheta}_m), \quad \|\ell\| = \vartheta(Q).$$

Если $\hat{\varphi} = \ell \circ \gamma$, где γ - каноническое вложение B^m в $\underbrace{\check{B \otimes} \ldots \check{\otimes B}}_{m}$, то, рассматривая сужение $\hat{\varphi}$ на множество $\mathcal{D} = \{(\chi_{e_1}, \ldots, \chi_{e_m}) | e_i \in \Sigma\}$ как функцию множеств ψ на Σ^m $(\psi(e_1, \ldots, e_m) \triangleq \hat{\varphi}(\chi_{e_1}, \ldots, \chi_{e_m}))$ и используя линейность ℓ и γ, убеждаемся в аддитивности ψ по каждому из аргументов. Следовательно, функция ψ удовлетворяет условиям леммы 4.I. Поэтому

$$\vartheta_\psi(\eta) = 0 \quad (\eta = \{e_1, \ldots, e_{m+1}\} \in \Xi_{m+1}),$$

$$\vartheta_\psi(\eta) = \sum_{\Pi^m_{\{1,\ldots,k\}}} \psi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}) \quad (\eta = \{e_1, \ldots, e_k\} \in \Xi_m),$$

откуда, в силу определения ψ, $\vartheta_\psi(\eta) \geq \vartheta(\eta)$ для всех $\eta \in \Xi^{\vartheta}_m$. Заметим еще, что так как $\|\lambda^*_{\{Q\}}\|_\varepsilon = 1$, $\ell(\lambda^*_{\{Q\}}) \geq \vartheta(Q)$ и $\|\ell\| = \vartheta(Q)$, то $\vartheta_\psi(Q) = \vartheta(Q)$.

Для завершения доказательства того, что $\vartheta_\psi \in C^s_m(\vartheta)$, остается проверить включение $\vartheta_\psi \in V(\Sigma)$ и неравенство $\vartheta_\psi \geq_0 \vartheta_m$. Пусть $\eta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - произвольное разбиение из $\Xi(Q)$. Положим

$$\varepsilon_\omega = \begin{cases} -1, & \vartheta_\psi(\eta^\omega) < 0, \\ +1, & \vartheta_\psi(\eta^\omega) \geq 0, \end{cases}$$

$$\lambda^*_\omega = \sum_{\Pi^m_\omega} \chi_{e_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \chi_{e_{i_m}} \quad (\omega \subseteq N^\eta)$$

и оценим значение ℓ на элементе $\alpha = \sum_{|\omega| \leq m} \varepsilon_\omega \cdot \lambda^*_\omega$. Ясно, что $\|\alpha\|_\varepsilon \leq 1$. Действительно, пусть $\mu_i \in V^1(\Sigma)$, $\|\mu_i\|_0 \leq 1$ $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда

$$\sum_{|\omega| \leq m} \alpha_\omega \cdot \Big[\sum_{\Pi^m_\omega} \mu_1(e_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mu_m(e_{i_m})\Big] \leq \prod_{\tau=1}^{m} \Big[\sum_{i=1}^{n} |\mu(e_i)|\Big] \leq 1,$$

что, ввиду произвольности μ_i $(i = 1, \ldots, n)$, и означает требуемое. Итак, $|\ell(\alpha)| \leq \vartheta(Q)$. Но $\ell(\alpha) = \sum_{\omega \subseteq N^\eta} |\vartheta_\psi(\eta^\omega)|$, как это следует непосредственно из построения α. Ввиду произвольности $\eta \in \Xi(Q)$, это и означает ограниченность полиномиальной вариации ϑ_ψ. Далее, так как $\vartheta_\psi(Q) = \vartheta(Q)$, $\|\vartheta_\psi\|_0 \leq \vartheta(Q)$, то, в силу условия $\vartheta \in V_{m+}(\Sigma)$, справедливы включения

$$\mathrm{supp}\, \vartheta_\psi \subseteq \mathrm{supp}\, \vartheta, \quad \vartheta_\psi \in V_+(\Sigma). \tag{4.4}$$

Используя формулы

$$u_{(k)}(e) = \lim_{\eta \in \Xi(Q)} \sum_{|\omega|=k} \vartheta(\eta^\omega) \quad (k \geq 1)$$

(см. [7]) и соотношения (I.7), можно показать, что

$$(\vartheta_\psi)_{(k)}(e) \geq \vartheta_{(k)}(e) \tag{4.5}$$

для всех $e \in \Sigma$, $k = 1, \ldots, m$. Поскольку, как нетрудно проверить, для любых функций $u_1, u_2 \in V^{(k)}(\Sigma)\ (k \geq 1)$ имеет место эквивалентность

$$u_1 \geq_0 u_2 \Longleftrightarrow u_1(e) \geq u_2(e) \quad (e \in \Sigma),$$

то из (4.5) получаем: $\vartheta_\psi \geq_0 \vartheta_m$, что и завершает доказательство принадлежности $\vartheta_\psi \in C_m^s(\vartheta)$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\vartheta \in V_{m+}(\Sigma)$ и $C_m^s(\vartheta) \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольную конечную систему $\{\lambda_{\eta_i}, \alpha_i\}_I$, удовлетворяющую условиям (4.I), (4.2), и покажем, что $\sum_I \alpha_i \cdot \vartheta(\eta_i) \leq \vartheta(Q)$. Пусть $u \in C_m^s(\vartheta)$. Из определения C_m^s-ядра и неотрицательности величин $\alpha_i\ (i \in I)$ вытекает неравенство

$$\sum_I \alpha_i \cdot \vartheta(\eta_i) \leq \sum_I \alpha_i \cdot u(\eta_i). \tag{4.6}$$

Возьмем разбиение $\eta_0 = \{e_1^0, \ldots, e_{m_0}^0\} \in \Xi(Q)$, индуцированное разбиениями $\eta_i\ (i \in I)$, и преобразуем выражение $\sum_I \alpha_i \cdot u(\eta_i)$ к виду $\sum_{\omega \subseteq N^{\eta}} \alpha_\omega \cdot u(\eta_0^\omega)$, где

$$\alpha_\omega = \begin{cases} \sum_{K_\omega} \alpha_i, & K_\omega \neq \emptyset, \\ 0, & K_\omega = \emptyset, \end{cases}$$

$$K_\omega = \{i \mid (\bigcup_{k \in \omega} e_k^0) \cap e_s^i \neq \emptyset \quad (s = 1, \ldots, m_i)\}.$$

Зафиксируем некоторое $\omega \subseteq N^{\eta_0}$ $(|\omega| \leq m)$ и рассмотрим значение функции $\sum_I \alpha_i \cdot \lambda_{\eta_i}$ в точке $\tau_0 \in Q^{(m)}$, где $\tau_0 = \{t_i^0\}_{i \in \omega}$, а $t_i^0\ (i \in \omega)$ – выбранные произвольным образом элементы множеств e_i^0. Из определения функций λ_{η_i} и величин α_ω получаем

$$\sum_I \alpha_i \lambda_{\eta_i}(\tau_0) = \alpha_\omega .$$

Но тогда, в силу (4.2), справедливы неравенства

$$0 \le \alpha_\omega \le 1 \qquad (|\omega| \le m).$$

Отсюда, ввиду того, что $u \geq_0 v_m \geq_0 \mathbb{O}$, имеем

$$\sum_{\omega \subseteq N\ell_0} \alpha_\omega \cdot u(\eta_0^\omega) \le \sum_{\omega \subseteq N\ell_0} u(\eta_0^\omega) = u(Q) = v(Q),$$

что в сочетании с неравенством (4.6) и дает требуемое:

$$\sum_I \alpha_i \cdot v(\eta_i) \le v(Q).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.I. Условие $v \in V_{m+}(\Sigma)$ в теореме 4.I имеет характер нормировки, не ограничивающей общности рассмотрения. Действительно, используя те же рассуждения, что и при доказательстве достаточности, можно установить, что для всякой функции $v \in V(\Sigma)$ существует $w \in V^m(\Sigma)$ такая, что $v + w \in V_{m+}(\Sigma)$. Тогда очевидно, что $C_m^s(v) \neq \emptyset \Longleftrightarrow C_m^s(v+w) \neq \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Критерий, аналогичный тому, что получен в теореме 4.I для Ξ_m^v, можно установить для любой системы $\Xi_0 \subseteq \Xi$. Это позволяет рассматривать различные схемы децентрализации, учитывающие те или иные особенности игры $\Gamma = (\Sigma, v)$. В частности, при $\Xi = \{\{e\} \mid e \in \Sigma\}$ получаем критерий непустоты $C_m(v)$:

$$C_m(v) \neq \emptyset \Longleftrightarrow [(\sum_I \alpha_i \lambda_{\{e_i\}}(\tau) \le 1 (\tau \in Q^{(m)})) \Rightarrow (\sum_I \alpha_i v(e_i) \le v(Q))]$$

(здесь $v \in V_{m+}(\Sigma)$, $v_{(k)} = \mathbb{O}$ $(k = 1, \ldots, m)$, $\alpha_i \geq 0$ $(i \in I)$).

Сильное ядро функции v составляет, как правило, лишь очень малую часть соответствующего ядра $C_m(v)$. Вместе с тем, так же как и в случае с C_m-ядрами, существует широкий класс функций v, у которых отсутствует (обычное) C_1-ядро и в то же время $C_m^s(v) \neq \emptyset$ при достаточно малых m. Конкретный пример дает следующая игра 5 лиц:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & |S| = 1, \\ 3, & |S| = 2, \\ 7, & |S| = 3, \\ 10, & |S| = 4, \end{cases} \qquad v(\{1,2,3,4,5\}) = 12 .$$

Ясно, что здесь $C_1(v)=\emptyset$, в то время как $C_3^3(v)\neq\emptyset$, поскольку последнее содержит, например, функцию

$$w(S)=\begin{cases}0, & |S|=1,\\ 3, & |S|=2,\\ 7,2, & |S|=3,\\ 10,8, & |S|=4,\end{cases}\qquad w(\{1,2,3,4,5\})=12.$$

Отметим еще, что большое число таких примеров можно получить вариацией параметров $q\in(1/2,1],\mu\in V^1(N)\ (\mu(N)=1)$, определяющих так называемые "взвешенные мажоритарные игры" (см. [10]):

$$v(S)=\begin{cases}1, & \mu(S)\geq q,\\ 0, & \mu(S)<q.\end{cases}$$

В заключение укажем, что, в отличие от C_m-ядер, сильные полиномиальные ядра имеют более регулярное строение. Это вытекает из следующего обобщения предложения 3.1.

ТЕОРЕМА 4.2. *Для каждой функции* w *из* C_m^3 *-ядра конечной игры* $\Gamma=(N,v)$ *имеет место представление*

$$w_\omega=\sum_{\omega'|\omega\subseteq\omega'} q_\omega^{\omega'}\cdot v_{\omega'}\qquad (|\omega|\leq m),$$

где $q_\omega^{\omega'}$ *– некоторые неотрицательные вещественные числа, удовлетворяющие условиям*

$$\sum_{\omega|\omega\subseteq\omega',|\omega|\leq m} q_\omega^{\omega'}=1\qquad(\omega'\subseteq N).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и при доказательстве предложения 3.1, достаточно ограничиться случаем, когда $v\in V_+(N)$. Итак, пусть $v\in V_+(N), w\in C_m^s(v)$. Положим $\omega^{(m)}=\{\omega'|\omega'\subseteq\omega, |\omega'|\leq m\}$ и рассмотрим конечную игру $\bar\Gamma=(\bar N,\bar v)$, где $\bar N=N^{(m)}$,

$$\bar v_{\bar\omega}=\begin{cases}v_\omega, & \bar\omega=\bar\omega^{(m)},\\ 0, & \bar\omega\neq\omega^{(m)}.\end{cases}$$

Покажем, что функция $\bar w$, определенная по формуле

$$\bar{w}_{\bar{\omega}} = \begin{cases} w_{\omega} & \text{, если } \bar{\omega} = \{\omega\} \quad (\omega \in N^{(m)}), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

принадлежит C_1 -ядру игры $\bar{\Gamma}$. С этой целью рассмотрим произвольное подмножество $S \subseteq \bar{N}$ и отвечающее ему семейство $\bar{N}_S = \{\omega \in N / \omega^{(m)} \subseteq S\}$. Из определения функций $\bar{v}$ и $\bar{w}$ вытекают равенства

$$\bar{v}(S) = \sum_{\omega \in \bar{N}_S} v_{\omega}, \tag{4.7}$$

$$\bar{w}(S) = \sum_{\omega \in S} w_{\omega}. \tag{4.8}$$

Пусть $M(S) = \{\omega_1, \ldots, \omega_{n_S}\}$ - семейство максимальных (по отношению включения) элементов из $\bar{N}_S$. Тогда равенства (4.7), (4.8) можно переписать в виде

$$\bar{v}(S) = \sum_{\tau \subseteq \{1,\ldots,n_S\}} (-1)^{|\tau|+1} \cdot v\left(\bigcap_{i \in \tau} \omega_i\right),$$

$$\bar{w}(S) = \sum_{\tau \subseteq \{1,\ldots,n_S\}} (-1)^{|\tau|+1} \cdot w\left(\bigcap_{i \in \tau} \omega_i\right).$$

Отсюда, используя формулу (I.3) и учитывая включение $w \in C_m^S(v)$, получаем требуемое: $\bar{w} \in C_1(\bar{v})$.

Но тогда, на основании предложения 3.I, имеем $w_{\omega} = \sum_{\omega' | \omega \subseteq \omega'} q_{\omega}^{\omega'} \cdot v_{\omega'}$ $(\omega \in N^{(m)})$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

I. РОЗЕНМЮЛЛЕР И. Коооперативные игры и рынки. М., "Мир",1974.

2. HILDERBRAND W. Core and equilibria of a large economy. Princeton Univ.Press, 1974.

3. ВАСИЛЬЕВ В.А. Вектор Шепли для игр ограниченной полиномиальной вариации. - В кн.: Оптимизация. Вып. I7 (34). Новосибирск, I975, с. 5-27.

4. ВАСИЛЬЕВ В.А. Об одном пространстве неаддитивных функций множеств. - В кн.: Оптимизация. Вып. I6 (33). Новосибирск, I975, с. 99-I20.

5. БОНДАРЕВА О.Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр. - "Проблемы кибернетики" I963, № IO, с. II9-I39.

6. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О некоторых классах неаддитивных функций множеств.– В кн.: Оптимизация. Вып. 9 (26). Новосибирск, 1973, с.157-165.
7. ВАСИЛЬЕВ В.А. Общая характеристика полиномиальных функций множеств. В кн.: Оптимизация. Вып. 14 (31). Новосибирск, 1974, с. 103-12[illegible].
8. ШЕФФЕР Х. Топологические векторные пространства. М., "Мир", 1971.
9. ФАНЬ ЦЗИ. О системах линейных неравенств. – В кн.: Линейные неравенства и смежные вопросы. М., ИЛ, 1959, с.212-262.
10. НЕЙМАН Дж, МОРГЕНШТЕРН О. Теория игр и экономическое поведение. М., "Наука", 1970.

Поступила в ред.-изд. отдел
16.10.1977 г.