Выпуск 21(38) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.

Выпуклый анализ

УДК 517.51

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ СЛАБО ЧЕБЫШЕВСКОЙ СИСТЕМЫ

Б.П.Черник

Будем говорить, что линейно-независимые на сегменте $[a,b]$ L -измеримые функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ образуют обобщенную слабо чебышевскую систему на $[a,b]$, если произвольный полином $\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i$ меняет знак на $[a,b]$ не более n раз. Ясно, что понятие обобщенной слабо чебышевской системы охватывает обобщенные системы Чебышева [1] и слабо чебышевские системы [2]. Такую систему, например, образуют на $[a,b]$ линейно-независимые кусочно-полиномиальные функции (в частности, сплайны) γ_i :

$$\gamma_i(t) = a_0^{i,j} + a_1^{i,j} t + \ldots + a_{m_j}^{i,j} t^{m_j} \quad (i=0,1,\ldots,n)$$

при $t_j \le t \le t_{j+1}$ $(j=0,1,\ldots,k)$, $a=t_0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} = b$, если $\sum_{j=0}^{k} m_j \le n-k$. Нетрудно видеть, что система функций $\{\gamma_i\}_{i=0}^{n}$, вообще говоря, не является ни слабо чебышевской, ни обобщенной чебышевской.

В основе всех этих понятий лежит приведенное в [1] весьма оригинальное определение перемены знака L -измеримых функций, позволившее получить для приближения таких функций ряд естественных результатов, аналогичных известным ранее лишь для классического случая аппроксимации полиномами по системе Чебышева [3] в пространстве $C_{[a,b]}$.

В настоящей работе доказаны: критерии обобщенной слабо чебы-

шевской системы в пространстве $L_{[a,b]}$ суммируемых на $[a,b]$ функций, аналог известной теоремы Чебышева [4] для обобщенной слабо чебышевской системы в пространстве $M_{[a,b]}$ измеримых существенно ограниченных на $[a,b]$ функций, а также некоторые другие результаты.

Пусть $\varphi_i \in L_{[a,b]}$, $E_i \subset [a,b]$, $i=0,1,\ldots,n$. Впредь считаем, что $n \geq 1$. Введем обозначение:

$$D\begin{pmatrix}\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \\ E_0, E_1, \ldots, E_n\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \int\limits_{E_0} \varphi_0(t)dt & \int\limits_{E_0} \varphi_1(t)dt & \ldots & \int\limits_{E_0} \varphi_n(t)dt \\ \int\limits_{E_1} \varphi_0(t)dt & \int\limits_{E_1} \varphi_1(t)dt & \ldots & \int\limits_{E_1} \varphi_n(t)dt \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int\limits_{E_n} \varphi_0(t)dt & \int\limits_{E_n} \varphi_1(t)dt & \ldots & \int\limits_{E_n} \varphi_n(t)dt \end{vmatrix}$$

В дальнейшем вместо записи $\{E_i\}_{i=0}^{n}$, $\sup E_i \leq \inf E_{i+1}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$, будем употреблять краткую запись $\{E_i, <\}_{i=0}^{n}$.

ЛЕММА 1. Для произвольной системы $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ суммируемых на сегменте $[a,b]$ функций и любого семейства множеств $\{E_i\}_{i=0}^{n}$ *) выполняется соотношение

$$D\begin{pmatrix}\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \\ E_0, E_1, \ldots, E_n\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \\ E_0, E_0 \cup E_1, \ldots, \bigcup\limits_{i=0}^{n} E_i\end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 2. Чтобы система функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ $\varphi_i \in L_{[a,b]}$ $(i=0,1,\ldots,n)$, была линейно-независимой на сегменте $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство множеств $\{E_i, <\}_{i=0}^{n}$, $\operatorname{mes} E_i > 0$ $(i=0,1,\ldots,n)$, такое, что

---

*) Считаем, если особо не оговорено, что все рассматриваемые ниже множества суть подмножества сегмента $[a,b]$.

$$D\begin{pmatrix}\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \\ E_0, E_1, \dots, E_n\end{pmatrix} \neq 0. \qquad (I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Рассмотрим непрерывные на $[a,b]$ функции Φ_i, $\Phi_i(x)=\int_a^x \varphi_i(t)dt\ (i=0,1,\dots,n)$. Система функций $\{\Phi_i\}_{i=0}^n$ линейно-независима на $[a,b]$. Действительно, пусть $\sum_{i=0}^n a_i\Phi_i(x)=0$ на $[a,b]$, $\sum_{i=0}^n a_i^2>0$. Следовательно, для любого $x\in[a,b]$

$$\int_a^x \sum_{i=0}^n a_i\varphi_i(t)dt=0,$$

и легко показать, что полином $\sum_{i=0}^n a_i\varphi_i$ эквивалентен нулю на $[a,b]$. А так как $\sum_{i=0}^n a_i^2>0$, то система функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ линейно-зависима на $[a,b]$, что противоречит условию леммы.

Тогда существуют точки $x_0, x_1, \dots, x_n$, $a\le x_0<x_1<\dots<x_n\le b$, такие, что $\det\|\Phi_i(x_j)\|_{i,j=0}^n \neq 0$. Очевидно, что $a<x_0$.

В силу леммы I, получим

$$D\begin{pmatrix}\varphi_0, & \varphi_1, & \dots, & \varphi_n \\ [a,x_0], & [x_0,x_1], & \dots, & [x_{n-1},x_n]\end{pmatrix}\neq 0.$$

Достаточность. Пусть полином $\sum_{i=0}^n a_i'\varphi_i$ эквивалентен нулю на $[a,b]$. Тогда однородная система

$$\sum_{i=0}^n a_i'\int_{E_j}\varphi_i(t)dt=0,\quad j=0,1,\dots,n,$$

линейных относительно $a_i'\ (i=0,1,\dots,n)$ уравнений имеет, в силу условия (I), лишь нулевое решение и, следовательно, система функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ линейно-независима на $[a,b]$.

Пусть $\varphi\in L_{[a,b]}$, $\sigma>0$. Рассмотрим функции K_σ, φ_σ:

$$K_\sigma(x,s)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-s)^2}{\sigma^2}},$$

$$\varphi_\sigma(x)=\int_a^b K_\sigma(x,s)\varphi(s)ds.$$

Как известно ([5], с.265), в каждой точке $x\in[a,b]$, в которой функция φ является производной своего неопределенного интеграла,

$$\lim_{\sigma\to 0+} \psi_\sigma(x) = \varphi(x). \qquad (2)$$

Используя этот факт, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ - линейно-независимая на сегменте $[a,b]$ система суммируемых функций. Чтобы система функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ была обобщенной слабо чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{\psi_{\sigma,i}\}_{i=0}^n$,

$$\psi_{\sigma,i}(x) = \int_a^b K_\sigma(x,s)\varphi_i(s)ds,$$

была чебышевской на $[a,b]$, каково бы ни было число $\sigma > 0$ (сравни[6], с.165).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Возьмем произвольно полином $Q_n = \sum_{k=0}^n a_k \psi_{\sigma,k}$, $\sum_{k=0}^n a_k^2 > 0$. По условию, функция $P_n = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k$ меняет знак на $[a,b]$ не более n раз и не эквивалентна нулю на $[a,b]$. Следовательно, найдутся точки $t_1, t_2, \dots, t_n$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$, такие, что полином P_n на множестве $[t_i, t_{i+1}]$ $(i=0,1,\dots,n)$ не меняет знак и не эквивалентен нулю.

Рассмотрим непрерывные функции ψ_i :

$$\psi_i(x) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_\sigma(x,s)P_n(s)ds \quad (i=0,1,\dots,n).$$

Так как определитель

$$\det\left\| \psi_i(x_j)\right\|_{i,j=0}^n = \int\limits_{[t_0,t_1]\times\dots\times[t_n,t_{n+1}]} \det\left\|K_\sigma(x_i,s_j)\right\|_{i,j=0}^n \prod_{j=0}^n P_n(s_j)ds_0\dots ds_n$$

не равен нулю, каковы бы ни были точки $x_0, x_1, \dots, x_n$, $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b_n$, то $\{\psi_i\}_{i=0}^n$ - чебышевская на $[a,b]$ система функций. Поэтому полином $Q_n = \sum_{i=0}^n \psi_i$ имеет не более n различных нулей на $[a,b]$.

Достаточность. Допуская противное, возьмем полином $\sum_{i=0}^n b_i\varphi_i$, меняющий знак на $[a,b]$ по крайней мере $n+1$ раз. Тогда, в силу условия (2), для некоторого $\sigma > 0$ полином $\sum_{i=0}^n b_i\psi_{\sigma,i}$ имеет на $[a,b]$ не менее $n+1$ нуля, что невозможно.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ - линейно-независимая система функций пространства $L_{[a,b]}$ и для любых семейств множеств $\{E_i,\prec\}_{i=0}^n$, $\{F_i,\prec\}_{i=0}^n$, $mes\, E_i>0$, $mes\, F_i>0$ $(i=0,1,\ldots,n)$, выполняется неравенство

$$D\begin{pmatrix}\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\\ E_0, E_1, \ldots, E_n\end{pmatrix}\cdot D\begin{pmatrix}\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\\ F_0, F_1, \ldots, F_n\end{pmatrix}\geqslant 0.$$

Тогда $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ - обобщенная слабо чебышевская на сегменте $[a,b]$ система функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим функцию $\Omega\in L_{[a,b]^{n+1}}$:

$$\Omega(s_0, s_1, \ldots, s_n)=det\left\|\varphi_i(s_j)\right\|_{i,j=0}^n .$$

Ясно, что для любого семейства множеств $\{E_i,\prec\}_{i=0}^n$, $mes\, E_i>0$ $(i=0,1,\ldots,n)$,

$$D\begin{pmatrix}\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\\ E_0, E_1, \ldots, E_n\end{pmatrix}=\int\limits_{E_0\times E_1\times\ldots\times E_n}\Omega(s_0, s_1, \ldots, s_n)ds_0 ds_1\ldots ds_n \quad (3)$$

По условию, определитель $D\begin{pmatrix}\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\\ E_0, E_1, \ldots, E_n\end{pmatrix}$ сохраняет знак при замене семейства множеств $\{E_i,\prec\}_{i=0}^n$ на любое другое семейство $\{F_i,\prec\}_{i=0}^n$, $mes\, F_i>0$, $i=0,1,\ldots,n$. Поэтому, в силу условия (3), можно считать, что $\Omega(s_0, s_1,\ldots, s_n)\geqslant 0$ почти всюду на множестве $E'\subset[a,b]^{n+1}$, $E'=E_0'\times E_1'\times\ldots\times E_n'$, каково бы ни было семейство множеств $\{E_i',\prec\}_{i=0}^n$. Отсюда $\Omega(s_0, s_1, \ldots, s_n)\geqslant 0$ на симплексе $S=\{(s_0, s_1, \ldots, s_n):$ $a\leqslant s_0\leqslant s_1\leqslant\ldots\leqslant s_n\leqslant b\}$. Действительно, предположив, что на множестве $T, T\subset S, \mu_{n+1}T>0$ [*], функция Ω будет отрицательной, возьмем $(n+1)$-мерный сегмент K, $K\subset S$, чтобы выполнялось условие $\mu_{n+1}T\cap K>0$. Тогда, так как для некоторого семейства $\{[a_i, b_i],\prec\}_{i=0}^n$ $K=[a_0,b_0]\times[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$, то $\Omega(s_0, s_1, \ldots, s_n)\geqslant 0$ почти всюду на K, что невозможно, потому что $\Omega(s_0, s_1,\ldots, s_n)<0$

---

*) μ_{n+1} - мера Лебега в евклидовом пространстве R^{n+1}.

на множестве $T \cap K$.

Кроме того, в силу леммы 2, из условия (3) следует, что функция Ω не эквивалентна нулю на $[a,b]^{n+1}$.

Возьмем произвольно точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$. Тогда для любого $\sigma > 0$ из соотношения ([7] , с. 73)

$$\det \left\| \psi_{\sigma,i}(x_j) \right\|_{i,j=0}^{n} = \frac{1}{(n+1)!} \int\limits_{[a,b]^{n+1}} \det \left\| K_\sigma(x_i, s_j) \right\|_{i,j=0}^{n} \cdot \Omega(s_0, s_1, \ldots, s_n)\, ds_0\, ds_1 \ldots ds_n,$$

в силу равенства

$$\frac{1}{(n+1)!} \int\limits_{[a,b]^{n+1}} \det \left\| K_\sigma(x_i, s_j) \right\|_{i,j=0}^{n} \cdot \Omega(s_0, s_1, \ldots, s_n)\, ds_0\, ds_1 \ldots ds_n =$$

$$= \int\limits_{S} \det \left\| K_\sigma(x_i, s_j) \right\|_{i,j=0}^{n} \cdot \Omega(s_0, s_1, \ldots, s_n)\, ds_0\, ds_1 \ldots ds_n,$$

получим, что $\det \left\| \psi_{\sigma,i}(x_j) \right\|_{i,j=0}^{n} \ne 0$, и, следовательно, $\{\psi_{\sigma,i}\}_{i=0}^{n}$ – чебышевская на $[a,b]$ система функций. Поэтому, в силу леммы 3, функции φ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ образуют обобщенную слабо чебышевскую систему на $[a,b]$.

ТЕОРЕМА 2. Е с л и $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ – о б о б щ е н н а я с л а б о ч е б ы ш е в с к а я н а с е г м е н т е $[a,b]$ с и с т е м а ф у н к ц и й п р о с т р а н с т в а $L_{[a,b]}$, т о

$$D\begin{pmatrix} \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \\ E_0, E_1, \ldots, E_n \end{pmatrix} \cdot D\begin{pmatrix} \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \\ F_0, F_1, \ldots, F_n \end{pmatrix} \ge 0,$$

к а к о в ы б ы н и б ы л и с е м е й с т в а м н о ж е с т в $\{E_i, <\}_{i=0}^{n}$, $\{F_i, <\}_{i=0}^{n}$, $\operatorname{mes} E_i > 0$, $\operatorname{mes} F_i > 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $\sigma > 0$ построим функцию Ω_σ, заданную на множестве $[a,b]^{n+1}$ формулой

$$\Omega_\sigma(x) = \det \left\| \psi_{\sigma,i}(x_j) \right\|_{i,j=0}^{n}.$$

Функция Ω_σ, в силу леммы 3, сохраняет знак на множестве $E \cup F$, где $E = E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_n$, $F = F_0 \times F_1 \times \ldots \times F_n$. Так как Ω_σ – непрерывная по переменной σ функция, то

можно для определенности считать, что $\Omega_\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ на множестве $E \cup F$ для любого $\sigma > 0$.

В силу условия (2),

$$\lim_{\sigma \to 0+} \Omega_\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \Omega(x_0, x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$

почти всюду на множестве $E \cup F$.

Тогда ясно, что

$$D\begin{pmatrix} \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \\ E_0, E_1, \ldots, E_n \end{pmatrix} \cdot D\begin{pmatrix} \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \\ F_0, F_1, \ldots, F_n \end{pmatrix} =$$

$$= \int_E \Omega(x_0, x_1, \ldots, x_n) dx_0 dx_1 \ldots dx_n \int_F \Omega(x_0, x_1, \ldots, x_n) dx_0 dx_1 \ldots dx_n \geq 0$$

Будем говорить, что L-измеримая функция f, заданная на сегменте $[a, b]$, слабо меняет знак в точках $t_1, t_2, \ldots, t_p$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < t_{p+1} = b$, если f не эквивалентна нулю на $[a, b]$ и $(-1)^i f(t) \geq 0 \ (\leq 0)$ почти всюду на множестве $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ - обобщенная слабо чебышевская на сегменте $[a, b]$ система функций пространства $L_{[a,b]}$. Тогда для любых точек $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(m \leq n)$, $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < b$, существует полином по системе функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$, слабо меняющий знак в точках t_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3, для каждого $\sigma > 0$ найдется полином $Q_n^\sigma = \sum_{i=0}^n c_{\sigma,i} \psi_{\sigma,i}$, меняющий знак в точках t_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ и только в них, причем $Q_n^\sigma(x) > 0$ на множестве $[a, t_1)$. Не умаляя общности рассуждения, можно считать, что $\sum_{i=0}^n c_{\sigma,i}^2 = 1$ для любого $\sigma > 0$.

Возьмем 0-последовательность $(\sigma_\nu)_{\nu \in N}$ положительных чисел σ_ν и числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ так, чтобы

$$\lim_{\nu \to \infty} c_{\sigma_\nu, i} = c_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Тогда, в силу условия (2),

$$\lim_{\nu \to \infty} Q_n^{\sigma_\nu}(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x)$$

почти всюду на $[a, b]$. Ясно, что полином $\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i$ слабо меняет знак в точках t_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в условии теоремы $m = 0$, то найдется полином по системе функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$, не меняющий знак и не эквивалентный нулю на $[a, b]$.

Будем говорить, что L-измеримая функция f, заданная на сегменте $[a,b]$, имеет k-членный альтернанс Валле-Пуссена, если существуют числа $\alpha_i > 0$ $(i=1,2,\ldots,k)$ и семейство множеств $\{E_i, <\}_{i=1}^{k}$ такие, что для любого числа σ, $0 \le \sigma \le \alpha_i$, выполняется соотношение

$$mes\{t \in E_i : \sigma < |f(t)| \le \alpha_i\} > 0,$$

причем знаки $f(t)$ на множествах E_i $(i=1,2,\ldots,k)$ последовательно противоположны.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ – обобщенная слабо чебышевская на сегменте $[a,b]$ система функций пространства $M_{[a,b]}$, $f \in M_{[a,b]}$. Если для некоторого полинома P_n по системе функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ разность $f - P_n$ имеет $(n+2)$-членный альтернанс Валле-Пуссена, то

$$E_n(f) = \inf_{a_i \in R} \operatorname{vrai}\max_{t \in [a,b]} \left|f(t) - \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(t)\right| \ge \min \alpha_i \quad (i=1,2,\ldots,n+2).$$

Доказательство с необходимыми изменениями можно провести так же, как в теореме 3 [I].

Будем говорить, что функция $f \in M_{[a,b]}$ имеет обобщенный k-членный альтернанс на $[a,b]$, если для каждого числа σ, $0 < \sigma \le \|f\|_{M_{[a,b]}}$, найдется семейство множеств $\{E_i(\sigma), <\}_{i=1}^{k}$ такое, что выполняются следующие условия:

I) $mes\, E_i(\sigma) > 0$ $(i=1,2,\ldots,k)$;

2) $|f(t)| > \|f\|_{M_{[a,b]}} - \sigma$ на множестве $\bigcup_{i=1}^{k} E_i(\sigma)$;

3) $(-1)^i f(t) > 0$ (<0) на множестве $E_i(\sigma)$ $(i=1,2,\ldots,k)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ – обобщенная слабо чебышевская на сегменте $[a,b]$ система функций пространства $M_{[a,b]}$, $f \in M_{[a,b]}$, $P_n^* = \sum_{i=0}^{n} a_i^* \varphi_i$. Если разность $f - P_n^*$ имеет обобщенный чебышевский ($(n+2)$-членный) альтернанс на $[a,b]$, то

$$\|f - P_n^*\|_{M_{[a,b]}} = \inf_{a_i \in R} \left\|f - \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i\right\|_{M_{[a,b]}}.$$

Это условие будет и необходимым, если P_n^* – единственный полином по системе функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$, наименее уклоняющийся от f *).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если функция $f-P_n^*$ имеет сингулярную точку **) на $[a,b]$, то нетрудно показать, что $f-P_n^*$ обладает на $[a,b]$ обобщенным чебышевским альтернансом. Если же на $[a,b]$ нет сингулярных точек разности $f-P_n^*$, то, предположив, что существует лишь ρ -членный альтернанс $f-P_n^*$ $(\rho \le n+1)$ на $[a,b]$, можно [I] найти точки $t_1, t_2, \dots$ $\dots, t_{\rho-1}$, $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_{\rho-1}<t_\rho=b$, такие, что для некоторого δ, $0<\delta\le E_n(f)$, почти всюду на множестве $[t_i, t_{i+1}]$, $i=0,1,\dots,\rho-1$, выполняется одно из соотношений:

$$-E_n(f)+\delta \le f(t)-P_n^*(t) \le E_n(f),$$

$$-E_n(f) \le f(t)-P_n^*(t) \le E_n(f)-\delta.$$

Построим полином $\tilde{P}_n$ по системе функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$, слабо меняющий знак в точках t_i $(i=1,2,\dots,\rho-1)$. Ясно, что можно подобрать такое число ε, что полином $P_n^*+\varepsilon\tilde{P}_n$ будет полиномом наилучшего приближения функции f (в метрике $M_{[a,b]}$), а это противоречит условию теоремы.

Достаточность. Допуская, что существует полином P^{**} по системе функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ такой, что $\eta_1=\|f-P_n^*\|_{M_{[a,b]}}>\|f-P_n^{**}\|_{M_{[a,b]}}=$ $=\eta_2$, возьмем $\sigma=\eta_1-\eta_2$. Тогда по условию теоремы найдется семейство множеств $\{E_i(\sigma),\prec\}_{i=1}^{n+2}$, $\operatorname{mes} E_i(\sigma)>0$, удовлетворяющее условию

$$|f(t)-P_n^*(t)|>\eta_2, \quad t\in\bigcup_{i=1}^{n+2} E_i(\sigma),$$

причем знаки $f(t)-P_n^*(t)$ на множествах $E_i(\sigma)$ $(i=1,2,\dots,n+2)$ последовательно противоположны. Следовательно, полином $P_n^{**}-P_n^*$ меняет знак по крайней мере $n+1$ раз на $[a,b]$, что невозможно.

---

*) Как обычно, исключаем из рассмотрения тривиальный случай, когда аппроксимируемая функция эквивалентна полиному.

**) Классификацию экстремальных точек см. в [I].

Считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность Г.И.Натансону и Г.Я.Ярахмедову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЯРАХМЕДОВ Г.Я. К основной теореме П.Л.Чебышева. - "Успехи мат.наук", 1965, т. 20, вып.5, с. 251-256.
2. КАРЛИН С., СТАДДЕН В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М., "Наука", 1976, с. 15-20.
3. БЕРНШТЕЙН С.Н. Экстремальные свойства полиномов. М.-Л., ОНТИ, 1937.
4. ТИМАН А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960, с. 66-67.
5. НАТАНСОН И.П. Теория функций вещественной переменной. М., "Наука", 1974,
6. ГАНТМАХЕР Ф.Р., КРЕЙН М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.-Л., Гостехиздат, 1950, с. 165-168.
7. ПОЛИА Г., СЕГЕ Г. Задачи и теоремы из анализа. М., Гостехиздат, 1956, с. 73-74.

Поступила в ред-изд.отдел
4 августа 1977 года