Выпуск 2I (38) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.88

ВЫПУКЛЫЕ АППРОКСИМАЦИИ НЕГЛАДКИХ ОПЕРАТОРОВ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

А.Г.Кусраев

В настоящее время уже имеется довольно много работ, посвященных необходимым условиям экстремума для негладких функций [I-8]. В [I-4] получены необходимые условия минимума для скалярных функций, определенных в конечномерном или произвольном банаховом пространстве, причем они могут быть не всюду определенными [2-4]. Аналогичные результаты относительно оптимальности по Парето для векторнозначных отображений имеются в работах [5-8]. Наконец, в [8] получены необходимые условия инфимума для выпуклых векторнозначных экстремальных задач.

Целью данной работы является получение необходимых условий инфимума в форме множителей Лагранжа для задач с негладкими и невыпуклыми целями и ограничениями со значениями в упорядоченном векторном пространстве. Однако для достижения этой цели необходима соответствующая техника субдифференцирования. В п.I вводится понятие верхней выпуклой аппроксимации, близкое к аналогичным понятиям из [4,6,7]; в п.2, используя аппарат субдифференцирования выпуклых операторов [8], получены формулы субдифференцирования для некоторых сложных функций и, наконец, в п.3 приводятся теоремы о необходимых условиях инфимума.

0. Наши рассмотрения ведутся в псевдотопологических векторных пространствах и упорядоченных псевдотопологических векторных пространствах (в дальнейшем – п.в.п. и у.п.в.п. соответственно) и будет использоваться терминология, принятая в монографиях [8-II].

П.в.п. будем считать отделимым, а конус положительных элементов в у.п.в.п. – замкнутым и нормальным. Нормальность конуса в у.п.в.п. Y означает, как и в случае топологического векторного пространства, что если фильтр $\mathcal{F}$ сходится к нулю в Y, то сходится к нулю и фильтр $[\mathcal{F}]$, порожденный базисом $\{[\![A]\!] : A \in \mathcal{F}\}$, где $[\![A]\!] = \bigcup_{a,b \in A} \{y \in Y : a \leq y \leq b\}$. Для у.п.в.п. Y положим $Y^\bullet = Y \cup \{\infty\}$, так что ∞ есть наибольший элемент упорядоченного множества $Y^\bullet$ и $y + \infty = \infty$ для всякого $y \in Y$.

Упорядоченное векторное пространство иногда будем рассматривать с псевдотопологией (o)-сходимости, которая описывается следующим образом: фильтр $\mathcal{F}$ сходится к нулю в том и только в том случае, если существуют направления $\{y'_A\}_{A \in \mathcal{F}}$ – возрастающее и $\{y''_A\}_{A \in \mathcal{F}}$ – убывающее, такие, что $\sup_{A \in \mathcal{F}} y'_A = \inf_{A \in \mathcal{F}} y''_A$ и $A \subset [y'_A, y''_A]$ для любого $A \in \mathcal{F}$. Если Y – K-пространство, то это означает, что $\sup_{A \in \mathcal{F}} \inf A = \inf_{A \in \mathcal{F}} \sup A = 0$. Вообще, в пространстве $Y^\bullet$ для любого фильтра $\mathcal{F}$ существует конечный или бесконечный элемент $\inf_{A \in \mathcal{F}} \sup A \overset{df}{=} \overline{\lim}\, \mathcal{F}$, называемый верхним пределом фильтра $\mathcal{F}$. Очевидно, что для произвольных фильтров $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim}\,(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) \leq \overline{\lim}\, \mathcal{F}_1 + \overline{\lim}\, \mathcal{F}_2 .$$

Пусть X – векторное пространство, Y – упорядоченное векторное пространство; рассмотрим отображение $F : X \to Y^\bullet$. Как обычно, $\mathrm{dom}\, F$ будет обозначать подмножество в X, на котором F принимает конечные значения, т.е. $\mathrm{dom}\, F = \{x \in X : F(x) < \infty\}$. Для $x \in \mathrm{dom}\, F$, $h \in X$ и $0 < t \in R$ положим

$$\Delta_{x,h} F(t, x') = \frac{1}{t}[F(x + th + tx') - F(x)].$$

Если S – некоторое множествр, то $\Delta_S : Y \to Y^S$ – диагональное отображение и $(Y^S)_\infty = (\Delta_S[Y] + Y^S) \cap (\Delta_S[Y] - Y^S)$ [8]. Отображения, заданные на некоторых подмножествах и со значениями в Y, будем считать доопределенными всюду значением

∞. Символом $\mathcal{V}$ будем обозначать фильтр, порожденный базисом $\{(0,\varepsilon):\varepsilon>0\}$ на числовой прямой $\mathbb{R}$.

I. Введем основные понятия верхней выпуклой аппроксимации (в дальнейшем – в.в.а.) и субдифференциала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть X – п.в.п., Y – у.п.в.п., $F:X\to Y^{\bullet}$ и $x\in \operatorname{dom} F$. Выпуклый оператор $P:X\to Y^{\bullet}$ называется верхней выпуклой аппроксимацией для отображения F в точке x, $P(0)=0$ и для любых $h\in \operatorname{dom} P$ и фильтра $\mathcal{F}$, сходящегося к нулю в X, найдется фильтр $\mathcal{F}'$, сходящийся к нулю в Y, такой, что справедливо соотношение $\Delta_{x,h}F(\mathcal{V},\mathcal{F})\prec \mathcal{F}'-Y^{+}+P(h)$, т.е. фильтр $\Delta_{x,h}F(\mathcal{V},\mathcal{F})$ меньше (тоньше) фильтра $\mathcal{F}'-Y^{+}+P(h)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если F допускает в.в.а. P в точке x, то множество $\partial_0(P)$ называется субдифференциалом отображения F в точке x и обозначается через $\partial F(x)$. Здесь $\partial_0(P)$ означает субдифференциал P в нуле в смысле выпуклого анализа.

Очевидно, что в.в.а. и субдифференциал для F определяются неоднозначно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $P_1,\dots,P_n$ – в.в.а. для F в точке x, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in L^{+}(Y)$, $\sum_1^n\alpha_i=I_Y$, где I_Y – тождественный оператор на Y. Тогда выпуклый оператор $Q=\sum_1^n\alpha_i\circ P_i$ является в.в.а. для F в точке x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h\in \operatorname{dom} Q=\bigcap_{i=1}^n \operatorname{dom} P_i$ и $\mathcal{F}\downarrow X$. Тогда найдется $\mathcal{F}'\downarrow Y$, для которого $\Delta_{x,h}F(\mathcal{V},\mathcal{F})\prec\mathcal{F}'-Y^{+}+P_i(h)$, $i=1,\dots,n$. Отсюда легко вытекают следующие соотношения:

$$\alpha_i\circ\Delta_{x,h}F(\mathcal{V},\mathcal{F})\prec\alpha_i(\mathcal{F}')-\alpha_i[Y^{+}]+\alpha_i\circ P_i(h)$$

и

$$\Delta_{x,h}F(\mathcal{V},\mathcal{F})\prec\textstyle\sum_1^n\alpha_i\circ\Delta_{x,h}F(\mathcal{V},\mathcal{F})\prec$$

$$\prec\textstyle\sum_1^n\alpha_i(\mathcal{F}')+\sum_1^n\alpha_i\circ P_i(h)-Y^{+}\prec Q(h)-Y^{+}+\mathcal{F}'',$$

где $\mathcal{F}''=\sum_1^n\alpha_i(\mathcal{F}')$. В силу нормальности конуса Y^{+} фильтр $\alpha_i(\mathcal{F}')$ сходится к нулю и, следовательно, $\mathcal{F}''\downarrow Y$. Кроме того, очевидно $Q(0)=0$ и предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для того чтобы выпуклый оператор $P:X\to Y^{\bullet}$, $P(0)=0$ был в.в.а. для отображения $F:X\to Y^{\bullet}$ в точке $x\in$

$\in dom\,F$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $h \in dom\,P$ и фильтра $\mathcal{F} \nmid X$ выполнялось условие

а) $\lim [\Delta_{x,h} F(\mathcal{V}, \mathcal{F}) - P(h)]_+ = 0$, если Y – K-линеал;

б) $\overline{\lim}\, \Delta_{x,h} F(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \leq P(h)$, если Y – K-пространство с псевдотопологией (о)-сходимости;

в) $\lim \Delta_{x,h} F(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = P(h)$ и P совпадает с сужением на $dom\,P$ некоторого линейного оператора из X в Y, если $Y^+ = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $h \in dom\,P$ и $\mathcal{F}' = [\Delta_{x,h} F(\cdot,\cdot) - P(h)]_+(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Тогда, если $\mathcal{F}' \nmid Y$, то

$$\Delta_{x,h} F(\mathcal{V}, \mathcal{F}) - P(h) \prec [\Delta_{x,h} F(\cdot,\cdot) - P(h)]_+ - [\Delta_{x,h} F(\cdot,\cdot) - P(h)]_- \prec \mathcal{F}' - Y^+.$$

Обратно, пусть $\Delta_{x,h} F(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \prec \mathcal{F}' - Y^+ + P(h)$, $\mathcal{F}' \nmid Y$ и $A' \in \mathcal{F}'$. Тогда для некоторых $V \in \mathcal{V}$ и $A \in \mathcal{F}$ будем иметь $\Delta_{x,h} F(V, A) \subset A' - Y^+ + P(h)$, и нетрудно видеть, что $[\Delta_{x,h} F(V, A) - P(h)]_+ \subset [\![[A]_+]\!]$. Таким образом,

$$[\Delta_{x,h} F(\cdot,\cdot) - P(h)]_+(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \prec [\![[\mathcal{F}']_+]\!] \nmid Y.$$

б) Как показывает следующая цепочка равенств, справедливость этого утверждения вытекает из а):

$$0 = \lim [\Delta_{x,h} F(\cdot,\cdot) - P(h)]_+ (\mathcal{V}, \mathcal{F}) =$$

$$= \overline{\lim}\, [\Delta_{x,h} F(\mathcal{V}, \mathcal{F}) - P(h)]_+(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = [\overline{\lim}\, \Delta_{x,h} F(\mathcal{V}, \mathcal{F}) - P(h)]_+.$$

в) Предельное соотношение очевидно. Поскольку отображение P аффинно на $dom\,P$ и $P(0) = 0$, то ясно, что оно допускает линейное продолжение на линейную оболочку множества $dom\,P$. Предложение доказано.

Рассмотрим некоторые примеры. Прежде всего введем один класс негладких отображений, допускающих в.в.а.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть X – п.в.п., Y – у.п.в.п. Будем говорить, что отображение $F : X \to Y$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности U точки x, если существует непрерывный сублинейный оператор $R : X \to Y$ такой, что

$$-R(x'-x'')\le F(x'')-F(x')\le R(x''-x')$$

для любых $x', x''\in U$.

Если отображение F удовлетворяет условию Липшица и Y – K-пространство, то для всякого фильтра $\mathcal{F}\downarrow X$ и всякого $h\in X$ существует конечный верхний предел

$$F^{\circ}(\mathcal{F})(h)=\lim_{\substack{A\in\mathcal{F}\\ \varepsilon\downarrow 0}}\ \sup_{\substack{x'\in A\\ t\in(0,\varepsilon)}}\frac{1}{t}[F(x+x'+th)-F(x+x')].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Оператор $F^{\circ}(x):X\to Y$, определяемый соотношением

$$F^{\circ}(x)h=\sup\{F^{\circ}(\mathcal{F})(h):\mathcal{F}\downarrow X\},\ h\in X,$$

называется производной Кларка оператора F в точке x.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если Y – K-пространство с псевдотопологией (o)-сходимости, то оператор $F^{\circ}(x)$ является в.в.а. для F в точке x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что оператор $F^{\circ}(x)$ даже сублинеен. Пусть $\mathcal{F}\downarrow X$; $h_1, h_2\in X$ и $h=h_1+h_2$. Тогда $\mathcal{F}+\mathcal{V}\cdot h_1\downarrow X$ и справедливы следующие неравенства:

$$F^{\circ}(\mathcal{F})h=\lim_{A\in\mathcal{F},\,\varepsilon\downarrow 0}\ \sup_{x'\in A,\,t\in(0,\varepsilon)}\frac{1}{t}[F(x+x'+th)-F(x+x')]\le$$

$$\le\lim\sup\frac{1}{t}[F(x+x'+th)-F(x+x'+th_1)]+\lim\sup\frac{1}{t}[F(x+$$

$$+x'+th_1)-F(x+x')]=F^{\circ}(\mathcal{F}+\mathcal{V}\cdot h_1)h_2+F^{\circ}(\mathcal{F})h_2\le F^{\circ}(x)h_1+F^{\circ}(x)h_2,$$

т.е. $F^{\circ}(x)h\le F^{\circ}(x)h_1+F^{\circ}(x)h_2$. Положительная однородность $F^{\circ}(x)$ очевидна.

Далее, если $\mathcal{F}\downarrow X$ и R – непрерывный сублинейный оператор, обеспечивающий условие Липшица для оператора F в окрестности точки x, то

$$\overline{\lim}\ \Delta_{x,h}F(\mathcal{V},\mathcal{F})\le\lim_{A\in\mathcal{F},\,\varepsilon\downarrow 0;}\ \sup_{x'\in A,\,t\in(0,\varepsilon)}\frac{1}{t}[F(x+x'+th)-$$

$$-F(x+x')]+\lim_{\substack{A\in\mathcal{F}\\ \varepsilon\downarrow 0}}\ \sup_{\substack{x'\in A\\ t\in(0,\varepsilon)}}\frac{1}{t}[F(x+tx')-F(x)]\le F^{\circ}(x)h+\lim_{A\in\mathcal{F}}\sup_{x'\in A}R(x')=F^{\circ}(x)h,$$

что и требовалось доказать.

Из изложенного видно, что производная Кларка является неким "каноническим" выбором в.в.а. для отображений, удовлетворяющих условию Липшица. Однако такой выбор не всегда возможен, если Y не есть K-пространство с псевдотопологией (о)-сходимости или же F не удовлетворяет условию Липшица. С другой стороны, как показал Б.Н. Пшеничный [4], знание других в.в.а. дает дополнительную информацию о поведении отображения в окрестности рассматриваемой точки и может оказаться полезным при нахождении локальных экстремумов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть X – п. в. п., Y – у. п. в. п. и $G: X \to Y$ – непрерывный выпуклый оператор. Тогда для любого $0 < t \in \mathbb{R}$ оператор $\hat{G}(h) = \frac{1}{t}[G(x+th) - G(x)]$ является в. в. а. для G в точке x. Если Y – K-пространство с псевдотопологией (о)-сходимости, то $G'(x)$ – в. в. а. для G в точке x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F} \downarrow X$, $t > 0$ фиксировано и $\mathcal{F}'$ есть образ фильтра $\mathcal{F}$ при отображении $\delta G(t, x') = \frac{1}{t}[G(x+tx'+th) - G(x+th)]$. При достаточно малых $\lambda > 0$ в силу выпуклости G можем написать

$$\Delta_{x,h} G(\lambda, x) \le \frac{1}{t}[G(x+th+\lambda x) - G(x)] = \hat{G}(h) + \delta G(t, x'),$$

или, что то же самое,

$$\Delta_{x,h} G(\lambda, x') \in \hat{G}(h) + \delta G(t, x') - Y^+.$$

Поскольку G непрерывно, $\mathcal{F}' \downarrow Y$. Если $A' \in \mathcal{F}'$, то найдутся $A \in \mathcal{F}$ и достаточно малое $\varepsilon > 0$, для которых

$$\Delta_{x,h} G((0,\varepsilon), A) \subset \hat{G}(h) + A' - Y^+.$$

Это и означает, что

$$\Delta_{x,h} G(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \supset \hat{G}(h) - Y^+ + \mathcal{F}'.$$

Вторая часть предложения теперь легко следует из предложения I.

Аналогично можно показать, что если G – непрерывный вогнутый оператор и $A \in \partial_x(-G)$, то $-A$ – в.в.а. для G в точке x.

2. Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть X – п.в.п.,

а Y и $\mathcal{Z}$ – у.п.в.п., отображения $F: X \to Y^{\bullet}$ и $G: Y \to \mathcal{Z}^{\bullet}$ допускают в.в.а. Что в этом случае можно сказать о в.в.а. суперпозиции $G \circ F$? Ответом служит следующая

ТЕОРЕМА I. Пусть F допускает в.в.а. P в точке $x \in \operatorname{dom} F$, а G возрастает и допускает в.в.а. Q в точке $y = F(x) \in \operatorname{dom} G$.

Тогда оператор $Q \circ P$ будет в.в.а. для отображения $G \circ F$ в точке x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $h \in \operatorname{dom} Q \circ P$, $v = P(h)$ и $\mathcal{F} \downarrow X$, то найдутся фильтры $\mathcal{F}_1 \downarrow Y$ и $\mathcal{F}_2 \downarrow \mathcal{Z}$, для которых справедливы следующие неравенства:

$$\Delta_{x,h} F(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \prec \mathcal{F}_1 - Y^{+} + P(h),$$

$$\Delta_{y,v} G(\mathcal{V}, \mathcal{F}_1) \prec \mathcal{F}_2 - \mathcal{Z}^{+} + Q(v).$$

Зафиксируем $U_2 \in \mathcal{F}_2$ и выберем $U_1 \in \mathcal{F}'$, $U \in \mathcal{F}$ $V \in \mathcal{V}$ так, чтобы

$$\Delta_{x,h} F(V, U) \subset U_1 - Y^{+} + P(h),$$

$$\Delta_{y,v} G(V, U) \subset U_2 - \mathcal{Z}^{+} + Q(v).$$

Тогда для всех $t \in V$ и для всех $x' \in U$ будем иметь:

$$\Delta_{x,h} G \circ F(t, x') = \frac{1}{t}[G(y + t\Delta_{x,y} F(t, x')) - G(y)] \in$$
$$\in \frac{1}{t}[G(y + t(U_1 - Y^{+} + P(h)) - G(y)],$$

т.е. для некоторых $u \in U_1$ и $y' \in Y^{+}$

$$\Delta_{x,h} G \circ F(t, x') = \frac{1}{t} G(y + t(u - y' + P(h)) - G(y)] \leq \frac{1}{t}[G(y + tv + tu) - G(u)]$$

Отсюда, поскольку верны включения $\Delta_{x,h} G \circ F(t, x') \in \Delta_{y,v} G(t, u) - \mathcal{Z}^{+}$, $\Delta_{y,v} G(t, u) \in U_2 - \mathcal{Z}^{+} + P(h)$, также верно включение $\Delta_{x,h} G \circ F(t, x') \in$ $\in U_2 - \mathcal{Z}^{+} + Q(v)$, и, следовательно,

$$\Delta_{x,h} G \circ F(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \prec \mathcal{F}_2 - \mathcal{Z}^{+} + Q \circ P(h).$$

Теорема доказана.

Следующие следствия понадобятся нам при выводе необходимых условий инфимума.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $X, \mathcal{F}, P$ те же, что и в условии теоремы, $\mathcal{Z}$ – K-пространство с псевдотопологией (о)-сходимости, G – непрерывный возрастающий выпуклый оператор, $\mathrm{dom}\, G = Y$.

Тогда $G'(F(x))\circ P$ – в. в. а. для $G\circ F$ в точке x.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X, Z те же, что и в условии предыдущего следствия, отображения $F_1,\ldots,F_n : X \to Z^{\bullet}$ допускают в. в. а. $P_1,\ldots,P_n$ соответственно и конусы $Fd(\mathrm{dom}\, P_1, x),\ldots, Fd(\mathrm{dom}\, P_n, x)$ находятся в общем положении. Тогда справедливы формулы

$$\partial(F_1+\ldots+F_n)(x) = \partial F_1(x)+\ldots+\partial F_n(x),$$

$$\partial(F_1\vee\ldots\vee F_n)(x) = \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Gamma(x)} \sum_1^n \partial(\alpha_k\circ F_k)(x),$$

где объединение берется по следующему множеству:

$$\Gamma(x) = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Lambda(Z)^n;\ \sum_1^n \alpha_k = I_Z,$$
$$\sum_1^n \alpha_k\circ F_k(x) = F_1(x)\vee\ldots\vee F_n(x)\}.$$

Доказательство этих следствий следует из предложения 4, теоремы I и соответствующих формул для выпуклых операторов[8].

Пусть S – некоторое множество. Рассмотрим семейство отображений $F_s : X\to Y^{\bullet}$, $s\in S$, из п.в.п. X в K-пространство Y, допускающих в.в.а. $P_s : X\to Y^{\bullet}$ в точке x. Определим отображения $F: X\to Y^{\bullet}$, Q, $\Phi: X\to (Y^S)^{\bullet}$ равенствами

$$F(x) = \sup\{F_s(x) : s\in S\}\quad (x\in X);$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \{F_s(x)\}_{s\in S} & \text{, если } x\in \mathrm{dom}\, F, \\ \infty & \text{, если } x\notin \mathrm{dom}\, F; \end{cases}$$

$$Q(x) = \begin{cases} \{P_s(x)\}_{s\in S} & \text{, если } \sup\limits_{s\in S} P_s(x) < \infty, \\ \infty & \text{, если } \sup\limits_{s\in S} P_s(x) = \infty. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Семейство отображений F_s, $s\in S$, допускает равномерную в.в.а. $\{P_s\}_{s\in S}$ в точке $x\in \mathrm{dom}\, F$, если для любого $s\in S$ P_s – в.в.а. для F_s в точке x и выполняется предельное соотношение

$$\lim \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(\Delta_{x,h}\Phi(\mathcal{V},\mathcal{F})-Q(h))_{+}=0$$

для всех $h\in \mathrm{dom}\, Q$ и $\mathcal{F}\nmid X$.

ТЕОРЕМА 2. Если семейство $\{F_s\}_{s\in \mathcal{S}}$ допускает равномерную в. в. а. $\{P_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ в точке x, то оператор $\mathcal{E}'_{\mathcal{S}}(\Phi(x))\circ Q$ является в. в. а. для F в той же точке.

Здесь, как и обычно, $\mathcal{E}'_{\mathcal{S}}(\Phi(x))$ – производная по направлениям сублинейного оператора $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ в точке $\Phi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $h\in\mathrm{dom}\,Q$ и $\mathcal{F}\nmid X$ положим

$$\mathcal{F}'=\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(\Delta_{x,h}\Phi(\mathcal{V},\mathcal{F})-Q(h))_{+},$$

$$\mathcal{F}''=\{\tfrac{1}{(\cdot)}[\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(\Phi(x)+(\cdot)Q(h))-\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(\Phi(x))]\}(\mathcal{V})-\mathcal{E}'_{\mathcal{S}}(\Phi(x)).$$

Тогда по условию $\mathcal{F}'\nmid Y$, $\mathcal{F}''\nmid Y$, и поскольку

$$\Delta_{x,h}F(t,x')=\Delta_{x,h}\mathcal{E}_{\mathcal{S}}\circ\Phi(t,x')\leq\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(\Delta_{x,h}\Phi(t,x')-Q(h))+$$
$$+\frac{1}{t}[\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(\Phi(x)+tQ(h))-\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(\Phi(x))],$$

нетрудно проверить, что $\Delta_{x,h}F(\mathcal{V},\mathcal{F})\prec\mathcal{E}'_{\mathcal{S}}(\Phi(x))-Y^{+}+\mathcal{F}'+\mathcal{F}''$. Теорема доказана.

Приведем примеры семейств отображений, допускающих равномерную в.в.а.

ПРИМЕР 1. Пусть Y – локально-выпуклое пространство с замкнутым и нормальным упорядочивающим конусом, находящееся в двойственности с Y'. Если $\mathcal{S}$ – сильно ограниченное множество в Y', а $F: X\to Y$ допускает в.в.а. в некоторой точке, то семейство функций $F_s(x)=(F(x),s)$, $s\in\mathcal{S}$, допускает равномерную в.в.а. в той же точке.

ПРИМЕР 2. Допустим, что для некоторого семейства линейных операторов $P_s: X\to Y$, $s\in\mathcal{S}$, оператор $P(x)=\sup\{P_s(x): s\in\mathcal{S}\}$ непрерывен и для всех $v\in X$, s и $t>0$ $F_s(x+tv)=F_s(x)+P_s(tv)+\alpha_s(t,v)$. Если при этом для любого $\mathcal{F}\nmid X$ $\alpha(\mathcal{V},\mathcal{F})\nmid Y$, где $\alpha(t,v)=\sup_{s\in\mathcal{S}}\alpha_s(t,v)$, то P – в.в.а. для F в точке x.

ПРИМЕР 3. Предположим, что все F_s в окрестности некоторой точки удовлетворяют условию Липшица с одним и тем же сублинейным оператором и производная $F_s^{\circ}(x)$ существует равномерно по $s\in S$, т.е. для всех $h\in X$ и для любого фильтра $\mathcal{F}\downarrow X$

$$\{\sup_{s\in S}[\tfrac{1}{t}(F(x+th+x')-F(x+x'))-F^{\circ}(x)h]_{+} : x\in A, t\in(0,\varepsilon)\}_{\substack{A\in\mathcal{F}\\ \varepsilon>0}}\downarrow Y.$$

Тогда семейство $\{F_s\}_{s\in S}$ допускает равномерную в.в.а.

ПРИМЕР 4. Пусть S – компактное топологическое пространство, а семейство выпуклых операторов $\{F_s\}_{s\in S}$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки x с одним и тем же непрерывным сублинейным оператором. Для $h\in X$ положим $\delta_{x,h}F(s,t)=\frac{1}{t}[F_s(x+th)-F(x)]$ и $\varphi(s)=F_s'(x)h$. Ясно, что множества $\varphi[S]$ и $\delta_{x,h}F(S,(0,\varepsilon))$ при достаточно малом $\varepsilon>0$ содержатся в главном идеале $I(u)$, порожденном некоторым элементом $u\in Y$.

В каждом идеале $I(u)$ определим псевдотопологию τ_u так, чтобы фильтр $\mathcal{F}$ сходился к нулю в том и только в том случае, если найдется числовое направление $\{\lambda_A\}_{A\in\mathcal{F}}\subset\mathbb{R}_+, \lambda_A\to 0$, для которого $[-\lambda_A u, \lambda_A u]\supset A$ при любом $A\in\mathcal{F}$. Предположим, что для любого $s\in S$ найдется элемент $u_s\in Y^+$, обеспечивающий справедливость следующего условия: отображения φ и $\delta_{x,h}F(\cdot,t)$ непрерывны в точке s и, кроме того, (τ_{u_s}) – $-\lim_{t\downarrow 0}(\delta_{x,h}F(s,t)-\varphi(s))=0$ относительно псевдотопологии τ_{u_s} идеала $I(u_s)$. Тогда $\{F_s'(x)\}_{s\in S}$ – равномерная в.в.а. для семейства операторов $\{F_s\}_{s\in S}$.

3. Применим изложенное в предыдущих пунктах для получения необходимых условий инфимума. Нам потребуются следующие определения.

Окрестностью точки x в п.в.п. называется всякое множество, принадлежащее любому фильтру, сходящемуся к x. Точка x^* называется точкой локального инфимума отображения F, если для всех x' из некоторой ее окрестности имеет место $F(x)\le F(x')$.

ТЕОРЕМА 3. Если x^* – точка локального инфимума отображения $F:X\to Y^{\bullet}$, а $P:X\to Y^{\bullet}$ – в.в.а. для F в точке x^*, то $P(h)\ge 0$ для всех $h\in X$ или, что то же самое, $0\in\partial F(x^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сходящийся к нулю фильтр $\mathcal{F}$ в X и найдем такие $A_1\in\mathcal{F}$ и $\varepsilon>0$, чтобы $\Delta_{x^*,h}F(V,A_1)\subset Y^+$

для всех $A\in\mathcal{F}, A\subset A_1$ и $V\in\mathcal{V}, V\subset(0,\varepsilon)$. Далее, если для $\mathcal{F}'\not\vdash Y\,\Delta_{x^*,h}F(\mathcal{V},\mathcal{F})\prec P(h)+\mathcal{F}'-Y^+$ и A' - произвольный элемент из $\mathcal{F}'$, то для некоторых $A\subset A_1$ и $V\subset(0,\varepsilon)$ справедливо включение $\Delta_{x^*,h}F(V,A)\subset A'+P(h)-Y^+$, и, следовательно, $(A'+P(h))\cap Y^+\neq\emptyset$. Таким образом, фильтр, порожденный базисом $\{(A'+P(h))\cap Y^+ : A'\in\mathcal{F}'\}$, меньше фильтра $\mathcal{F}'+P(h)$ и поэтому сходится к $P(h)$. Отсюда следует, что $P(h)\in Y^+$, и теорема доказана.

Для подмножества X_0 п.в.п. X определим конус касательных направлений в точке x:

$T(X_0,x)=\{h\in X$: существует фильтр $\mathcal{F}\vdash_h X$, удовлетворяющий условию: для всяких $A\in\mathcal{F}$ и $\varepsilon>0$ найдутся $x'\in A$ и $\eta\in(0,\varepsilon)$ такие, что $x+\eta x'\in X_0\}$;

и конус внутренних направлений:

$T^*(X_0,x)=\{h\in X$: для всякого фильтра $\mathcal{F}\vdash_h X$ найдутся $A\in\mathcal{F}$ и число $\varepsilon>0$ такие, что $x+(0,\varepsilon)A\subset X_0\}$.

Положим

$$\delta_Y(X_0)(x)=\begin{cases}0 - \text{нуль пространства } Y, \text{если } x\in X_0,\\ \infty, \text{ если } x\notin X_0.\end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если выпуклый конус K содержится в $T^*(X_0,x)$, то оператор $\delta_Y(K)$ - в. в. а. для $\delta_Y(X_0)$ в точке x.

Доказательство очевидно.

ТЕОРЕМА 4. Пусть отображение $F:X\to Y^\bullet$ допускает в. в. а. P в точке x^*. Тогда, если x^* - точка локального инфимума отображения F на множестве X_0, то $P(h)\geq 0$ для всех $h\in T(X_0,x^*)$.

Если же при этом Y - K-пространство и выпуклый конус $K\subset T(X_0,x^*)$ находится с $Fd(\mathrm{dom}P,x^*)$ в общем положении, то

$$0\in\partial F(x^*)+\partial\delta_Y(K)(x^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $h\in T(X_0,x^*)$, фильтр $\mathcal{F}\vdash_h X$ обеспечивает это включение по определению множества $T(X_0,x^*)$. Тогда найдутся $A\in\mathcal{F}$ и положительное число

$\varepsilon > 0$, которые дают непустое пересечение $\Delta_{x^*,h} F((0,\varepsilon),A) \cap Y^+ \neq \neq \emptyset$. Далее так же, как и при доказательстве теоремы 3, выводится, что $P(h) \geq 0$.

Если же Y - K -пространство и конус K удовлетворяет условиям теоремы, то выпуклый оператор $P+\delta_Y(K)$ достигает инфимума в нуле и по теореме 3 и следствию 2 из теоремы I

$$0 \in \partial(P+\delta_Y(K)) = \partial F(x^*) + \partial\delta_Y(X_0)(x^*),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\mathcal{Z}$ - у.п.в.п. с вырожденным конусом $\mathcal{Z}^+=\{0\}$, Y - K -пространство; рассмотрим следующие задачи:

$$F \to \inf, \qquad (P')$$

$$G(x) \leq 0,\ H(x)=0,\ x \in X_0;$$

и

$$F \to \inf, \qquad (P)$$

$$G(x) \notin Y^+,\ H(x)=0,\ x \in X_0,$$

где G и F - отображения из X в $Y^\bullet$, а H - из X в $\mathcal{Z}^\bullet$.

Нам будут нужны следующие предположения:

(H): отображение H допускает в.в.а. в точке x^*, совпадающую с линейным оператором $\hat{A}$ на своей эффективной области определения (см. предложение 2.в)), и при этом $\ker \hat{A} = T(X_1, x^*)$, где $X_1=\{x \in X : H(x)=0\}$;

(G): для всякого x либо $G(x) \geq 0$, либо $G(x) \leq 0$.

Заметим, что в (H) включение $T(X_1,x^*) \subset \ker \hat{A}$ верно всегда.

Для конуса $K \subset X$ положим $K^*=\{\Lambda \in L(X,Y) : \Lambda(x) \leq 0$ для всех $x \in K\}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть отображения F и $G: X \to Y^\bullet$ допускают в. в. а. в точке x^* соответственно P и Q , а отображение $H: X \to \mathcal{Z}^\bullet$ удовлетворяет условию (H) . Пусть выпуклый конус $K \subset \subset T(X_0, x^*)$ находится в общем положении с конусами $Fd(\operatorname{dom} P, x^*), \ker \hat{A}$ и $Fd(\operatorname{dom} Q, x^*)$.. Тогда, если x^* - точка локального инфимума в задаче (P) или в задаче (P') и выполнено условие (G), то существуют $\alpha^*, \beta^* \in \Lambda(Y)$, $\alpha^*+\beta^*=I_Y$, $\mu \in L(X,Z)$ и $\lambda \in K^*$, такие, что

$$-\lambda \in \alpha^* \partial F(x^*) + \beta^* \circ \partial G(x^*) + \mu \circ \hat{H},$$

$$\beta^* \circ G(x^*) = 0.$$

Если, кроме того, для некоторого $x_0 \in K \cap \mathrm{Ker}\,\hat{H}$ элемент $-Q(x_0)$ - единица в Y, то $\mathrm{Ker}\,\alpha^* = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем отображение $\Phi(x) = (F(x) - F(x^*)) \vee G(x)$. Тогда очевидно, что x^* есть точка локального инфимума в задаче

$$\Phi \to \inf,$$

$$x \in X_0, \quad H(x) = 0.$$

Если R - в.в.а. для Φ в точке x^*, то в силу предположения (H) легко увидеть, что $R(h) \geq 0$ для всех $h \in \mathrm{Ker}\,\hat{H} \cap K$ и, следовательно, пользуясь формулами субдифференцирования суммы и точной верхней границы (следствие 2 из теоремы 1), получим

$$0 \in \partial_0 (R + \delta_Y(K) + \delta_Y(\mathrm{Ker}\,\hat{H})) =$$

$$= \bigcup_{\alpha^*, \beta \in \Gamma(x^*)} [\partial(\alpha \circ F)(x^*) + \partial\beta \circ G(x^*)] + \partial\delta_Y(K) + \partial\delta_Y(\mathrm{Ker}\,\hat{H}),$$

откуда без труда выводится первая часть утверждения теоремы.

Допустим, что x_0 и $-Q(x_0)$ удовлетворяют условиям теоремы и q есть проектор на компоненту $\mathrm{Ker}\,\alpha^*$. Тогда $(\alpha^* \circ P + \beta^* \circ Q)(x_0) \geq 0$ и, поскольку $\beta^* \circ q = \alpha^* \circ q - \beta^* \circ q = q$, будем иметь

$$0 \leq q[\alpha^* \circ P(x_0) + \beta^* \circ Q(x_0)] = \alpha^* \circ q(P(x_0)) - \beta^* \circ q(\mathbb{1}) = -q(\mathbb{1}).$$

Это означает, что $q = 0$. Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. CLARKE F.H. Generalized gradients and applications. - "Trans.Amer.Math.Soc.", 1975, v.205, 247-262.
2. HIRART-URRUTY J.B. On optimality conditions in non-differentiable programming. - "Math.Programming", 1978, v. 14, 73-86.
3. POURCIAU B.H. Analisis and optimization of Lipshitz con-

tinious mappings. - "J.Optimization and its Appl.", 1977, v.22,311-351.

4. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. О необходимых условиях экстремума для негладких функций. - "Кибернетика", 1977, № 6, 92-96.

5. PENNOT J.-P. Calcul sous-differentiel et optimization. - "J.Functional Analysis", 1978, v.27, 248-276.

6. NEUSTADT L.W. General theory of extremals. - "J.Comput. and System Sci.", 1969, v.3, 57-92.

7. CHRISTOPEIT N. Necessary optimality conditions. - "SIAM J. Control and Optimization", 1977, v.15, 683-697.

8. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск, "Наука", 1978.

9. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., "Физматгиз", 1961.

10. ФРЁЛИХЕР, БУХЕР Б. Дифференцирование в векторных пространствах без нормы. М., "Мир", 1970.

11. ИОФФЕ А.Д., ТИХОМИРОВ В.П. Теория экстремальных задач. М., "Наука", 1974.