Выпуск 21(38) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Численные методы

УДК 519.3

МЕТОД НЕСТРОГОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В.П.Дармахеев

В данной работе рассматривается итеративный метод решения задачи линейного программирования с матрицей ограничений специального вида. Для задач линейного программирования с ограничениями общего вида В.А.Булавским [I-4] был разработан итеративный метод, заключающийся в последовательном проектировании на многогранные множества, содержащие допустимое множество исходной задачи, с последующим смещением в направлении градиента максимизируемой функции. Эта идея последовательного проектирования уже к более общим задачам выпуклого программирования нашла свое обобщение в работах авторов [5-9]; например, в [5,6] оно сделано на основе аппарата фейеровских приближений.

В настоящей работе особо выбранная матрица ограничений позволяет процедуры проектирования заменить решением задач квадратичного программирования, к которым может быть применен специальный алгоритм [II], дающий возможность снизить размер матриц, участвующих в процессе вычислений. Данная статья базируется на работах [3,4]. При доказательстве сходимости была использована теорема из [8]. При изложении будем использовать как вектор-столбцы, так и вектор-строки. Ради удобства изложения для обозначения z-мерного пространства столбцов примем обозначение R^z, а соответствующего пространства строк – R_z.

Рассмотрим в пространстве R^n следующую задачу: требуется минимизировать величину

$$cx \qquad (I)$$

при условиях

$$Ax \geq b. \tag{2}$$

Здесь матрица A имеет размеры $m \times n$, $c \in R_n$, $b \in R^m$, а вектор $x \in R^n$ является неизвестным. Будем рассматривать задачи, в которых матрица A имеет следующую блочную структуру:

$$A = \begin{bmatrix} B^{(1)} & A^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ B^{(2)} & 0 & A^{(2)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ B^{(q)} & 0 & 0 & \ldots & A^{(q)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

где $B^{(j)}$, $A^{(j)}$ $(j=1,2,\ldots q)$ – матрицы размеров $m_j \times n_0$ и $m_j \times n_j$ соответственно, причем $\sum_{j=1}^{q} m_j = m, \sum_{j=0}^{q} n_j = n$, $q > 1$. Согласно схеме (3), множество индексов строк $I = \{1,2,\ldots,m\}$ разбивается на непересекающиеся подмножества $I_j = \{i \in I / \sum_{s=1}^{j-1} m_s < i \leq \sum_{s=1}^{j} m_s\}, j=1,2,\ldots,q$. В соответствии с этим разбиением пространства R^m и R_m будем представлять в виде произведений $R^m = R^{m_1} \times R^{m_2} \times \ldots \times R^{m_q}$ и $R_m = R_{m_1} \times R_{m_2} \times \ldots \times R_{m_q}$, а векторы $z \in R^m$ и $v \in R_m$ – в виде наборов $z = (z^1, z^2, \ldots, z^q)$ и $v = (v^1, v^2, \ldots, v^q)$, где $z^j \in R^{m_j}$ и $v^j \in R_{m_j}$. Аналогично, векторы $x \in R^n = R^{n_0} \times R^{n_1} \times \ldots \times R^{n_q}$ и $c \in R_n = R_{n_0} \times R_{n_1} \times \ldots \times R_{n_q}$ будут представляться в виде: $x = (x^0, x^1, \ldots, x^q)$, $c = (c^0, c^1, \ldots, c^q)$. Обозначим через $\|x\|_0$ полунорму вектора x, положив $\|x\|_0 = \|x^0\| = (\sum_{j=1}^{n_0} \xi_j^2)^{1/2}$, где ξ_j – компонента с номером j вектора x.

Системы неравенств

$$B^{(j)} x^0 + A^{(j)} x^j \geq b^j, \; j = 1,2,\ldots,q, \tag{4}$$

являясь в (2) подсистемами, определяют некоторые выпуклые замкнутые многогранные множества Q_j, содержащие допустимое множество исходной задачи Q, причем $Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_q = Q$.

Идея метода состоит в следующем. Зафиксируем некоторое число $\alpha > 0$ и выберем произвольную точку $x_0 = (x_0^0, x_0^1, \ldots, x_0^q)$. Положив $z_0 = x_0$, последовательно определяем векторы $z_j = (z_j^0, z_j^1, \ldots, z_j^q)$, $j = 1,2,\ldots,q$, из условий: $z_j^i = z_{j-1}^i$ при $i \notin \{0,j\}$, $z_j \in Q_j$, и вектор z_j доставляет минимум квадратичной функции $\alpha\|x - z_{j-1}\|_0^2 + c^0 x^0 + q c^j x^j$. Таким образом, при определении очередного z_j решается квадратичная задача относительно x^0 и x^j:

$$\min\{\alpha\|x^0 - z_{j-1}^0\|^2 + c^0 x^0 + q c^j x^j \mid B^{(j)} x^0 + A^{(j)} x^j \geq b^j\}. \tag{5}$$

Определив вектор z_q, положим $x_1=z_q$. По вектору x_1 точно так же можно определить вектор x_2 и т.д. Значок "T" здесь и в дальнейшем обозначает транспонирование. Возможна следующая модификация этого метода [12]. Вместо задачи (5) при определении z_j решается несколько иная задача квадратичного программирования относительно x^0 и x^j:

$$\min\{\alpha\|x^0-z^0_{j-1}\|^2+c^jx^j \mid B^{(j)}x^0+A^{(j)}x^j\geq b^j\},$$

и вектор x_1 определяется по другой формуле: $x_1=z_q-\frac{1}{2\alpha}(c^0)^T$.

ЛЕММА I. Если задача (I)-(2) разрешима, то задача

$$\min_{x\in Q_j}(\alpha\|x^0-x^0_0\|^2+c^0x^0+q\,c^jx^j) \qquad (6)$$

имеет решение для любых $x^0_0\in R^{n_0}$, $\alpha>0$ и $j=1,2,\ldots,q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как многогранные множества Q_j предполагаются непустыми, то (см. [IO]) для существования решения задачи (6) необходимо и достаточно отсутствие допустимого луча, состоящего из допустимых решений, на котором функция

$$f(x)=\alpha\|x^0-x^0_0\|^2+c^0x^0+q\,c^jx^j$$

строго убывает. Предположим, напротив, что такой допустимый луч существует. Пусть это луч $\{x+\lambda s \mid \lambda\in[0,+\infty)\}$, где $x\in Q_j$ и $s\in R^n$. В силу специфики системы, определяющей множество Q_j, можно считать, что $s^i=0$ при $i\neq j$ $(i=1,2,\ldots,q)$. Поскольку

$$f(x+\lambda s)=\alpha\|x^0+\lambda s^0-x^0_0\|^2+c^0(x^0+\lambda s^0)+q\,c^j(x^j+\lambda s^j)=$$

$$=\alpha\|x^0-x^0_0\|^2+2\alpha\lambda(s^0,x^0-x^0_0)+\alpha\lambda^2\|s^0\|^2+c^0(x^0+\lambda s^0)+q\,c^j(x^j+\lambda s^j),$$

то из строгого убывания этой величины при $\lambda\to+\infty$ следует, что $\|s^0\|=0$, т.е. у вектора s первые n_0 компонент также равны нулю. Поэтому, если y – допустимое решение задачи (I)-(2), то луч $\{y+\lambda s \mid \lambda\in[0,+\infty)\}$ будет для задачи (I)-(2) допустимым лучом, на котором функция cx неограниченно убывает, что противоречит разрешимости этой задачи. Лемма доказана.

Введем в рассмотрение операции $T_j: R^{n_0}\to R^{n_0}$ $(j=1,2,\ldots,q)$ следующим образом. При всяком $x^0\in R^{n_0}$ определим решение y задачи

$$\min_{y\in Q_j}(\alpha\|y^0-x^0\|^2+c^0y^0+q\,c^jy^j) \qquad (7)$$

и положим $T_j x^\circ = y^\circ$. В силу строгой выпуклости минимизируемой функции по y° вектор $T_j x^\circ$ определяется по x° однозначно. Вектор же y^j принадлежит множеству $S_j(T_j x^\circ) \subset R^{n_j}$, где через $S_j(y^\circ)$ при $y^\circ \in R^{n_0}$ обозначено множество решений $z \in R^{n_j}$ задачи

$$\min\{c^j z \mid A^{(j)} z \geq b^j - B^{(j)} y^\circ\}. \quad (8)$$

Используя введенные обозначения, описанный выше шаг итерационного процесса можно определить формулами:

$$z_j^\circ = T_j(z_{j-1}^\circ),\ z_q^j \in S_j(z_j^\circ),\quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Если для $j = 1, 2, \dots, q$ положить $F_j = T_j T_{j-1} \dots T_1$, то исследуемый итерационный процесс опишется формулами:

$$\begin{aligned} &x_k^\circ = F_q x_{k-1}^\circ, \\ &x_k^j \in S_j(F_j x_{k-1}^\circ),\ j = 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \quad (9)$$

При применении операции T_j $(j = 1, 2, \dots, q)$ к вектору $F_{j-1} x^\circ$ по теореме Куна - Таккера может быть определена строка $\vartheta^j \in R_{m_j}$, характеризуемая условиями:

$$2\alpha(F_j x^\circ - F_{j-1} x^\circ)^T + c^\circ = q\,\vartheta^j B^{(j)}, \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta^j A^{(j)} = c^j,\ \vartheta^j \geq 0, \\ &B^{(j)}(F_j x^\circ) + A^{(j)} x^j \geq b^j, \\ &\vartheta^j(B^{(j)}(F_j x^\circ) + A^{(j)} x^j - b^j) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

где $x^j \in S_j(F_j x^\circ)$.

Заметим, что строки ϑ^j определяются, вообще говоря, не однозначно. Составим строку $\vartheta = (\vartheta^1, \vartheta^2, \dots, \vartheta^q) \in R_m$ и обозначим через Vx° множество всех возможных значений строки ϑ. Из (10) получаем

$$F_j x^\circ = x^\circ + q/2\alpha \sum_{i=1}^{j} (\vartheta^i B^{(i)})^T - j/2\alpha\,(c^\circ)^T. \quad (12)$$

Подставив вместо $F_j x^\circ$ в (4) и (11) его выражение из (12) и положив $\sigma = 1/2\alpha$, получим, что множество Vx° характеризуется условиями

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta^j A^{(j)} = c^j,\ \vartheta^j = 0, \\ &B^{(j)} x^\circ + A^{(j)} x^j \geq b^j - \sigma q B^{(j)} \sum_{i=1}^{j} (\vartheta^i B^{(i)})^T + j\sigma B^{(j)} (c^\circ)^T, \\ &\vartheta^j(B^{(j)} x^\circ + A^{(j)} x^j) = \vartheta^j(b^j - \sigma q B^{(j)} \sum_{i=1}^{j} (\vartheta^i B^{(i)})^T + j\sigma B^{(j)} (c^\circ)^T, \end{aligned}\right\} (13)$$

где $x^j \in S_j(F_j x^0)$. Изучим свойства операторов T_j $(j=1,2,\ldots,q)$.

ЛЕММА 2. При любых $x^0 \in R^{n_0}$ и $\tilde{x}^0 \in R^{n_0}$ справедливо неравенство

$$\|T_j x^0 - T_j \tilde{x}^0\|^2 \le \|x^0 - \tilde{x}^0\|^2 - \|(x^0 - \tilde{x}^0) - (T_j x^0 - T_j \tilde{x}^0)\|^2. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют строки $v^j, \tilde{v}^j \in R_{m_j}$, которые удовлетворяют (10)-(11), где вместо $F_{j-1} x^0$ и $F_j x^0$ надо взять x^0 и $T_j x^0$ или $\tilde{x}^0$ и $T_j \tilde{x}^0$. Поэтому

$$\|x^0 - \tilde{x}^0\|^2 = \|T_j x^0 - T_j \tilde{x}^0 - 6q((v^j - \tilde{v}^j)B^{(j)})^T\|^2 = \|T_j x^0 - T_j \tilde{x}^0\|^2 - 26q(v^j - \tilde{v}^j)B^{(j)}(T_j x^0 - T_j \tilde{x}^0) + 6^2 q^2 \|(v^j - \tilde{v}^j)B^{(j)}\|^2.$$

Из соотношений (II) при помощи простого перебора возможных случаев, заключаем, что

$$(v^j - \tilde{v}^j)[B^{(j)}(T_j x^0 - T_j \tilde{x}^0) + A^{(j)}(x^j - \tilde{x}^j)] \le 0,$$

где $x^j \in S_j(T_j x^0)$, $\tilde{x}^j \in S_j(T_j \tilde{x}^0)$. В силу (II) также получим, что $(v^j - \tilde{v}^j)A^{(j)} = 0$, и поэтому $(v^j - \tilde{v}^j)B^{(j)}(T_j x^0 - T_j \tilde{x}^0) \le 0$. Учитывая полученное выше равенство, находим, что

$$\|T_j x^0 - T_j \tilde{x}^0\|^2 \le \|x^0 - \tilde{x}^0\|^2 - 6^2 q^2 \|(v^j - \tilde{v}^j)B^{(j)}\|^2 = \|x^0 - \tilde{x}^0\|^2 - \|(x^0 - \tilde{x}^0) - (T_j x^0 - T_j \tilde{x}^0)\|^2.$$

Лемма доказана.

Обозначим через P_j оператор проектирования из R^n на R^{n_j}, $j=0,1,\ldots,q$. Следующая лемма описывает множество неподвижных точек оператора T_j. Это множество, как видно из доказываемой леммы, может быть и пустым.

ЛЕММА 3. Вектор $x^0 \in R^{n_0}$ является неподвижной точкой оператора T_j тогда и только тогда, когда $x^0 \in P_0(\tilde{Q}_j)$, где $\tilde{Q}_j = \{x \in Q_j \mid \tilde{c}x \le \tilde{c}z \ \forall z \in Q_j\}$, а $\tilde{c} = (c^0, 0, \ldots, qc^j, 0, \ldots, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x^0 – неподвижная точка оператора T_j, т.е. $T_j x^0 = x^0$. Предположим, что $x^0 \notin P_0(\tilde{Q}_j)$. Тогда найдется такой вектор $\tilde{x} \in Q_j$, что $c^0\tilde{x}^0 + qc^j\tilde{x}^j < c^0x^0 + qc^jx^j$, где $x^j \in S_j(x^0)$. Если $x_t^0 = x^0 + t(\tilde{x}^0 - x^0)$, $t \in (0,1)$, и соответственно $x_t^j = x^j + t(\tilde{x}^j - x^j)$, то

$$f(x_t) = \alpha\|x_t^0 - x^0\|^2 + c^0x_t^0 + qc^jx_t^j = \alpha t^2\|\tilde{x}^0 - x^0\|^2 + c^0x^0 + qc^jx^j + t[c^0\tilde{x}^0 + qc^j\tilde{x}^j - (c^0x^0 + qc^jx^j)].$$

Так как коэффициент при t отрицателен, то $f(x_t) < c^0x^0 + qc^jx^j$ при достаточно малых t. Но это противоречит минимуму (7) в

определении T_j, так как $T_j x^\circ = x^\circ$.

Обратно. Пусть $x^\circ \in P_\circ^j(\tilde{Q}_j)$. Если $x = (x_\circ^\circ, \dots, x_\circ^j, \dots) \in \tilde{Q}_j$, то

$$c^\circ x^\circ + q c^j x^j \le c^\circ z^\circ + q c^j z^j \le \alpha \| z^\circ - x^\circ \|^2 + c^\circ z^\circ + q c^j z^j.$$

$\forall z \in Q_j$. А это и значит, что $T_j x^\circ = x^\circ$. Лемма доказана.

Обозначим через $\Phi_\sigma : R^{n_\circ} \to R^{n_\circ}$ наш итерационный оператор, так что $\Phi_\sigma x^\circ = F_q x^\circ$. Через S_σ обозначим множество неподвижных точек оператора Φ_σ. Из (12) легко увидеть, что $x^\circ \in S_\sigma$ тогда и только тогда, когда при $\vartheta \in V x^\circ$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{q} \vartheta_j B^{(j)} = c^\circ. \qquad (15)$$

При доказательств следующей теоремы будет использована хорошо известная непрерывная зависимость решения задачи линейного программирования от правой части системы ограничений. Точнее, будет использована следующая лемма, доказательство которой не приводится. В формулировке леммы и в дальнейшем через $\rho(z, \mathcal{D})$ будем обозначать расстояние от точки z до множества $\mathcal{D}$ в соответствующем пространстве.

ЛЕММА 4. Если последовательность $\{b^k\}_{k=1,2,\dots}$, $b^k \in R^m$, сходится к вектору b и если каждый из векторов $x_k (k=1,2,\dots)$ минимизирует форму (1) при системе ограничений

$$Ax \ge b^k,$$

то $\rho(x_k, Q_\circ) \to 0$, где $Q_\circ$ - множество решений задачи минимизации формы (1) при системе ограничений (2). В рамках этого утверждения под A понимается произвольная матрица размера $m \times n$.

ТЕОРЕМА 1. Если $S_\sigma \ne \emptyset$, то при любом начальном векторе $x_\circ$ для итераций (9) справедливы утверждения:

1) $x_k^\circ \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{x}^\circ \in S_\sigma$;

2) $\rho(x_k^j, S_j(F_j \bar{x}^\circ)) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, $j = 1, 2, \dots, q$;

3) $\rho(\vartheta_k, V\bar{x}^\circ) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ при любых $\vartheta_k \in V x_k^\circ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что оператор Φ_σ является S_σ -

Фейеровским [7, 8]. Пусть $y \in S_\sigma$, $\tilde{y} \notin S_\sigma$. Тогда последовательно используя лемму 2, получаем

$$\|\Phi_\sigma \tilde{y} - y\| = \|F_q \tilde{y} - F_q y\| \le \|F_{q-1}\tilde{y} - F_{q-1} y\| \le \dots \le \|\tilde{y} - y\|;$$

при этом $\|\Phi_\sigma \tilde{y} - y\| = \|\tilde{y} - y\|$ может быть лишь тогда, когда $F_q\tilde{y} - F_q y = F_{q-1}\tilde{y} - F_{q-1} y = \dots = \tilde{y} - y$. Отсюда $\tilde{y} = F_q \tilde{y}$, т.е. $\tilde{y}$ должно принадлежать S_σ. Тем самым возможно лишь строгое неравенство $\|\Phi_\sigma \tilde{y} - y\| < \|\tilde{y} - y\|$. По теореме I.4 [8] $x_k^\circ \to \bar{x}^\circ \in S_\sigma$.

Докажем второе утверждение нашей теоремы. Вектор $x_k^j \in S_j(F_j x_{k-1}^\circ)$ минимизирует форму $c^j z$ при ограничениях

$$A^{(j)} z \ge b^j - B^{(j)} F_j x_{k-1}^\circ. \tag{16}$$

Аналогично, любой вектор $\bar{x}^j \in S_j(F_j \bar{x}^\circ)$ минимизирует ту же форму $c^j z$ при ограничениях

$$A^{(j)} z \ge b^j - B^{(j)} F_j \bar{x}^\circ. \tag{17}$$

Из непрерывности операторов F_j и сходимости x_k° к вектору $\bar{x}^\circ$ следует, что правая часть системы (16) сходится к правой части системы (17). Отсюда по лемме 4 получаем второе утверждение теоремы. Третье утверждение теоремы доказывается аналогично. Действительно, из того, что векторы $x^\circ = F_j \bar{x}^\circ$ и $x^j \in S_j(F_j \bar{x}^\circ)$ удовлетворяют системе (4), а также из (10), (11) и теорем двойственности для задач линейного программирования следует, что множество $V\bar{x}^\circ$ состоит из векторов, максимизирующих функцию

$$v b \tag{18}$$

при ограничениях

$$v^j B^{(j)} = 1/q\sigma\,(F_j \bar{x}^\circ - F_{j-1}\bar{x}^\circ)^T + c^\circ/q,$$

$$v^j A^{(j)} = c^j,\quad v^j \ge 0,\quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Вектор же v_k максимизирует функцию (18) при аналогичной системе ограничений

$$v^j B^{(j)} = 1/q\sigma\,(F_j x_{k-1}^\circ - F_{j-1} x_{k-1}^\circ)^T + c^\circ/q,$$

$$v^j A^{(j)} = c^j,\quad v^j \ge 0,\quad j = 1, 2, \dots, q.$$

И так как по непрерывности F_j правая часть этой системы сходится к правой части предыдущей системы, то утверждение 3 теоремы следует из леммы 4.

ТЕОРЕМА 2. Итерации x_k° сходятся к $\bar{x}^\circ$,

по крайней мере, со скоростью геометрической прогрессии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i \in I=\{1,2,\ldots,m\}$ через $j(i)$ обозначим номер j, при котором $i \in I_j$, а через a_i - столбец матрицы A^T с номером i. Отметим, что в разбиении $a_i=(a_i^0, a_i^1,\ldots,a_i^q)$ отличны от нуля только a_i^0 и $a_i^{j(i)}$. Обозначим также через b_i i-компоненту вектора b.

Пусть $\tilde{I}$ есть множество индексов i, для которых при $j=j(i)$

$$(a_i^0,\bar{x}^0)+(a_i^j,\bar{x}^j)=b_i-\sigma q\sum_{s=1}^{j}\bar{\vartheta}^s B^{(s)}a_i^0+j\sigma c^0 a_i^0 \qquad (19)$$

для любых $\bar{x}^j \in S_j(F_j\bar{x}^0)$ и $\bar{\vartheta}\in V\bar{x}^0$. По лемме 2

$$\|F_s x_{k-1}^0-F_s\bar{x}^0\|^2 \le \|F_{s-1}x_{k-1}^0-F_{s-1}\bar{x}^0\|^2-\sigma^2q^2\|(\vartheta_k^s-\bar{\vartheta}^s)B^{(s)}\|^2. \qquad (20)$$

Отсюда в силу сходимости $x_k^0 \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{x}^0$ и непрерывности операций F_s получаем, что $\vartheta_k^s B^{(s)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{\vartheta}^s B^{(s)}$ при всех $s=1,2,\ldots,q$. И так как векторы ϑ_k и x_k связаны соотношениями (13), то по теореме 1 при достаточно больших k i-я компонента $(\vartheta_k)_i$ вектора ϑ_k равна нулю при $i\in I\setminus\tilde{I}$.

При всяком $j=1,2,\ldots,q$ вектор $\bar{z}\in R^n$ такой, что $\bar{z}^0=F_j\bar{x}^0$, $\bar{z}^j=\bar{x}^j$ и $\bar{z}^s=0$ при $s\ne j$, удовлетворяет соотношениям (10)-(11), если положить $x^0=\bar{z}^0$, $x^j=\bar{z}^j$ и $\vartheta^j=\bar{\vartheta}^j$. В силу теоремы двойственности для задач линейного программирования вектор $\bar{z}$ минимизирует линейную функцию

$$1/\sigma q(F_j\bar{x}^0-F_{j-1}\bar{x}^0,x^0)+1/q\; c^0x^0+c^jx^j \qquad (21)$$

при ограничениях (4). Аналогично вектор $z_k\in R^n$, у которого $z_k^0=F_jx_{k-1}^0$, $z_k^j=x_k^j$ и $z_k^s=0$ для $s\ne j$, минимизирует функцию

$$1/\sigma q\,(F_jx_{k-1}^0-F_{j-1}x_{k-1}^0,x^0)+1/q\; c^0x^0+c^jx^j$$

при тех же ограничениях (4). Так как $(F_jx_{k-1}^0-F_{j-1}x_{k-1}^0)\xrightarrow[k\to\infty]{}(F_j\bar{x}^0-F_{j-1}\bar{x}^0)$, то по лемме 1 из [2] при достаточно больших k вектор z_k минимизирует форму (21) при ограничениях (4).

Обозначим через $\tilde{I}_1$ множество таких номеров $i\in\tilde{I}$, для которых существует $\bar{\vartheta}\in V\bar{x}^0$ с $(\bar{\vartheta})_i>0$. Так как при достаточно больших k векторы $F_jx_{k-1}^0$ и x_k^j минимизируют форму (21), то при таких k для $j=j(i)$

$$(a_i^0, F_j x_{k,1}^0)+(a_i^1, x_k^1)=b_i \quad \text{при } i\in \tilde{I}_1.$$

Следовательно, из системы сотношен й (13) при достаточно больших k получим

$$\begin{cases} (a_i^0, x_{k,1}^0)+(a_i^1, x_k^1)=b_i-\sigma q\sum_{s=1}^{1} v_k^s B^{(1)}a_i^0+j\sigma c^0 a_i^0 & \text{при } i\in \tilde{I}_1, \\ (a_i^0, x_{k,1}^0)+(a_i^1, x_k^1)\geq b_i-\sigma q\sum_{s=1}^{1} v_k^s B^{(1)}a_i^0+j\sigma c^0 a_i^0 & \text{при } i\in \tilde{I}_0=\tilde{I}\setminus\tilde{I}_1, \\ (v_k)_i=0 & \text{при } i\in I\setminus\tilde{I}. \end{cases} \quad (22)$$

Обозначим через Γ подпространство в R^{n_0}, образованное линейными комбинациями векторов $\{a_i^0\}_{i\in\tilde{I}}$. Так как по (15) и (22) $c^0\in\Gamma$, то, переписав формулу (9) в виде

$$x_k^0 = x_{k-1}^0+\sigma q\sum_{i=1}^{m}(v_k)_i a_i^0-\sigma q(c^0)^T, \qquad (23)$$

заключаем, что при достаточно больших k $x_k^0-x_{k-1}^0\in\Gamma$. Учитывая равенство $\bar{x}^0-x_k^0=\sum_{\nu=k+1}^{\infty}(x_\nu^0-x_{\nu-1}^0)$, получаем, что при достаточно больших k $\bar{x}^0-x_k^0\in\Gamma$, т.е. $\bar{x}^0-x_k^0=\sum_{i\in\tilde{I}}t_i^k a_i^0$, где $t_i^k\in R$.

Пусть k, ℓ – достаточно большие натуральные числа такие, что $k<\ell$, и для них выполняется (22). Тогда из (23), используя представление (15) при $v=\bar{v}$, получим, что

$$x_\ell^0-x_k^0=\sigma q\sum_{i\in\tilde{I}}\sum_{s=k+1}^{\ell}(v_s-\bar{v})_i a_i^0.$$

Так как $v_s\geq 0$ и $(\bar{v})_i=0$ для $i\in\tilde{I}_0$, то в этом разложении вектора $x_\ell^0-x_k^0$ коэффициенты при a_i^0 для $i\in\tilde{I}_0$ неотрицательны. Таким образом,

$$x_\ell^0-x_k^0=\sum_{i\in\tilde{I}}t_i^{k,\ell}a_i^0, \quad t_i^{k,\ell}\geq 0, \ i\in\tilde{I}_0. \qquad (24)$$

Из того, что v_s и $\bar{v}$ удовлетворяют первой группе соотношений из (13) и, принимая во внимание, что для достаточно больших s $(v_s)_i=(\bar{v})_i=0$ для $i\notin\tilde{I}$, имеем

$$\sum_{i\in\tilde{I}\cap I_j}t_i^{k,\ell}a_i^j=0, \quad j=1,2,\ldots,q. \qquad (25)$$

Обозначим через $z_{k,\ell}$ и z_k векторы из R^n:

$$z_{k,\ell}=(x_\ell^0-x_k^0, 0,\ldots,0), \quad z_k=(\bar{x}^0-x_k^0, 0,\ldots,0).$$

Тогда из (24) и (25) получим, что

$$z_{k,l}=\sum_{i\in\tilde I} t_i^{k,l}a_i,\quad t_i^{k,l}\ge 0,\ i\in\tilde I_0. \qquad (26)$$

Обозначим через T множество векторов из R^n, представимых в форме (26). Так как множество T является конечно-порожденным конусом, то оно замкнуто. Поскольку $z_k=\lim_{l\to\infty} z_{k,l}$, то $z_k\in T$, т.е.

$$z_k=\sum_{i\in\tilde I} t_i^k a_i,\quad t_i^k\ge 0,\ i\in\tilde I_0. \qquad (27)$$

Если векторы $a_i,\ i\in\tilde I$, линейно-зависимые, то представление (27), вообще говоря, можно выбирать различными способами. Выберем то из представлений, в котором число ненулевых коэффициентов t_i^k наименьшее, и обозначим через $\tilde I^k$ совокупность номеров $i\in\tilde I$, для которых $t_i^k\ne 0$. Нетрудно показать, что семейство $\{a_i\}_{i\in\tilde I^k}$, линейно-независимое. Из (19) и (22) имеем

$$(a_i^0,\bar x^0-x_{k-1}^0)+(a_i^{j(i)},\bar x^{j(i)}-x_k^{j(i)})=\sigma q\sum_{s=1}^{j(i)}(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}a_i^0 \text{ при } i\in\tilde I_1,$$

$$(a_i^0,\bar x^0-x_{k-1}^0)+(a_i^{j(i)},\bar x^{j(i)}-x_k^{j(i)})\le\sigma q\sum_{s=1}^{j(i)}(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}a_i^0 \text{ при } i\in\tilde I_0.$$

Отсюда с учетом (27) получаем

$$\|\bar x^0-x_{k-1}^0\|^2=\sum_{i\in\tilde I^{k-1}}t_i^{k-1}(\bar x^0-x_{k-1}^0,a_i^0)=\sum_{i\in\tilde I^{k-1}}t_i^{k-1}[(\bar x^0-x_{k-1}^0,a_i^0)+$$
$$+(a_i^{j(i)},\bar x^{j(i)}-x_k^{j(i)})]\le\sigma q\sum_{i\in\tilde I^{k-1}}t_i^{k-1}\sum_{s=1}^{j(i)}(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}a_i^0\le$$
$$\le\sigma q\{\sum_{i\in\tilde I^{k-1}}(t_i^{k-1})^2\sum_{i\in\tilde I^{k-1}}[\sum_{s=1}^{j(i)}(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}a_i^0]^2\}^{1/2}.$$

Но $\|\bar x^0-x_{k-1}^0\|^2=\|z_{k-1}\|^2=\|\sum_{i\in\tilde I^{k-1}}t_i^{k-1}a_i\|^2$, и так как множество векторов $\{a_i\},\ i\in\tilde I^{k-1}$, линейно-независимо, то существует такое $\beta>0$, вообще говоря, зависящее от k, что $\|\sum_{i\in\tilde I^{k-1}}t_i^{k-1}a_i\|^2\ge\beta\sum_{i\in\tilde I^{k-1}}(t_i^{k-1})^2$. Но так как линейно-независимых подмножеств множества $\{a_i\},\ i\in\tilde I$, конечное число, то β может быть выбрано не зависящим от k.

Продолжая цепочку выведенных выше неравенств, получаем

$$\|\bar x^0-x_{k-1}^0\|^2\le\frac{\sigma q}{\sqrt\beta}\|\bar x^0-x_{k-1}^0\|\cdot\{\sum_{i\in\tilde I^{k-1}}[\sum_{s=1}^{j(i)}(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}a_i^0]^2\}^{1/2},$$

т.е.

$$\|\bar x^0-x_{k-1}^0\|^2\le\frac{\sigma^2q^2}{\beta}\sum_{i\in\tilde I^{k-1}}[\sum_{s=1}^{j(i)}(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}a_i^0]^2. \qquad (28)$$

В свою очередь, выражение в правой части соотношения (28) можно оценить следующим образом:

$$\sum_{i\in I_{k-1}}\Big[\sum_{s=1}^{j(i)}(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}a_i^o\Big]^2\le\sum_{i\in I}\Big\|\sum_{s=1}^{j(i)}(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}\Big\|^2\|a_i^o\|^2\le$$
$$\le\sum_{i\in I} j(i)\sum_{s=1}^{j(i)}\|(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}\|^2\|a_i^o\|^2\le\sum_{s=1}^{q}\|(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}\|^2\sum_{i\in I} j(i)\|a_i^o\|^2.$$

Из (28) на основе только что полученного неравенства находим, что при достаточно больших k

$$\sigma^2 q^2\sum_{s=1}^{q}\|(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}\|^2\ge\xi\|\bar x^o-x_{k-1}^o\|^2, \qquad (29)$$

где константа $\xi>0$ и не зависит от номера итерации. С другой стороны, просуммировав (20) для $s=1,2,\ldots,q$, получим

$$\|F_q x_{k-1}^o-F_q\bar x^o\|^2\le\|x_{k-1}^o-\bar x^o\|^2-\sigma^2q^2\sum_{s=1}^{q}\|(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}\|^2$$

или

$$\|x_k^o-\bar x^o\|^2\le\|x_{k-1}^o-\bar x^o\|^2-\sigma^2q^2\sum_{s=1}^{q}\|(v_k^s-\bar v^s)B^{(s)}\|^2.$$

Используя (29), получим

$$\|x_k^o-\bar x^o\|^2\le(1-\xi)\|x_{k-1}^o-\bar x^o\|^2.$$

Теорема доказана.

Теперь покажем, что множество S_σ не пусто при любом $\sigma>0$. Введем в рассмотрение квадратные матрицы порядка m

$$H=\begin{bmatrix} B^{(1)}(B^{(1)})^T & 0 & \ldots & 0\\ B^{(2)}(B^{(1)})^T & B^{(2)}(B^{(2)})^T & & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B^{(q)}(B^{(1)})^T & B^{(q)}(B^{(2)})^T & \ldots & B^{(q)}(B^{(q)})^T\end{bmatrix},\quad \mathcal{D}=\begin{bmatrix} E_{m_1} & & & 0\\ & 2E_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & qE_{m_q}\end{bmatrix}$$

где E_{m_j}, $j=1,2,\ldots,q$, – единичные матрицы порядка m_j. Тогда соотношения (13) и (15), характеризующие множество S_σ неподвижных точек оператора Φ_σ и множество $V\bar x^o$, принимают вид

$$A\bar x+\sigma q H\bar v^T\ge b+\sigma\mathcal{D}B(c^o)^T, \qquad (30)$$

$$A^T\bar v^T=c^T,\ \bar v\ge 0, \qquad (31)$$

$$\bar{v}(A\bar{x}+\sigma q H\bar{v}^T-b-\sigma \mathcal{D}B(c^0)^T)=0, \tag{32}$$

где B – матрица, составленная из первых n_0 столбцов матрицы A, а $\bar{x}$ – такой вектор, что $\bar{x}_0\in S_\sigma$, а $\bar{x}^j\in S_j(F_j\bar{x}^0)$ для $j=1,2,\dots,q$. Из теорем двойственности линейного программирования можно заключить, что векторы $\bar{x}$ и $\bar{v}$ удовлетворяют соотношениям (30)–(32) тогда и только тогда, когда

а) вектор $\bar{v}$ максимизирует функцию

$$v(b+\sigma\mathcal{D}B(c^0)^T-\sigma q H\bar{v}^T)$$

при условиях (31);

б) вектор $\bar{x}$ минимизирует функцию

$$cx$$

при условиях (30).

ЛЕММА 5. Матрица H неотрицательно определенная, и $y^THy=0$ тогда и только тогда, когда $H^Ty=0$, где $y\in R^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – блочно-диагональная матрица, у которой на диагонали стоят матрицы $B^{(j)}(B^{(j)})^T$, $j=1,2,\dots,q$. Так как

$$G=H+H^T-BB^T, \tag{33}$$

то

$$2y^THy=y^T(H+H^T)y=y^TGy+y^TBB^Ty=\sum_{j=1}^{q}\|(B^{(j)})^Ty^j\|^2+\|B^Ty\|^2\geq 0,$$

т.е. матрица H неотрицательно определенная. Из вышенаписанной цепочки соотношений также следует, что если $y^THy=0$, то $(B^{(j)})^Ty^j=0$ для $j=1,2,\dots,q$, тем самым, $Hy=0$ и $H^Ty=0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Система (30)–(31) совместна при любом $\sigma>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему, в некотором смысле двойственную к системе (30)–(31):

$$\begin{cases} z\geq 0,\ A^Tz=0, \\ \sigma q H^Tz+Au\leq 0, \end{cases} \tag{34}$$

где $z\in R^m$, $u\in R^n$ – вектор-столбцы. Покажем, что неравенство

$$b^Tz+\sigma c^0B^T\mathcal{D}z+cu\leq 0$$

является следствием системы (34), тогда утверждение леммы следует из теоремы Минковского - Фаркаша. Последнее соотношение из (34) умножим слева на вектор z^T, тогда с учетом второго соотношения из (34) получим $z^T H^T z \le 0$. Из (33) находим $2z^T H^T z = z^T G z \le 0$. Так как

$$z^T G z = \sum_{j=1}^{q} (z^j)^T B^{(j)} (B^{(j)})^T z^j = \sum_{j=1}^{q} \|(z^j)^T B^{(j)}\|^2 \le 0,$$

то $(z^j)^T B^{(j)} = 0$ для $j = 1, 2, \ldots, q$. Поскольку предполагается, что каждая подсистема (4) совместна, то из условий $z^j \ge 0$, $(z^j)^T B^{(j)} = 0$ и $(z^j)^T A^{(j)} = 0$ следует, что $(b^j)^T z^j \le 0, j = 1, 2, \ldots, q$. Просуммировав эти соотношения по всем j, получим $b^T z \le 0$. Но $\sigma c^0 B^T \mathcal{D} z = \sigma c^0 \sum_{j=1}^{q} j (B^{(j)})^T z^j = 0$, поэтому

$$b^T z + \sigma c^0 B^T \mathcal{D} z \le 0. \qquad (35)$$

По лемме 5 из того, что $z^T H^T z \le 0$, следует, что $H^T z = 0$. Отсюда в силу последнего соотношения (34) получаем, что

$$Au \le 0. \qquad (36)$$

Так как задача (1)-(2) предполагается разрешимой, то существует вектор-строка $v \ge 0$ такая, что $vA = c$. Поэтому из (36) найдем, что $cu \le 0$. Складывая полученное неравенство с неравенством (35), получим, что $b^T z + \sigma c^0 B^T \mathcal{D} z + cu \le 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Множество S_σ не пусто при любом $\sigma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для некоторых x и v помимо (30)-(31) выполняется условие дополнительности (32). Рассмотрим задачу минимизации квадратичной функции

$$f(x, v) = \sigma q v H v^T - v(b + \sigma \mathcal{D} B (c^0)^T) + cx$$

при ограничениях (30)-(31). Эта задача имеет решение, так как минимизируемая функция ограничена снизу нулем на множестве допустимых решений (см. [10]). Пусть $\bar{x}$, $\bar{v}$ - решение этой задачи.

Из признака оптимальности следует, что существуют вектор-строки $z \in R_m$ и $u \in R_n$ такие, что

$$zA = c, \quad z \ge 0,$$

$$\sigma q z H + u A^T \le \sigma q \bar{v} H + \sigma q \bar{v} H^T - b^T - \sigma c^0 B^T \mathcal{D}, \qquad (37)$$

$$z(A\bar{x}+\sigma q H\bar{v}^T)=z(b+\sigma\mathcal{D}B(c^\circ)^T), \quad (38)$$

$$\sigma q z H\bar{v}^T+uA^T\bar{v}^T=2\sigma q\bar{v}H\bar{v}^T-b^T\bar{v}^T-\sigma c^\circ B^T\mathcal{D}\bar{v}^T. \quad (39)$$

Умножив слева на $\bar{v}$ соотношение (30), получим

$$c\bar{x}+\sigma q\bar{v}H\bar{v}^T\geq\bar{v}(b+\sigma\mathcal{D}B(c^\circ)^T). \quad (40)$$

Умножив теперь справа на z^T неравенство (37), найдем

$$\sigma q z H z^T+uc^T\leq\sigma q\bar{v}Hz^T+\sigma q\bar{v}H^T z^T-b^T z^T-\sigma c^\circ B^T\mathcal{D}z^T. \quad (41)$$

Если соотношения (39) и (40), умноженные на -1, сложить с (38) и (41) и обе части полученного неравенства сократить на $\sigma q>0$, то в результате получим

$$(z-\bar{v})H(z-\bar{v})^T\leq 0. \quad (42)$$

Так как H - неотрицательно определенная матрица, то в (42) будет равенство. А это возможно лишь тогда, когда в неравенствах, из которых мы получили (42) сложением и вычитанием, будут равенства. В частности, в (40) будет равенство

$$\bar{v}(A\bar{x}+\sigma q H\bar{v}^T)=\bar{v}(b+\sigma\mathcal{D}B(c^\circ)^T).$$

А это и есть доказываемое условие дополнительности (32). Теорема доказана.

Обозначим через Q_σ множество векторов из R^n, удовлетворяющих условию б) при $\sigma>0$, а через Q_0 - множество решений исходной задачи (1)-(2). Тогда имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. При $\sigma\to 0+$ $\sup\limits_{\bar{x}\in Q_\sigma}\{\rho(\bar{x},Q_0)\}\to 0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что из (31) $c^\circ=\bar{v}B$, максимизируемую функцию из условия а) можем переписать в виде

$$v(b+\sigma\mathcal{D}B(c^\circ)^T-\sigma q H\bar{v}^T)=v(b+\sigma\mathcal{D}BB^T\bar{v}^T-$$

$$-\sigma q H\bar{v}^T)=v(b-\sigma\tilde{H}\bar{v}^T),$$

где $\tilde{H}=qH-\mathcal{D}BB^T$. Введем матрицу $\bar{H}=\tilde{H}+\frac{(q-1)q}{2}BB^T$. При условии, что вектор $v\in R_m$ удовлетворяет условию (31), имеем

$$v(b-\sigma\bar{H}\bar{v}^T)=v(b-\sigma\tilde{H}\bar{v}^T)-\sigma\frac{(q-1)q}{2}\|c^\circ\|^2,$$

Поэтому задача а) эквивалентна задаче

с) вектор $\bar{\vartheta}$ максимизирует функцию

$$\vartheta(b - \sigma\bar{H}\bar{\vartheta}^T)$$

при условиях (31).

Покажем, что матрица $\bar{H}$ является неотрицательно определенной, т.е. $y\bar{H}y^T \geq 0$ для всех $y \in R_m$. Как было показано при доказательстве леммы 5,

$$yHy^T = 1/2\,\|yB\|^2 + 1/2\sum_{j=1}^{q}\|y^jB^{(j)}\|^2;$$

с другой стороны,

$$yDBB^Ty^T = \sum_{j=1}^{q} j y^j B^{(j)}B^Ty^T \leq \|\sum_{j=1}^{q} j y^j B^{(j)}\|\,\|yB\| \leq$$

$$\leq q\sum_{j=1}^{q}\|y^jB^{(j)}\|\cdot\|yB\|.$$

Отсюда

$$y\bar{H}y^T = q\,yHy^T - yDBB^Ty^T + \frac{(q-1)q}{2}\|yB\|^2 \geq \frac{q^2}{2}\|yB\|^2 -$$

$$-q\|yB\|\sum_{j=1}^{q}\|y^jB^{(j)}\| + \frac{q}{2}\sum_{j=1}^{q}\|y^jB^{(j)}\|^2 = \frac{q}{2}\sum_{j=1}^{q}(\|yB\| - \|y^jB^{(j)}\|)^2 \geq 0.$$

Пусть R_0^m – ядро оператора, задаваемого матрицей $\bar{H}$, а R_1^m – его ортогональное дополнение. Через D_1 обозначим ортогональный проектор на R_1^m. Так как матрица $\bar{H}$ неотрицательно определенная, то у матрицы $\bar{H} + \bar{H}^T$ все собственные значения неотрицательные и собственные подпространства взаимно ортогональны. Следовательно, $y(\bar{H} + \bar{H}^T)y^T \geq \lambda\|D_1y^T\|^2$, где λ – наименьшее положительное собственное значение матрицы $\bar{H} + \bar{H}^T$. Отсюда $y\bar{H}y^T \geq \gamma\|D_1y^T\|^2$, где $y \in R_m$, $\gamma = \lambda/2$. Пусть ϑ_0 – некоторое решение задачи, двойственной к исходной задаче (1)-(2). Учитывая, что ϑ_0 удовлетворяет соотношениям (31), а $\bar{\vartheta}$ – условию с), имеем

$$\bar{\vartheta}(b - \sigma\bar{H}\bar{\vartheta}^T) \geq \vartheta_0(b - \sigma\bar{H}\bar{\vartheta}^T).$$

Но $\vartheta_0 b \geq \bar{\vartheta} b$, и поэтому $\bar{\vartheta}H\bar{\vartheta}^T \leq \vartheta_0\bar{H}\bar{\vartheta}^T$. Отсюда

$$\gamma\|D_1\bar{\vartheta}^T\|^2 \leq \bar{\vartheta}\bar{H}\bar{\vartheta}^T \leq \vartheta_0\bar{H}\bar{\vartheta}^T = \vartheta_0\bar{H}D_1\bar{\vartheta}^T \leq \|\vartheta_0\|\,\|H\|\,\|D_1\bar{\vartheta}^T\|,$$

т.е. $\|D_1\bar{\vartheta}^T\| \leq \|\bar{H}\|\,\|\vartheta_0\|/\gamma$. В результате получаем, что

$$\|\bar{H}\bar{\vartheta}^T\| \leq \|\bar{H}\|^2\|\vartheta_0\|/\gamma.$$

Поэтому $\sigma \bar{H} \bar{v}^T \to 0$ при $\sigma \to 0+$. Отсюда по условию b) и на основании леммы 4 получаем утверждение теоремы.

Таким образом, при малом значении $\sigma > 0$ вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условию b), близок к множеству решений исходной задачи (I)-(2). Однако начинать процесс решения задачи с малым значением параметра нецелесообразно, так как неудачный выбор начального приближения может существенно замедлить сходимость. Поэтому представляется естественным следующий порядок осуществления процесса.

Выбираем каким-нибудь образом последовательность $\{\sigma_k\}$ такую, что $\sigma_k \to 0$ при $k \to \infty$. Проведя итерационный процесс с параметром σ_k и получив некоторый вектор $\tilde{\bar{x}}$ - приближенное значение вектора $\bar{x}$, переходим к итерациям уже с параметром σ_{k+1}. При этом в качестве начального вектора для этих итераций следует взять полученный вектор $\tilde{\bar{x}}$. И можно завершить процесс решения задачи на том σ_k, для которого полученный вектор $\tilde{\bar{x}}$ удовлетворяет ограничениям (2) с заданной точностью.

Отметим, что предложенный метод может применяться для решения в пространстве R^{n_0} следующей задачи:

$$max\{c^0 x^0 \mid x^0 \in \bigcap_{j=1}^{q} P_0(Q_j)\},$$

где P_0 - оператор ортогонального проектирования на подпространство R^{n_0}, а $Q_j = \{x = (x^0, \bar{x}) \in R^{n_0+n} \mid B^{(j)} x^0 + A^{(j)} \bar{x} \geq b_j\}, j = 1, 2, \ldots, q$. При этом метод надо применять к эквивалентной задаче: $max\{cx \mid Ax \geq b\}$, $c = (c^0, 0, \ldots, 0)$, $b^T = (b_1^T, b_2^T, \ldots, b_q^T)$, а матрица A имеет строение (3).

Автор выражает благодарность В.А.Булавскому за проявленное внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. БУЛАВСКИЙ В.А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования. - "ДАН СССР", 1961, т.137, № 2, с. 258-260.
2. БУЛАВСКИЙ В.А. Итеративный метод решения общей задачи линейного программирования. - "Сиб. мат. журн.", 1962, т.3, № 3, с. 313-332.

3. БУЛАВСКИЙ В.А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования. - В кн.: Материалы конференции по применению мат. методов и ЭВМ в планировании. Новосибирск, изд. Ин-та Математики и Ин-та экономики СО АН СССР, 1962.
4. БУЛАВСКИЙ В.А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования. Автореферат канд. дис. Новосибирск,1962.
5. БРЭГМАН Л.М. Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования. - "ДАН СССР", 1965, т. 162, № 3, с. 487-490.
6. БРЭГМАН Л.М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. - "Журн. выч. математики и мат. физики", 1967, т.7, № 3, с. 620-631.
7. ЕРЕМИН И.И. Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании. - "Мат. заметки", 1968, т.3, № 2, с.217-234.
8. ЕРЕМИН И.И. Фейеровские приближения и задача выпуклого программирования. - "Сиб. мат. журн.",1969, т.10, № 5, с.1034-1047.
9. ЛОБЫРЕВ А.И. О минимизации строго выпуклой функции на пересечении выпуклых множеств. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5 (22). Новосибирск, 1972, с. 128-132.
10. БУЛАВСКИЙ В.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О решении задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями методом последовательного улучшения допустимого вектора. - "ДАН СССР", 1963, т.150, № 2, с.231-234.
11. ДАРМАХЕЕВ В.П. Выпуклая задача квадратичного программирования с диагональной матрицей вторых производных. - В кн.: Оптимизация. Вып. 18 (35). Новосибирск, 1976, с.60-69.
12. ДАРМАХЕЕВВ.П. Итеративный метод решения одного класса задач линейного программирования. -Препринт. Институт Математики СО АН СССР, Новосибирск, 1977.

Поступила в ред.-изд. отдел
19.05.1978 г.