Выпуск 21(38) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.88

О СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ВЫПУКЛЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.Г.Кусраев

В работе [1] найдены необходимое и достаточное условия для того, чтобы многозначное отображение из R^n в R^n было субдифференциальным отображением некоторой собственной замкнутой выпуклой функции в R^n. Таковыми являются максимальные циклически монотонные отображения и только они (см. также [2] и [3]). Благодаря технике, развитой в [4], такое же утверждение удается получить и в общей ситуации, а именно, для выпуклых операторов, действующих из векторного пространства в произвольное пространство Канторовича. Доказательству этого факта и посвящена настоящая заметка. Необходимая информация и используемая терминология из теории K-пространств содержится в [5].

Итак, всюду в тексте X означает произвольное векторное пространство, Y-K-пространство, $L(X,Y)$- множество всех линейных операторов из X в Y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $\rho: X \longrightarrow 2^{L(X,Y)}$ называется циклически монотонным, если для любого конечного набора пар $(A_0, x_0), \ldots, (A_n, x_n)$ таких, что $A_i \in \rho(x_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, выполняется

$$A_0(x_1-x_0)+A_1(x_2-x_1)+\ldots+A_n(x_0-x_n) \leq 0.$$

Если $F: X \longrightarrow Y \cup \{\infty\}$ выпуклый оператор, то субдифферен-

циальное отображение $x \to \partial F(x)$, очевидно, циклически монотонно.

ТЕОРЕМА I. Для того чтобы для отображения $\rho: X \to 2^{L(X,Y)}$ существовал выпуклый оператор $F: X \to Y \cup \{\infty\}$ такой, что $\rho(x) \subset \partial F(x)$ при всяком $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы ρ было циклически монотонно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна, покажем достаточность.

Зафиксируем $x_0 \in X$ и $A_0 \in L(X,Y)$ и определим оператор F следующим соотношением:

$$F(x) = \sup\{A_n(x - x_n) + \ldots + A_0(x_1 - x_0)\},$$

где верхняя грань берется по всевозможным наборам пар $(A_1, x_1), \ldots, (A_n, x_n)$ таких, что $A_i \in \rho(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Оператор F выпукл и $F^{**} = F$. Пусть теперь $x \in X$ и $A \in \rho(x)$. Тогда для произвольного $x' \in X$ и произвольного набора (x_i, A_i), $A_i \in \rho(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$,

$$F(x') \geq A(x' - x) + A_n(x - x_n) + \ldots + A_0(x_1 - x_0)$$

или

$$F(x') - A(x' - x) \geq A_n(x - x_n) + \ldots + A_0(x_1 - x_0).$$

Переходя к верхней грани в правой части по (A_i, x_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, получим $F(x') - A(x' - x) \geq F(x)$. Следовательно, $A \in \partial F(x)$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Выпуклый оператор называется замкнутым, если он представим в виде точной верхней границы семейства аффинных операторов.

Пусть, как обычно, $ri(C)$ – относительная внутренность множества C, т.е. $x \in ri(C)$ тогда и только тогда, когда x лежит в аффинной оболочке C и для любого h из аффинной оболочки C найдется $\epsilon > 0$ такой, что $tx + (1-t)h \in C$ для всех $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $F: X \to Y \cup \{\infty\}$ – выпуклый оператор и $x_0 \in ri(\mathrm{dom} F)$, то для любого $x \in X$

$$F^{**}(x) = \lim_{\lambda \downarrow 0} F(\lambda x_0 + (1-\lambda)x).$$

В частности, если F замкнут,

то для всех $x \in X$

$$F(x) = \lim_{\lambda \downarrow 0} F(x_0\lambda + (1-\lambda)x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $z(\lambda) = \lambda x_0 + (1-\lambda)x$. Поскольку $F(x) \geq F^{**}(x)$, $x \in X$, то

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} F(z(\lambda)) \geq \lim_{\lambda \downarrow 0} F^{**}(z(\lambda)) = \sup_{\varepsilon} \inf_{0<\lambda<\varepsilon} \sup_{\xi} [A_\xi(z(\lambda)) + y_\xi] \geq$$

$$\geq \sup_{\xi} \sup_{\varepsilon} \inf_{0<\lambda<\varepsilon} [A_\xi(z(\lambda)) + y_\xi] = \sup_{\xi} [A_\xi(z(\lambda)) + y_\xi] = F^{**}(x).$$

Далее, при $0<\lambda<1$ $z(\lambda) \in ri(dom\, F)$ и поэтому $F(z(\lambda)) = F^{**}(z(\lambda))$. Отсюда

$$\overline{\lim_{\lambda \downarrow 0}} F(z(\lambda)) \leq \overline{\lim} [\lambda F^{**}(x_0) + (1-\lambda)F^{**}(x) = F^{**}(x).$$

Теорема доказана.

ЛЕММА. Пусть F и $G: X \to Y \cup \{\infty\}$ выпуклые операторы и для всех $x \in ri(dom\, F)$ и $h \in X$ выполняется неравенство

$$F'(x)h \leq G'(x)h.$$

Тогда $F(x) = G(x) + y$ $(x \in X)$ для некоторого $y \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, x_2 \in ri(dom F)$ и положим $h(t) = F(tx_1 + (1-t)x_2)$, $k(t) = G(tx_1 + (1-t)x_2)$ $(0 \leq t \leq 1)$. Ясно, что h и k – выпуклые операторы из $[0,1]$ в Y и, так как они ограничены, значения их содержатся в некотором главном идеале $Y_e = \bigcup_{n=1}^{\infty} n[-e, e]$, $e \in Y^+$, т.е. $k([0,1]) \subset Y_e$ и $h([0,1]) \subset Y_e$.

Y_e – K-пространство ограниченных элементов и можно реализовать его как пространство непрерывных функций $C(Q)$ на экстремально несвязном компакте Q. Таким образом, можем считать, что $k, h : [0,1] \to C(Q)$.

Пусть вектор $u \in R$ есть 1 либо –1. Поскольку семейство непрерывных функций на Q $\psi(\lambda) = 1/\lambda [h(t+\lambda u) - h(t)]$ (o)-сходится к функции $h'(t)u$, то существует множество первой категории $Q_0 \subset Q$ такое, что при $\lambda \to 0$ $\psi(\lambda)(q) \to h'(t)(q)$ для всех $q \notin Q_0$. Следовательно, если $q \notin Q_0$, то $\varepsilon_q(h'(t)u) = (\varepsilon_q \circ h)'(t)u$.

Пусть теперь $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счетное всюду плотное мно-

жество в $[0,1]$. Тогда можно считать, что для любого n и для всех $q \notin Q_0$ справедливы равенства: $\varepsilon_q(h'(t_n)u) = (\varepsilon_q \circ h)'(t_n)u$, $\varepsilon_q(k'(t_n)u) = (\varepsilon_q \circ k)'(t_n)u$. Заметив, что, кроме того, $h'(t)u \le k'(t)u, t \in [0,1]$, будем иметь

$$(\varepsilon_q \circ k)'_-(t_n) \le (\varepsilon_q \circ h)'_-(t_n) \le (\varepsilon_q \circ h)'_+(t_n) \le (\varepsilon_q \circ k)'_+(t_n)$$

для всех n и $q \notin Q_0$. Предельный переход показывает, что эти неравенства справедливы при любом $t \in [0,1]$. Отсюда для $q \notin Q_0$ имеем

$$\varepsilon_q(F(x_1) - F(x_2)) = \int_0^1 (\varepsilon_q \circ h)'_+ dt = \int_0^1 (\varepsilon_q \circ k)'_+(t) dt = \varepsilon_q(G(x_1) - G(x_2)),$$

и, поскольку $Q \setminus Q_0$ плотно в Q, $F(x_1) - F(x_2) = G(x_1) - G(x_2)$.

Тем самым показано, что $F(x) = G(x) + y$ для некоторого $y \in Y$ и для всех $x \in ri(dom\,F)$, а по теореме 2 и для всех x из замыкания по лучам множества $dom\,F$. Если же x - произвольный элемент, то $G(x) \le F(x) + y$. Дальнейшее доказательство проводится так же, как и в [3] (теорема 24.9), с использованием техники сопряженных операторов (см. [4]). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Субдифференциалы замкнутых выпуклых операторов из X в $Y \cup \{\infty\}$ и только они являются максимальными циклически монотонными отображениями из X в $2^{L(X,Y)}$. Выпуклый оператор определяется своим субдифференциалом с точностью до постоянного элемента из Y.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ρ - максимальное циклически монотонное отображение, то по теореме I $\rho(x) \subset \partial F(x)$ для некоторого замкнутого выпуклого оператора F, и, следовательно, $\rho = \partial F$. Обратно, пусть $\partial F(x) \subset \rho(x)$ $(x \in X)$. Тогда опять по теореме I найдется выпуклый оператор $G: X \to Y \cup \{\infty\}$, для которого $\partial F(x) \subset \partial G(x)$ $(x \in X)$. Отсюда следует, что $ri(dom\,F) \subset dom\,G$ и $F'(x)h \le G'(x)h$ для всех $x \in ri(dom\,F)$ и $h \in X$. Теперь утверждение теоремы вытекает из доказанной леммы.

ЛИТЕРАТУРА

I. ROKAFELLAR R.T. Characterisation of the subdifferentials of convex function. - "Pacific J. Math.", 1966, N 17, 497-510.

2. ROKAFELLAR R.T. On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. - "Pacific J.Math.",1970, N 33.

3. РОКАФЕЛЛЕР Р. Выпуклый анализ. М., "Мир", I973.

4. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Замены переменных в преобразовании Юнга. - "ДАН СССР", I977, т. 233, № 6, I039-I04I.

5. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, I96I.

Поступила в ред.-изд.отдел
20.02.I978 г.